

Unidad 2.

Construcciones y elementos geométricos básicos.

PROPÓSITO

✎ A través de construcciones con regla y compás, explorar las propiedades de las figuras elementales y algunos conceptos básicos de la Geometría Euclidiana. Reconocer patrones de comportamiento geométrico que permitan plantear conjeturas para proceder a su validación empírica.

CONTENIDO

2.1 Construcciones con regla y compás.

2.2 Triángulos.

2.2.1 Desigualdad del triángulo y la clasificación de los triángulos.

2.2.2 Rectas y puntos notables en un triángulo.

2.2.3 Reproducción de polígonos por triangulación.

2.3 Circunferencia; Rectas y Segmentos.

2.3.1 Rectas tangentes a una circunferencia.

2.4 Reproducción de un triángulo a partir de condiciones dadas (LAL, LLL, ALA).

Identificación de puntos problemáticos y propuestas de solución.

Bibliografía.

PRESENTACIÓN

Como se señala en los Programas de Estudio del CCH, el núcleo central del curso de matemáticas II lo constituye el estudio de la geometría euclidiana, que ayuda al alumno a describir los objetos y sus partes de acuerdo a sus formas, dimensiones y propiedades. Contribuye de manera significativa a favorecer un pensamiento reflexivo cuando el estudiante en un primer momento, identifica propiedades y relaciones que puede enunciar en proposiciones generales, construye y proporciona argumentos que validen dichas proposiciones, y finalmente, establece relaciones lógicas entre ellas, aun sin llegar necesariamente a un rigor axiomático propio de estudios más especializados.

En esta unidad damos inicio a este estudio, por tal motivo debe contemplarse la etapa de exploración, misma que permitirá el avance hacia la deducción y a la aplicación para establecer un equilibrio entre las dos tendencias de la enseñanza de la geometría a nivel bachillerato. Estas tendencias son un formalismo axiomático, mientras que la otra no trasciende la presentación mecanicista de hechos geométricos.

Por ello, en esta unidad se pretende que el alumno explore, observe patrones de comportamiento, conjeture y comience a argumentar, para esto, **el desarrollo de cada subtema se basa en la totalidad de aprendizajes estipulados en el Plan de Estudios de Matemáticas II del Colegio de Ciencias y Humanidades.**

Este material pretende apoyar el trabajo de profesores y alumnos, y como tal, ofrece un conjunto de sugerencias de estrategias didácticas, actividades de enseñanza aprendizaje, y materiales de apoyo sobre cómo trabajar los contenidos estipulados en nuestro programa de estudios.

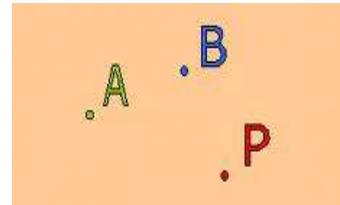
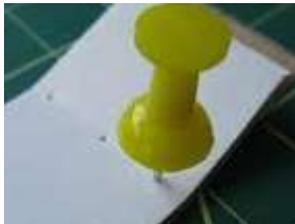
Al inicio de la unidad se sugieren varias actividades que permitirán reconstruir algunos conceptos de la geometría y revisar algunas de las propiedades básicas de las figuras geométricas, doblando papel al mismo tiempo que con regla y compás. Esto con el objetivo de que el alumno perciba los conceptos de dos formas diferentes, destacando el doblado de papel como una actividad que le lleve al estudiante a construir un aprendizaje más significativo.

Conceptos clave: Punto, segmento de recta, ángulo, perpendicularidad, triángulo y sus rectas notables, circunferencia.

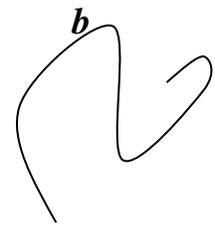
UNIDAD II. CONSTRUCCIONES Y ELEMENTOS GEOMÉTRICOS BÁSICOS

Se sugiere iniciar esta unidad recordando qué es un punto, una línea, línea recta, semirrecta, segmento de línea recta, etc. En los Elementos de Euclides son conceptos no definidos, pero si damos una idea utilizando nuestro propio entorno, donde se pueden hacer representaciones concretas de ellas. Por ejemplo:

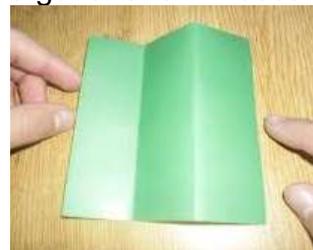
Punto es aquello que no tiene partes¹. Se puede asociar con la punta de un alfiler o con el orificio que deja en una hoja de papel o con un granito de arena, recalcar que no tiene grosor. Notación: Los puntos se nombran con cualquier letra mayúscula.



Línea es una longitud sin anchura¹. Se puede representar como la marca que deja un lápiz en un papel, un hilo en cualquier posición, una cuerda de saltar, etc. Con la observación que como concepto matemático, no tiene principio ni fin.



Línea Recta en los Elementos de Euclides “es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella”, es decir, es un conjunto de puntos colocados en una misma dirección. Se puede asociar con un hilo tenso, un rayo de luz, el doblez en una hoja de papel, etc. Notación: Toda línea se nombra con alguna letra minúscula.



¹Definición de los Elementos de Euclides, L-I

NOTA: Hacer ver que dados dos puntos, estos determinan una y sólo una línea recta.

Semirrecta es cada una de las partes cuando una línea recta es dividida en dos. Es decir, toda semirrecta tiene un origen o inicio pero no tiene fin. Notación: También se les nombra con alguna letra minúscula.

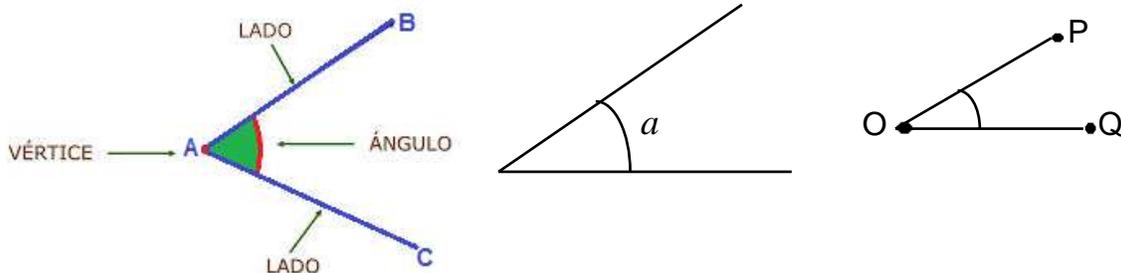


Segmento de línea recta es una porción de una línea recta limitada por dos puntos diferentes llamados extremos, es decir, tiene principio y fin. Notación: Se representa con las letras de sus puntos extremos. Así, dados dos puntos P y Q , la menor distancia posible entre esos dos puntos es el segmento de recta \overline{PQ} .



Ángulo es la figura formada por dos semirrectas que parten del mismo punto inicial. A las dos rectas se les denomina lados del ángulo y al punto inicial se le llama vértice del ángulo. Notación: El símbolo del ángulo es \angle , y se nombra con alguna letra minúscula, con alguna letra griega o con sus tres letras mayúsculas donde la que se ubica al centro corresponde al vértice.

NOTA: En esta etapa de estudio no le daremos mucha importancia a la dirección del ángulo.



2.1 CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS:

Este subtema se puede trabajar en forma de taller, donde se pueden desarrollar varias actividades que permiten construir algunos conceptos de la geometría, y revisar algunas de las propiedades básicas de las figuras geométricas utilizando la regla y el compás, y al mismo tiempo doblando papel. Algunas sugerencias son las siguientes.

Materiales necesarios: Regla sin graduar, compás, una hoja de papel y lápiz.

NOTA: Las actividades marcadas con  se realizan con regla y compás, y las marcadas con  se realizan doblando una hoja de papel.

Actividad 1: Línea Recta que pasa por un punto dado.

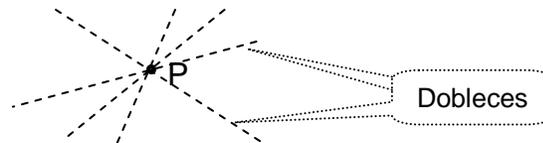


En tu cuaderno marca un punto, y llámalo P. Con tu regla, traza una recta que pase por él.

SUGERENCIA: Como los alumnos harán diferentes trazos, se puede cuestionar sobre cuántas líneas rectas se pueden trazar por este punto.



En la hoja de papel marca un punto en cualquier lugar, y llámalo P. Luego, marca un doblez recto que pase por el punto indicado.



SUGERENCIA: Con esta instrucción también se puede hacer una infinidad de dobleces.

Actividad 2: Línea Recta que pasa por dos puntos.



En tu cuaderno marca un nuevo punto diferente a P, llámalo Q. Con tu regla traza una recta que pase por los dos puntos P y Q.

PARA REFLEXIONAR: ¿Podrías trazar otra recta diferente que pase por P y Q?



En la hoja de papel marca un nuevo punto diferente a P, llámalo Q. Luego, marca un doblez recto que pase por los dos puntos P y Q.

PARA REFLEXIONAR: ¿Podrías marcar otros dobleces rectos diferentes que pasen por P y Q?

Actividad 3: Punto medio y mediatriz de un segmento de recta dado.

Punto medio de un segmento es el punto que lo divide en dos partes iguales.

Mediatriz es la línea recta que pasa por el punto medio de un segmento perpendicular a este.

Perpendicular es la recta que corta a otra formando un ángulo de 90° .



En tu cuaderno remarca el segmento \overline{PQ} , con tu regla y compás traza el punto medio de \overline{PQ} . Escribe el procedimiento que seguiste para trazarlo.

Solución:

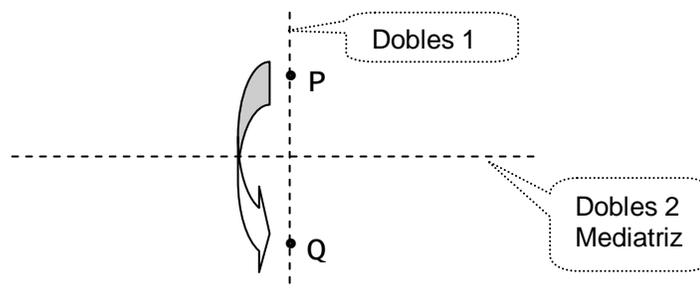
<p>Segmento dado \overline{PQ}.</p>	<p>1º. Utilizando el compás, con centro en P se abre una longitud r mayor que la mitad de \overline{PQ} y se traza un arco de circunferencia.</p>	<p>2º. Con el compás, ahora con centro en Q y con la misma abertura r se traza otro arco de circunferencia que corte al arco anterior en dos puntos A y B.</p>	<p>3º. Se traza la recta que pase por A y B, y el punto de intersección de ésta recta con \overline{PQ} que es M, será el punto medio de \overline{PQ}. La recta que pasa por A y B se le llama mediatriz de \overline{PQ}.</p>



En tu hoja de papel marca un dobles y sobre él marca los puntos P y Q. Ahora, con solo doblar el papel encuentra el punto medio entre P y Q.

Solución:

Se marca un segundo dobles haciendo coincidir los extremos P y Q, donde se intersecan ambos dobleces será el punto medio. El segundo dobles será la mediatriz del segmento \overline{PQ} , ya que es perpendicular y pasa por el punto medio de \overline{PQ} .



PARA REFLEXIONAR: ¿Por qué son perpendiculares los dobleces?

Actividad 4: Segmentos congruentes.



En tu cuaderno traza un nuevo segmento de recta \overline{MN} , con tu regla y compás traza un nuevo segmento recto que sea congruente a \overline{MN} . Escribe el procedimiento que seguiste para trazarlo.

Solución:

<p>Segmento \overline{MN} cualquiera.</p>	<p>1º. Se traza un punto L fuera de \overline{MN}.</p>	<p>2º. El compás se abre con una longitud igual a \overline{MN}, con centro en L se traza un arco de circunferencia.</p>	<p>3º. Se marca un punto K sobre el arco de circunferencia y se traza el segmento \overline{KL}, entonces $\overline{MN} \cong \overline{KL}$. Congruente</p>

El símbolo que usaremos para “congruente” será \cong .

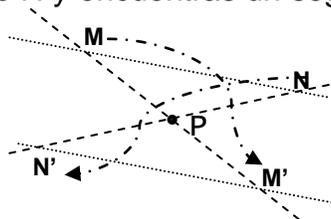
PARA REFLEXIONAR: ¿Por qué son congruentes?, ¿Lo puedes hacer de otra forma?



En tu hoja de papel, marca un nuevo segmento de recta \overline{MN} , y con sólo doblar el papel, marca un nuevo segmento recto que sea congruente a \overline{MN} .

Solución:

Hacer cualquier dobles recto que pase por M y otro que pase por N, ambos dobleces se cruzarán en P. A partir de P doblar la hoja colocando M sobre su propio dobles y este nuevo punto llamarlo M', hacer lo mismo con el punto N y encuentras un segundo punto N', así, el segmento $\overline{M'N'} \cong \overline{MN}$.



Actividad 5: Ángulos congruentes.



En tu cuaderno dibuja un ángulo $\angle ABC$, traza con regla y compás otro ángulo que sea congruente a $\angle ABC$. Escribe el procedimiento que seguiste para trazarlo.

Solución:

<p>1°. Se traza una semirrecta con origen B'.</p>	<p>2°. Con centro en B se abre el compás y se traza un arco de tal forma que corte a los dos lados del ángulo. Llama a los cortes A' y D'. Con la misma abertura y centro en B' se traza un arco de circunferencia que corte a la semirrecta en D'.</p>	<p>3°. Se abre el compás de A' a D', y con centro en D' se marca un segundo arco de circunferencia que corte al ya trazado, a la intersección llamarla E.</p>	<p>4°. Se traza el segmento recto de B' a E. Entonces, $m\angle ABC = m\angle EB'D'$</p> <p>$m\angle$: medida del ángulo.</p>

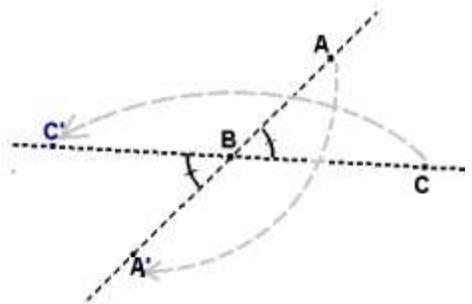
OBSERVACIÓN: Aclarar que son iguales en su medida.



En la hoja de papel marca con dobleces un ángulo ABC , y con sólo doblar la misma hoja, marca un ángulo que sea congruente al $\angle ABC$.

Solución: Un ángulo se forma haciendo dos dobleces que se crucen. Al punto donde se cruzan llámalo B , y elige un punto en cada dobles del mismo lado, llamarlos A y C , respectivamente. Así, ABC es nuestro primer ángulo.

El ángulo congruente más sencillo es tomando el mismo vértice B y los lados estarán en los dobleces ya hechos pero del lado opuesto, esto es, reflejando A y C con respecto a B y marca los puntos A' , C' , respectivamente, de tal forma que $\overline{AB} = \overline{BA'}$ y



$\overline{BC} = \overline{BC'}$, entonces $\angle ABC \equiv \angle A'BC'$. A estos ángulos se les llama Opuestos por el Vértice.

En este momento se puede recordar la clasificación de ángulos.

Ángulo Agudo: Es aquel ángulo cuya medida es mayor que 0° y menor que 90° .

Ángulo Recto: Es aquel cuya medida es 90° , se representa con la marca \square .

Ángulo Obtuso: Es todo ángulo cuya medida es mayor de 90° , pero menor que 180° .

Ángulo Colineal o Llano: Es aquel cuya medida es 180° , es decir, dos ángulos rectos dan lugar a un Ángulo Colineal o Llano.

Ángulo Entrante o Cóncavo: Es todo ángulo cuya medida es mayor que 180° , pero menor que 360° .

Ángulo Perígono: Es aquel cuya medida es de 360° .

Ángulos opuestos por el vértice: son los ángulos opuestos cuando se cortan dos líneas rectas, o también cuando los lados de uno de ellos, son prolongaciones de los lados del otro. Los ángulos opuestos por el vértice son iguales entre sí.

Ángulo Complementarios: Son dos ángulos cuya suma es de 90° .

Ángulo Suplementarios: Son dos ángulos cuya suma es de 180° .

Ángulos adyacentes: Son aquellos que tienen el vértice y un lado en común, al tiempo que sus otros dos lados son semirrectas opuestas. Por lo tanto, los ángulos adyacentes son a la vez ángulos suplementarios.

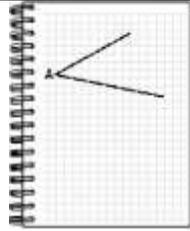
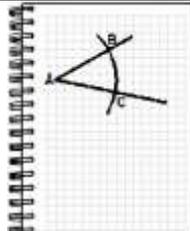
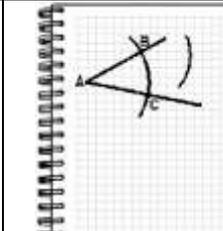
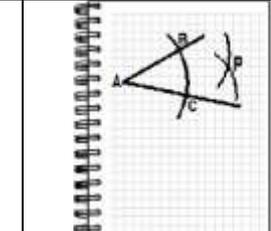
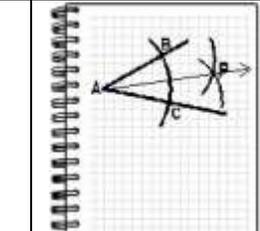
Actividad 6: Bisectriz de un ángulo.

Bisectriz es la semirrecta que divide a un ángulo en dos ángulos iguales.



Con regla y compás traza la bisectriz de un ángulo dado. Escribe los procedimientos para trazarla.

Solución:

				
Se traza un ángulo cualquiera llamando a su vértice A.	1º. Con centro en A se traza un arco de circunferencia que corte a	2º. Con centro en B, el compás se abre una longitud cualquiera y se traza un arco de	3º Con la misma abertura del compás y ahora con centro en C, se traza otro arco de circunferencia	4º. Se traza la semirrecta desde A y que pase por P, entonces $m\angle BAP =$

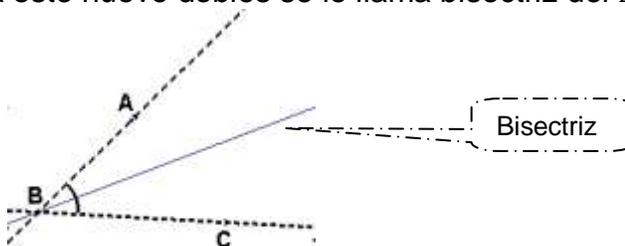
	los dos lados del ángulo en B y C.	circunferencia lo suficiente grande dentro del ángulo.	que corte al arco anterior. Sea P el punto de intersección.	$m\angle CAP$
--	------------------------------------	--	---	---------------



En la hoja de papel hacer un dobles que divida el ángulo ABC (antes formado en la actividad 5), en dos ángulos de igual medida.

Solución:

Se hace un dobles de tal forma que haga coincidir al dobles que pasa por AB con el dobles que pasa por BC. A este nuevo dobles se le llama bisectriz del $\angle ABC$.



Actividad 7: Perpendicular a una recta dada que pase por un punto sobre ella.



En tu cuaderno traza una línea recta cualquiera, y marca un punto P sobre ella. Con regla y compás traza una línea recta perpendicular a la recta antes trazada y que pase por el punto P. Escribe los procedimientos para trazarla.

Solución:

Una recta y un punto P sobre ella.	1º. Se traza un arco de circunferencia con centro en P y que corte a la recta dada en A y B. PARA REFLEXIONAR: P es su punto medio, ¿por qué?	2º. Se traza la mediatriz del segmento AB siguiendo los pasos de la actividad 3. Al ser mediatriz, es perpendicular a la recta dada y pasa por P.



En la hoja de papel hacer un nuevo dobles y elige un punto sobre este. Después, marca otro dobles que sea perpendicular al primero y que pase por el punto elegido.

Solución:

Se hace un dobles que represente una línea recta, marcamos un punto sobre este y lo llamamos P. A partir de P, se hace un segundo dobles de tal forma que el primer dobles coincida con si mismo.

PARA REFLEXIONAR: ¿Cómo trazas una perpendicular que pase por un punto, si este se encuentra en el extremo de un segmento? ¿O si el punto se encuentra a la mitad del segmento?

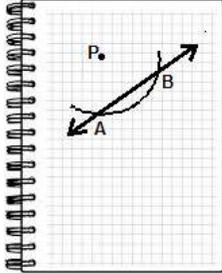
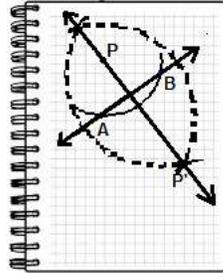
OBSERVACIÓN: La superposición de cuatro ángulos (al doblar una hoja dos veces), se observa que al desdoblar se forma un ángulo de 360° , hecho que confirma la perpendicularidad.

Actividad 8: Perpendicular a una recta dada que pasa por un punto fuera de ella.



En tu cuaderno traza una recta cualquiera y marca un punto P fuera de ella. Con regla y compás trazar una perpendicular a la recta que pase por el punto P. Escribe los procedimientos para trazarla.

Solución:

		
<p>Se traza una línea recta y un punto P fuera de ella.</p>	<p>1º. Utilizando el compás, con centro en P se traza un arco de circunferencia que corte a la recta en dos puntos A y B.</p>	<p>2º. Se traza la mediatriz del segmento AB siguiendo los pasos de la actividad 3. Al ser mediatriz, es perpendicular a la recta dada y pasa por P.</p>



En la hoja de papel marca un nuevo dobles y elige un punto fuera de este. Después, marca otro dobles que sea perpendicular al primero y que pase por el punto elegido.

Solución:

Se hace un dobles que represente una línea recta y se marca un punto P que no esté sobre el dobles. Se hace otro dobles de tal forma que lleve el dobles anterior sobre él mismo teniendo cuidado de que pase por el punto P. Este segundo dobles será perpendicular al primero y pasa por P.

Actividad 9: Paralela a una recta dada que pase por un punto fuera de ella.



En tu cuaderno traza una recta cualquiera y marca un punto P fuera de ella. Con regla y compás traza una recta paralela a la recta que pase por el punto P. Escribe los procedimientos para trazarla.

Rectas paralelas son aquellas rectas en el mismo plano que por más que las prolongues en ambas direcciones, nunca se cortan.

Solución:

<p>Una recta y un punto P fuera de ella.</p>	<p>1°. Utilizando el compás, con centro en P se traza un arco de circunferencia que corte a la recta en dos puntos A y B.</p>	<p>2°. Se traza la mediatriz del segmento AB siguiendo los pasos de la actividad 3.</p>	<p>3° Se traza una perpendicular a la mediatriz que pase por P. La línea recta que pasa por P y Q, será paralela a la recta dada y pasa por P.</p>

PARA REFLEXIONAR: ¿Lo puedes hacer de otra forma?



En la hoja de papel hacer un dobles y marca un punto fuera de este, llámalo P. Hacer otro dobles que sea paralelo al primero y que pase por el punto P.

Solución:

Se hace un dobles que represente una línea recta, se marca un punto P que no esté sobre el dobles, y se hace otro dobles de tal forma que lleve el dobles anterior sobre él mismo teniendo cuidado de que pase por el punto P. Este segundo dobles se sabe que es perpendicular al primero y pasa por P, repetir este proceso con este segundo dobles y que pase por P.

El primer dobles con el tercero que pasa por P serán paralelos.

EJERCICIOS 2.1

I. Con regla y compás realiza las siguientes construcciones y escribe en cada caso los procedimientos que seguiste para realizarlo. Optativamente, puedes realizar algunos doblando papel.

1) Traza el punto medio del segmento AB.



2) Traza la mediatriz del segmento CD.



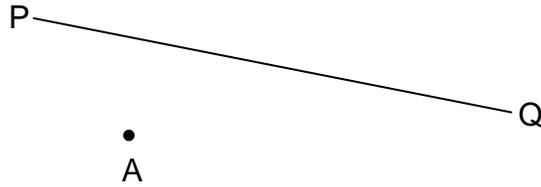
3) Traza la bisectriz del siguiente ángulo.



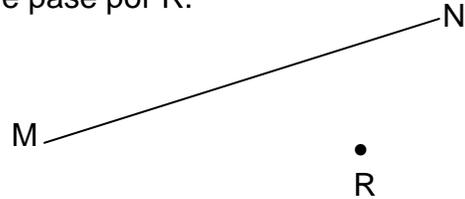
4) Traza una perpendicular al segmento AB que pase por B.



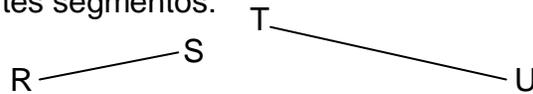
5) Traza una recta perpendicular al segmento PQ que pase por A.



6) Traza una recta paralela al segmento MN y que pase por R.



Dados los siguientes segmentos:



7) Construye un segmento de longitud $3\overline{RS}$.

8) Construye un segmento de longitud $\frac{1}{2}\overline{TU}$.

9) Construye un segmento de longitud $\frac{3}{4}\overline{TU}$.

10) Construye un segmento de longitud $3\overline{RS} + \overline{TU}$.

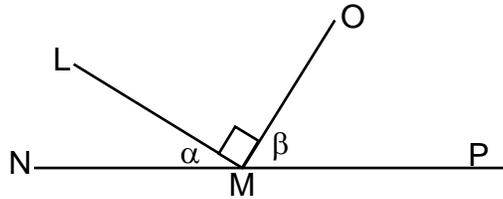
11) Construye un segmento de longitud $2\overline{TU} - 2\overline{RS}$.

12) Trazar el punto que divide el segmento MN es $\frac{3}{4}$ partes.

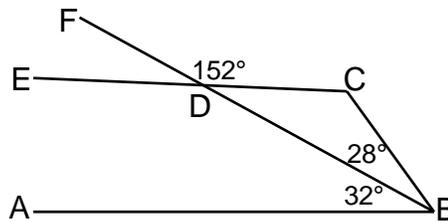


II. Practicando con los conceptos básicos de geometría.

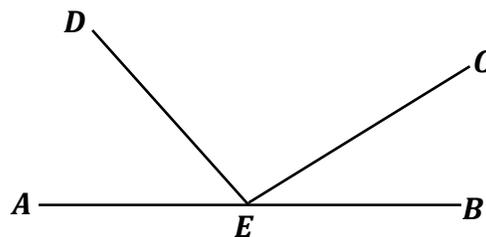
1) En la siguiente figura, por qué los ángulos α y β son complementarios.



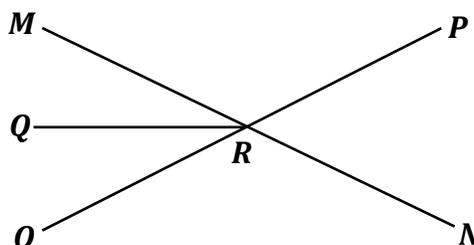
2) En la siguiente figura, indica un par de ángulos suplementarios.



3) En la siguiente figura, indica dos pares de ángulos adyacentes.

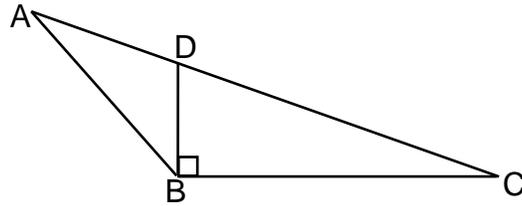


4) En la siguiente figura, indica sólo dos pares de ángulos opuestos por el vértice.



5) En la siguiente figura, localiza los siguientes ángulos:

- Dos ángulos obtusos.
- Un ángulo recto.
- Un ángulo llano.
- Un ángulo agudo en D.
- Un ángulo agudo en B.



- Hallar el complemento de 35° .
 - Hallar el suplemento de 19° .
 - Hallar el conjugado de 45° .

- ¿Qué ángulo es igual a su complemento?
 - ¿Qué ángulo es el doble de su complemento?
 - Si el suplemento de un ángulo es ocho veces al ángulo ¿Cuánto vale el ángulo?
 - Si el suplemento de un ángulo x es $5x$ ¿cuál es el valor del ángulo?

8) Calcula la medida del $\angle C$ si se sabe que mide 50° más que su suplemento.

9) Si se sabe que $\angle P$ y $\angle Q$ son suplementarios, encuentra el valor de x y el de los ángulos P y Q si $\angle P = 5x - 8^\circ$ y $\angle Q = 4x + 17^\circ$. Los ángulos están dados en grados.

10) La medida de un ángulo M es 36° más que la medida de su complemento. Encuentra la medida de $\angle M$.

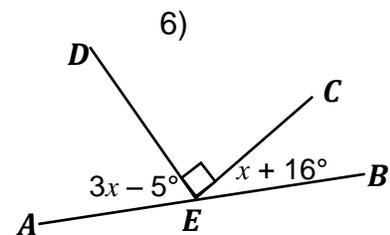
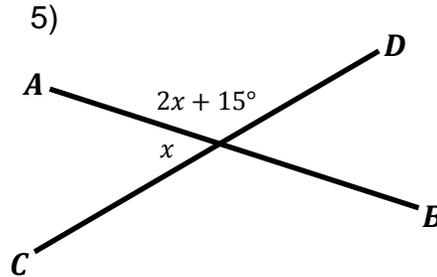
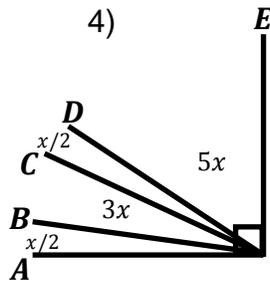
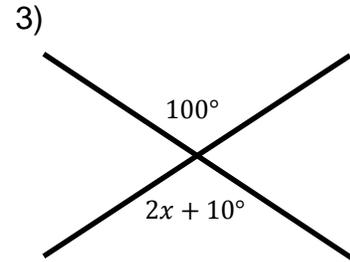
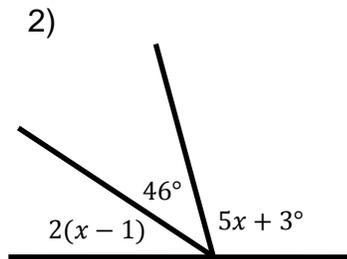
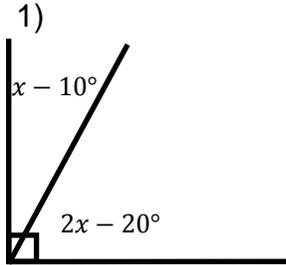
11) ¿Cuál es la medida de dos ángulos complementarios si su diferencia es 16° ?

12) Si se sabe que $\angle P$ y $\angle Q$ son complementarios, encuentra el valor de x y el de los ángulos P y Q si $\angle P = 10x + 7$ y $\angle Q = 3x + 5$. Los ángulos están dados en grados.

13) Si se sabe que $\angle A$ y $\angle B$ son suplementarios, encuentra el valor de x y el de los ángulos A y B si $\angle A = x^2 + 90^\circ$ y $\angle B = 6x + 35^\circ$. Los ángulos están dados en grados.

14) Si se sabe que $\angle A$ y $\angle B$ son complementarios, y además $\angle A = 2x - 9^\circ$ y $\angle B = 3x + 14^\circ$. Determina el valor de x y el de los ángulos A y B , recuerda que la medida de los ángulos es en grados.

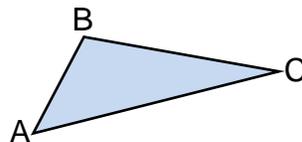
III. Utilizando las propiedades de los ángulos, hallar el valor de x mostrado en cada figura.



2.2 TRIÁNGULOS

Un **triángulo** es una figura rectilínea comprendida entre tres líneas rectas², comúnmente definido como un polígono de tres lados.

Por lo general, para representar un triángulo se utiliza el símbolo Δ seguido de tres letras mayúsculas que representan cada una a los vértices de dicho triángulo. Así, ΔABC designa al triángulo:



² Definición 19 de los elementos de Euclides, L1.

2.2.1 Desigualdad del triángulo y la clasificación de los triángulos.

Actividad: Trazar 4 triángulos cuyas medidas son las siguientes:

a) $\triangle ABC$: Con $AB = 5$ cm, $BC = 7$ cm y $AC = 3$ cm

Sugerencia para el trazo de los triángulos:

1° Se traza el lado mayor $BC = 7$ cm.

2° Se abre el compás $AB = 5$ cm y con centro en B se traza un arco lo suficientemente grande.

3° Se abre el compás $AC = 3$ cm y con centro en C se traza otro arco que corte al anterior.

4° Con la regla se trazan los segmentos AB y AC , y se obtiene el $\triangle ABC$.

b) $\triangle DEF$: Con $DE = 8$ cm, $EF = 6$ cm y $DF = 6$ cm.

c) $\triangle GHI$: Con $GH = 2$ cm, $HI = 7$ cm y $GI = 4$ cm.

d) $\triangle PQR$: Con $PQ = 9$ cm, $QR = 4$ cm y $PR = 3$ cm.

Con esta actividad los alumnos deducirán las condiciones para que se forme un triángulo, esto es, conciben la desigualdad del triángulo.

Desigualdad del triángulo: En todo triángulo dos lados tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante³. O dicho de otra forma, la suma de las longitudes de dos lados de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado⁴.

Los triángulos se pueden clasificar de dos formas: de acuerdo a sus lados y de acuerdo a sus ángulos.

De acuerdo a sus lados, los triángulos se clasifican en⁵:

- **equilátero** cuando tiene **los tres lados iguales**.
- **isósceles** cuando tiene **sólo dos de sus lados iguales**.
- **escaleno** cuando **sus tres lados son desiguales**.

De acuerdo a sus ángulos, los triángulos se clasifican en⁶:

³ Proposición 20 de los elementos de Euclides, L1.

⁴ Clemens et al, p.244

⁵ Definición 20 de los Elementos de Euclides, L1.

- **acutángulo** es el que tiene **sus tres ángulos** (interiores) **agudos**.
- **rectángulo** es el que tiene **un ángulo recto**.
- **obtusángulo** es el que tiene **un ángulo obtuso**.

Se sugiere en esta parte comentar algunas propiedades del triángulo equilátero y del isósceles, por ejemplo:

- 1) En todo triángulo equilátero sus tres ángulos son iguales y cada uno mide 60° .
- 2) En triángulos isósceles los ángulos en la base son iguales y, si los lados iguales se alargan, los ángulos situados bajo la base serán iguales entre sí.
- 3) Si en un triángulo dos ángulos son iguales, entonces los lados opuestos a los ángulos iguales también son iguales uno al otro.

NOTA: 2) y 3) Son las proposiciones 5 y 6 de los Elementos de Euclides, L1.

Teorema: La suma de los ángulos interiores en cualquier triángulo es de 180° .⁷

(La justificación se hará más adelante, ya que primero recordaremos otros conceptos geométricos necesarios)

2.2.2. Rectas y puntos notables en el triángulo.

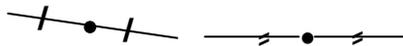
Actividad 1. Con regla no graduada y compás, traza un triángulo escaleno (llámalo PQR) y en cada uno de sus lados traza su **mediatriz**.

RESULTADO: Las tres **mediatrices** se cortan en un punto llamado **Circuncentro**.

Como todos trabajan en triángulos diferentes, las 3 mediatrices se cortan en un sólo punto que puede estar dentro o fuera del triángulo.

PARA REFLEXIONAR: ¿Es necesario el trazo de las tres mediatrices para encontrar el Circuncentro?

Para que el alumno identifique las propiedades de las rectas notables, se le pide que marque la figura \square para los ángulos rectos y para los segmentos iguales marcarlos con una o dos “rayitas” de la siguiente forma:



⁶ Definición 21 de los Elementos de Euclides, L1.

⁷ Proposición 32 de los Elementos de Euclides, L1.

Actividad 2. Con centro en el **Circuncentro** abrir el compás hasta cualquier vértice del triángulo y trazar una circunferencia.

RESULTADO: A este círculo se le llama **círculo circunscrito**. El cual permite comprobar si el trazo de las mediatrices está bien hecho.

Actividad 3. Con regla no graduada y compás, traza un triángulo escaleno, llámalo ABC y en cada uno de sus ángulos interiores traza su **bisectriz**.

RESULTADO: Las tres bisectrices se cortan en un punto llamado **Incentro**.

Al igual que en la actividad 1, todos trabajaron en triángulos diferentes, donde las 3 bisectrices se cortan en un sólo punto dentro del triángulo. Por otra parte, para encontrar el **Incentro** basta con trazar dos de sus bisectrices.

Actividad 4.

a) Con regla y compás, desde el **Incentro** traza una recta perpendicular a cualquier lado del triángulo, llamar Q al punto donde la perpendicular corta al lado elegido.

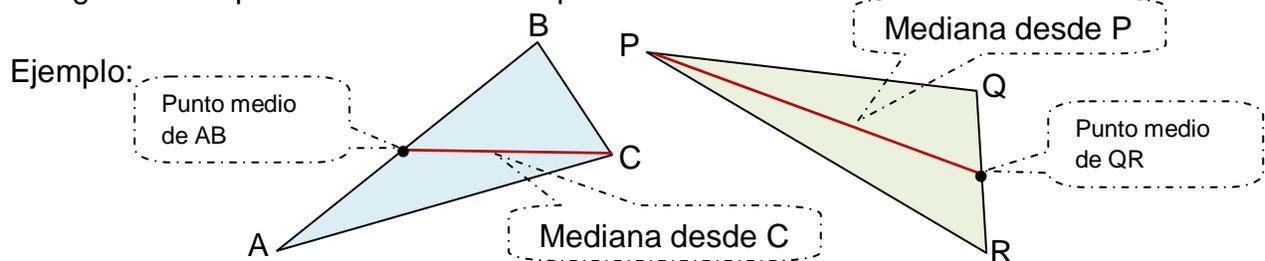
Este trazo debe de realizarse cuidadosamente porque se usará como radio para trazar la circunferencia en la siguiente actividad.

b) Con centro en el Incentro abrir el compás hasta el punto Q trazado en a) y traza una circunferencia.

RESULTADO: A este círculo se le llama **círculo inscrito**.

En el trazo de las bisectrices, quizá haya un pequeño rango de error, ya que el círculo inscrito puede cortar levemente a uno de los lados del triángulo, por lo que se sugiere hacerlo con mucha precisión.

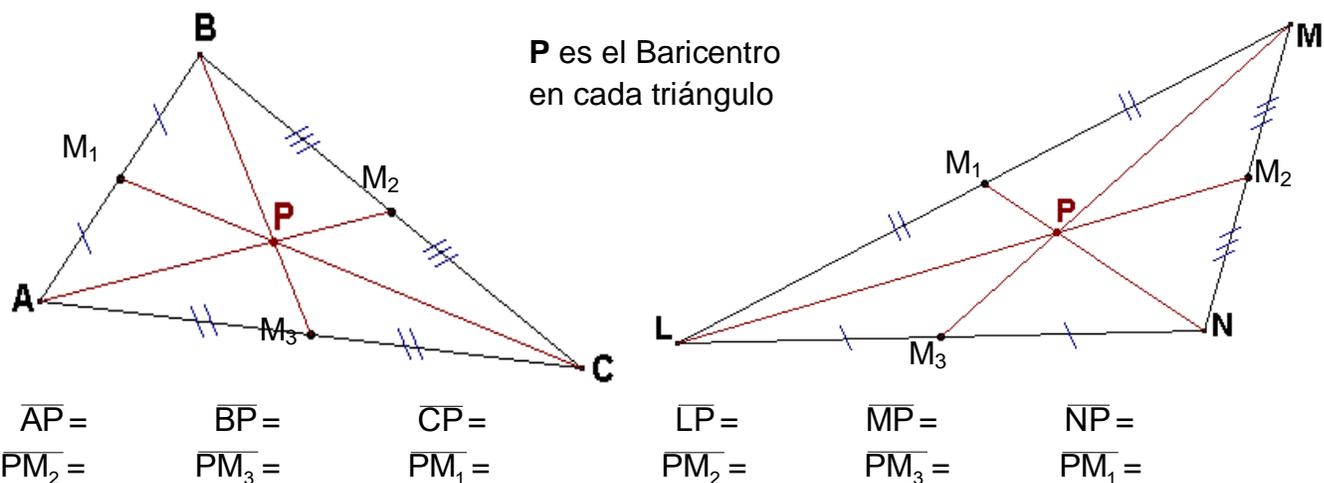
Una **mediana** de un triángulo es un segmento de recta que une el vértice de un triángulo con el punto medio del lado opuesto.



Actividad 6. Con regla no graduada y compás, traza un triángulo escaleno (llámalo LMN). Y traza sus **medianas**.

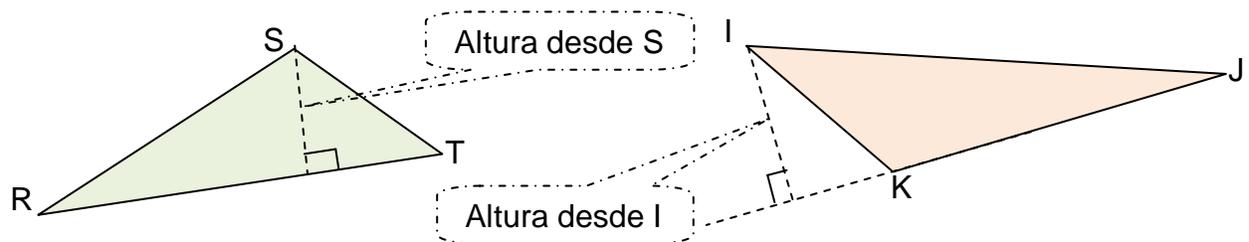
RESULTADO: Las tres **medianas** se cortan en un punto dentro del triángulo, el cual recibe el nombre de **baricentro** o también llamado gravicentro o centroide.

Actividad 7. En cada uno de los siguientes triángulos mide con regla los segmentos que se piden y escribe alguna conjetura.



RESULTADO: El baricentro divide a cada mediana en dos segmentos, el segmento que une el baricentro con el vértice mide el doble que el segmento que une el baricentro con el punto medio del lado opuesto.

La **altura** de un triángulo es un segmento de recta que va desde un vértice perpendicularmente hasta el lado opuesto o a su prolongación.



Actividad 8. Con regla no graduada y compás, traza un triángulo escaleno (llámalo Δ STU). Y traza sus **alturas**.

RESULTADO: Las tres **alturas** se cortan en un punto llamado **Ortocentro**.

El Ortocentro puede quedar dentro o fuera del triángulo.

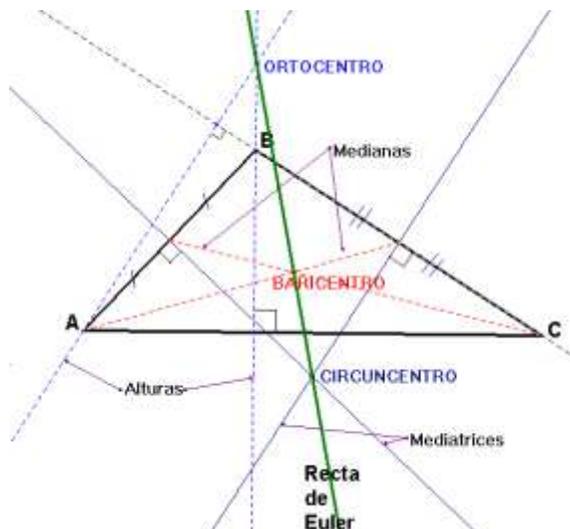
RESULTADO GENERAL:

Puntos notables de un triángulo: Circuncentro, Incentro, Baricentro y Ortocentro.

El Incentro y Baricentro siempre quedarán dentro del triángulo, mientras que el Circuncentro y el Ortocentro pueden quedar dentro o fuera del triángulo.

Actividad 9. Traza un triángulo escaleno y llámalo $\triangle ABC$. Traza su Baricentro, su Circuncentro y su Ortocentro. ¿Puedes trazar una línea recta que pase por los tres puntos?

Solución:



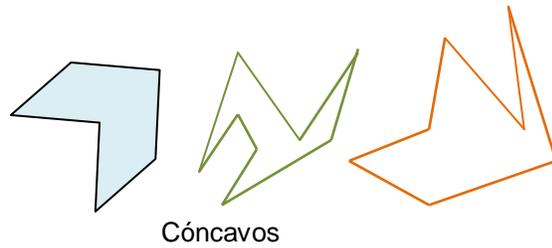
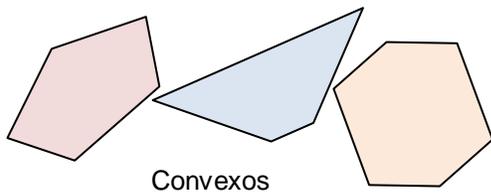
RESULTADO: El Ortocentro, el Baricentro y el Circuncentro de un triángulo no equilátero están alineados, es decir, pertenecen a la misma recta, llamada **recta de Euler**.

2.2.3 Reproducción de polígonos por triangulación.

Polígono es la superficie plana limitada por segmentos de recta. Estos segmentos son llamados lados, y los puntos en que se intersecan se llaman vértices.

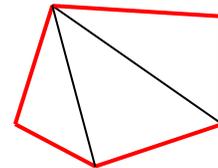
Según el número de sus lados, los polígonos se clasifican en: triángulo (tres lados); cuadrilátero (cuatro lados); pentágono (5 lados); hexágono (6 lados); heptágono (7 lados); etc.

Los polígonos pueden ser convexos o no convexos (cóncavos).

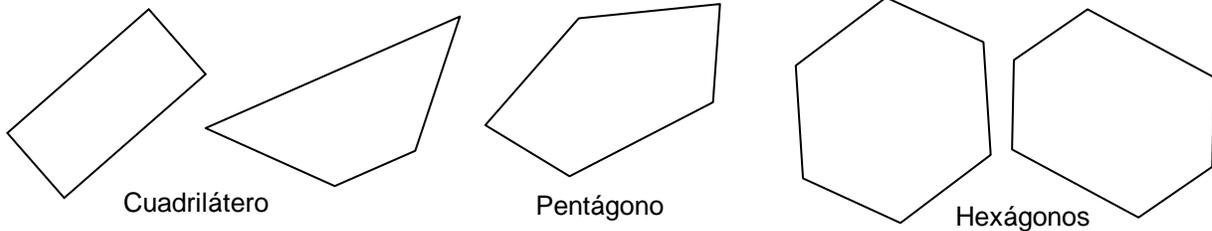


La triangulación de un polígono es la descomposición de éste en triángulos utilizando para ello el conjunto máximo de diagonales que no se intersecan.

Por ejemplo: una forma de triangular un pentágono se muestra en la figura del lado derecho.



Actividad 1. ¿Podrías descomponer los siguientes polígonos en triángulos?, trata de hacerlo y al terminar compara tus trazos con tus compañeros.



- ¿Todos hicieron la división en triángulos, de la misma forma?
- ¿En cuántos triángulos se descompuso cada polígono?

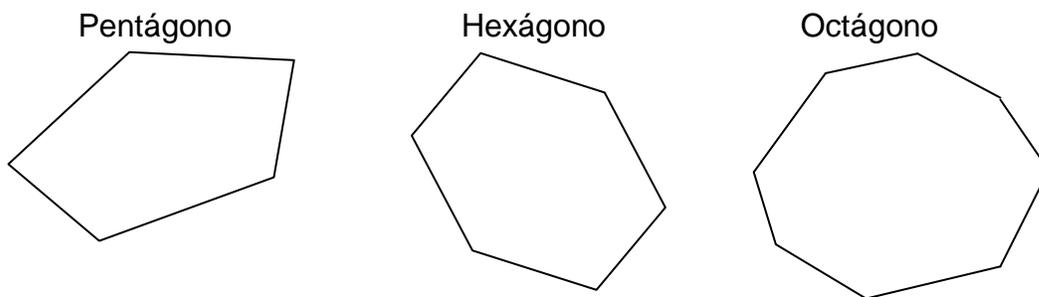
Los cuadriláteros en _____ triángulos, el pentágono en _____ triángulos y los hexágonos en _____ triángulos.

Actividad 2. Dibuja en tu cuaderno dos heptágonos (7 lados), dos octágonos (8 lados) y dos eneágonos (9 lados), triangularlos y completa lo siguiente:

Los heptágonos se descomponen en _____ triángulos, los octágonos en _____ triángulos y los eneágonos en _____ triángulos.

RESULTADO: La triangulación de un polígono no es única y toda triangulación de un polígono convexo con n lados o vértices consiste exactamente de $n - 2$ triángulos.

Actividad 3. Triangular las siguientes figuras y contesta lo que se pide.

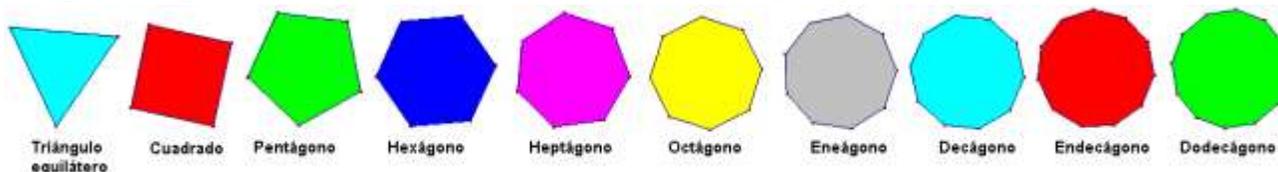


	Pentágono	Hexágono	Octágono
Número de triángulos en que se descompone.			
Suma de todos los ángulos interiores de los triángulos.			
Suma de los ángulos interiores de cada polígono.			
Suma de los ángulos exteriores de cada polígono.			

Si un polígono tiene 12 lados ¿cuánto mide la suma de sus ángulos interiores? ¿Cuánto mide la suma de sus ángulos exteriores?

¿Podrías generalizar este resultado para un polígono de n lados?

Polígono regular. Es aquel que tiene todos sus lados y ángulos iguales.



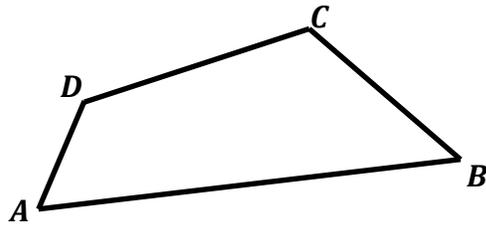
Actividad 4. En tu cuaderno traza un Heptágono regular y un Decágono regular, ¿cuánto mide cada uno de sus ángulos interiores?

¿Podrías generalizar este resultado para un polígono de n lados?

Algunas propiedades de los polígonos son:

- Un polígono de n lados tiene n vértices, n ángulos interiores y n ángulos exteriores.
- Al trazar diagonales desde un mismo vértice se forman $n - 2$ triángulos.
- La suma de los ángulos interiores es $180^\circ(n - 2)$.
- La suma de los ángulos exteriores es de 360° .

Ahora bien, cómo construyes o reproduces el siguiente polígono:



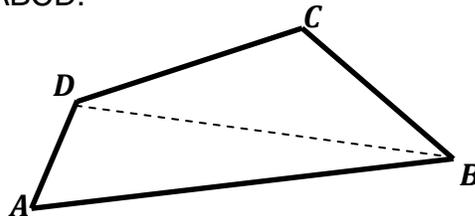
Reproducción de polígonos por triangulación.

Consiste en descomponer un polígono en triángulos (trazando de diagonales que no se intersequen), y reproduciendo cada uno de los triángulos por medio de sus lados.

Actividad 5. Reproduce el polígono anterior ABCD.

Solución:

1º) Se triangula el polígono ABCD, ejemplo:



2º) Se reproduce el $\triangle ABD$: se traza un segmento $A'B'$ congruente a AB , y terminas de trazarlo como ya se vio anteriormente.

3º) Ya construido el $\triangle A'B'C'$, sobre el lado $B'D'$ se reproduce el $\triangle BCD$.

EJERCICIOS 2.2

I. En cada caso, se dan las medidas de tres segmentos, menciona si con estos se puede formar un triángulo. Además, indica qué tipo de triángulo se forma con estas medidas.

- | | | | |
|------------|-------------|----------------|----------------|
| 1) 7, 7, 8 | 2) 12, 8, 4 | 3) 20, 15, 10 | 4) 5, 8, 15 |
| 5) 6, 3, 2 | 6) 4, 11, 5 | 7) 125, 36, 84 | 8) 26, 45, 220 |

9) Las longitudes de dos lados de un triángulo son 6 y 11 cm. Menciona un conjunto de posibles longitudes para el tercer lado de tal forma que SI se pueda formar el triángulo.

10) En el ejercicio 9), menciona un conjunto de posibles longitudes para el tercer lado de tal forma que NO se pueda formar el triángulo.

11) Trazar un triángulo equilátero.

12) Trazar un triángulo rectángulo.

13) Trazar un triángulo escaleno cuya base sea el segmento CD.



14) Trazar un ángulo con medida 120° .

15) Trazar un ángulo con medida 45° .

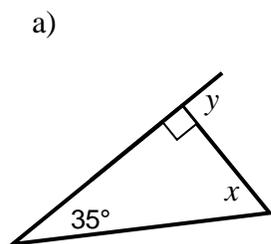
16) Trazar un ángulo de 105° .

17) Construye un triángulo donde sus ángulos sean de 90° , 75° y 15° .

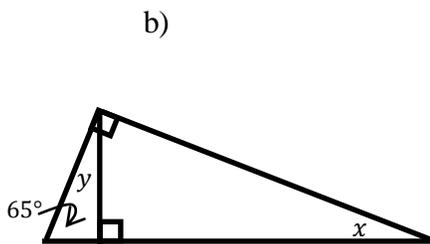
18) Dado un segmento $AB = 7\text{ cm}$ trazar un triángulo cuyos ángulos sean de 30° , 60° y 90° , para el cual dicho segmento sea el cateto que se opone al ángulo de 60° .

19) Dada una recta y un punto fuera de ella, trazar otra recta que pase por el punto y forme con la primera recta un ángulo de 30° .

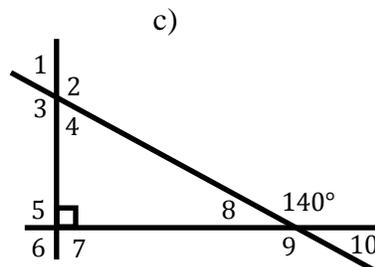
II. Usando las propiedades de los triángulos y de ángulos, en cada caso encuentra lo que se pide.



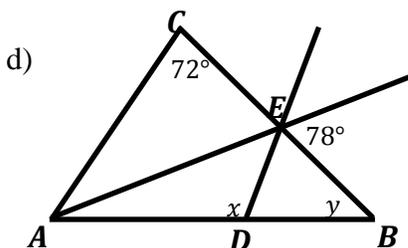
Hallar $\angle x$, $\angle y$



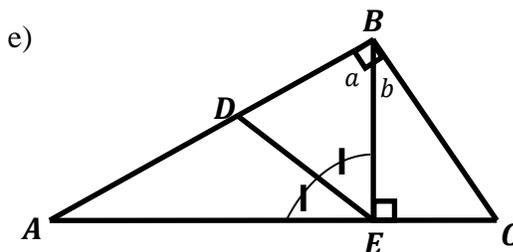
Hallar $\angle x$, $\angle y$



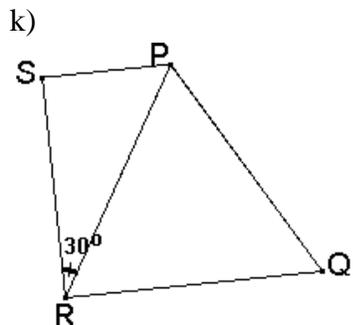
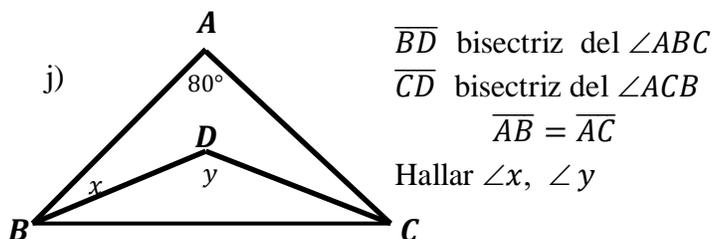
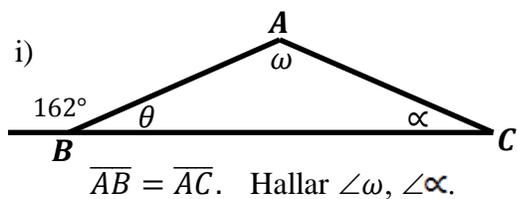
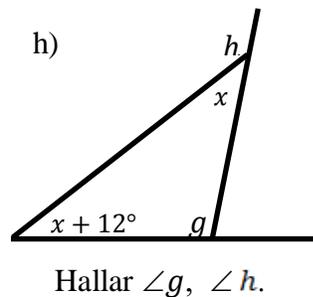
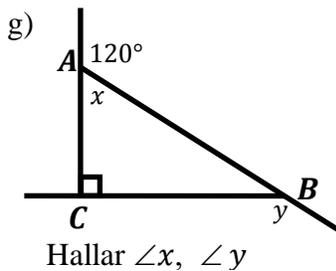
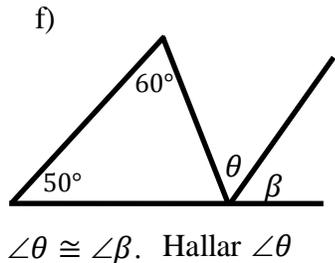
Hallar $\angle 1, 2, 3, \dots, 10$



\overline{AE} bisectriz de $\angle CAB$, \overline{ED} bisectriz de $\angle AEB$.
Hallar $\angle x$, $\angle y$.

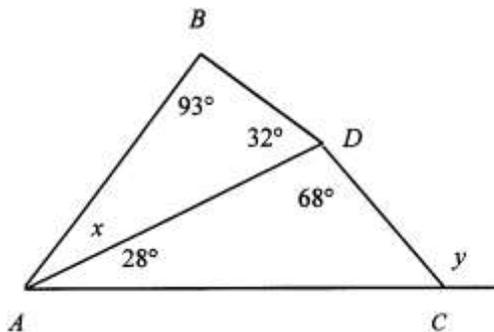


Si $\angle b = 42^\circ$. Hallar $\angle a$; $\angle AEB$; $\angle CED$

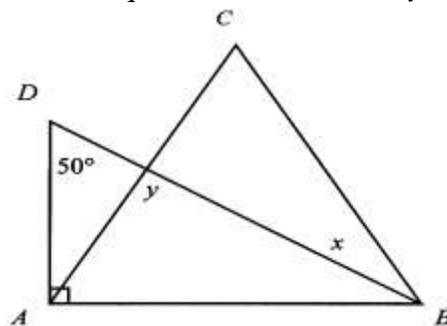


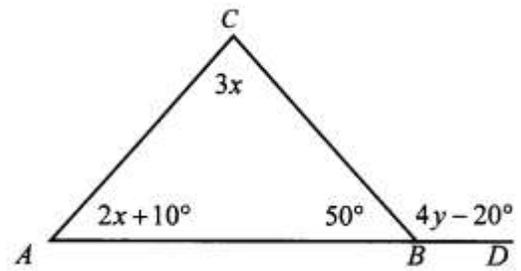
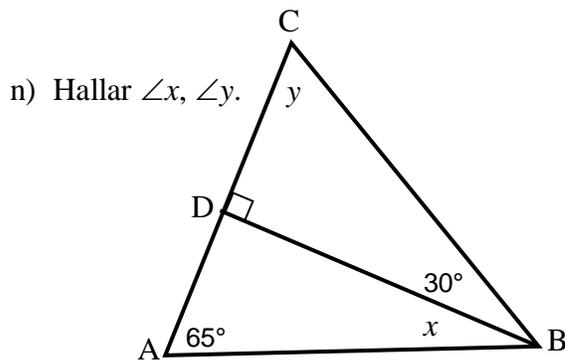
- 1) Si RQ es perpendicular a SR, ¿Cuánto mide $\angle PRQ$?
- 2) Si RQ = PQ, ¿cuánto mide $\angle RPQ$?
- 3) ¿Cuánto mide $\angle PQR$?
- 4) ¿Qué tipo de triángulo es PQR?

l) Hallar $\angle x$, $\angle y$.



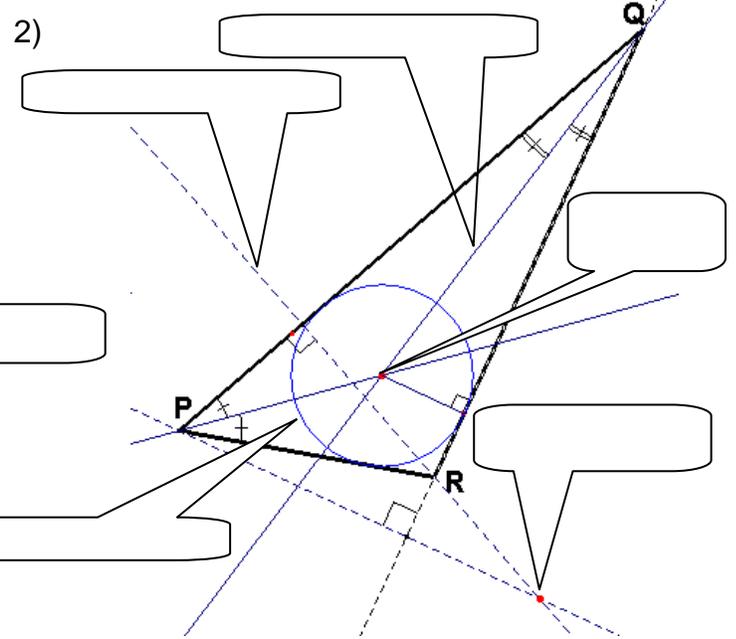
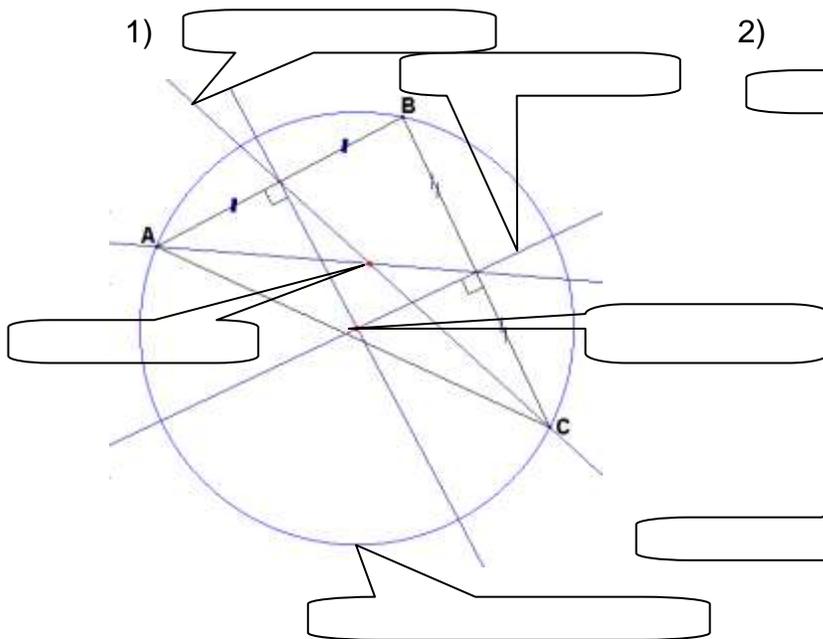
m) El ΔABC es equilátero, hallar $\angle x$, $\angle y$.





p) Hallar $\angle x$, $\angle y$.

III. En cada una de las siguientes figuras, escribe el nombre del trazo correspondiente.



3) Traza las rectas notables en un triángulo isósceles. ¿Qué pasa con las mediatrices, medianas, bisectrices y alturas?

4) Traza las rectas notables en un triángulo equilátero. ¿Qué pasa con las mediatrices, medianas, bisectrices y alturas?

IV. Usando las propiedades de los ángulos y polígonos, en cada caso encuentra lo que se pide.

1) ¿En cuántos triángulos dividen al polígono las diagonales trazadas desde uno de sus vértices?, si el polígono tiene:

a) 10 lados

b) 25 lados

c) 36 lados

2) Si un polígono tiene 20 lados, ¿cuánto mide la suma de sus ángulos interiores?

3) Si la suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono es de 7020° , ¿cuántos lados tiene el polígono?

4) Si un polígono regular tiene 18 lados, ¿cuánto mide cada uno de sus ángulos?

5) Si la suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono regular es de 3060° , ¿cuántos lados tiene y cuánto mide cada uno de los ángulos interiores del polígono regular?

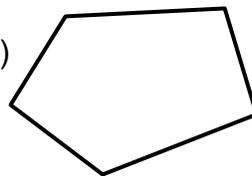
6) Si la suma de las medidas de 12 ángulos interiores de un polígono de 13 lados es de 1900° , ¿cuál es la medida del 13° ángulo interior?

7) ¿Cuáles son las medidas de los ángulos exteriores de un octágono regular y de un dodecágono regular?

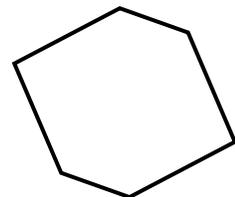
8) ¿Cuántos lados tiene un polígono regular si cada ángulo exterior mide 15° ?
¿Cuántos lados tendrá si cada ángulo exterior mide 18° ?

9) Encontrar el número de lados de un polígono si la suma de los ángulos interiores es el doble que la suma de sus ángulos exteriores.

10) Reproduce los siguientes polígonos. a)



b)



11) Con regla y compás traza un rectángulo con base el segmento AB y de ancho la mitad de AB.



2.3 CIRCUNFERENCIA: Rectas y Segmentos.

Una de las definiciones en los Elementos de Euclides es: Un **círculo** es una figura plana comprendida por una línea (que se llama circunferencia) tal que todas las rectas que caen sobre ella desde un punto que está dentro de la figura son iguales entre sí, y el punto se le llama centro del círculo⁸.

Usando un lenguaje coloquial se pueden definir de la siguiente forma:

Circunferencia. Es el conjunto de todos los puntos de un plano que están a la misma distancia de un punto fijo llamado centro.

Radio. Segmento que une un punto cualquiera de una circunferencia con su centro.

Ángulo central. Ángulo formado por dos radios.

Arco. Es una porción de la circunferencia y se representa con el símbolo \frown .

Cuerda. Segmento determinado por dos puntos de la circunferencia.

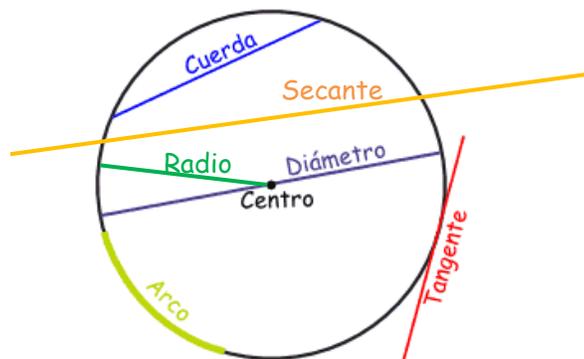
Diámetro. Es la cuerda mayor y pasa por el centro, es igual a la suma de dos radios.

Secante. Cualquier recta que corta a la circunferencia en dos puntos.

Tangente. Recta que toca a la circunferencia en un punto y sólo uno.

Semicircunferencia. Arco igual a la mitad de la circunferencia.

Longitud de la circunferencia. Es un ángulo de una vuelta, mide 360° .



2.3.1 Rectas tangentes a una circunferencia.

PROPOSICIÓN: Si una recta es tangente a una circunferencia o a un arco de circunferencia, entonces el radio trazado hasta el punto de tangencia es perpendicular a la tangente⁹.

⁸ Definición 15 y 16 de los Elementos de Euclides, L1.

⁹ Prop. 18 de los Elementos de Euclides, L-3

Esta proposición es muy importante para construir una tangente:

- a) Desde un punto sobre ella.
- b) Desde un punto fuera de ella.
- c) Localización del centro de una circunferencia dada.

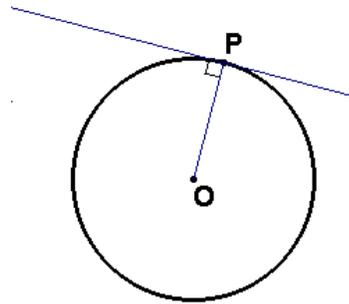
CONSTRUCCIONES:

- a) Trazar una recta tangente a una circunferencia, que pase por el punto P sobre ella.

CONSTRUCCIÓN:

Se traza una circunferencia con centro en O y se marca el punto P sobre ella. Luego se traza el radio OP.

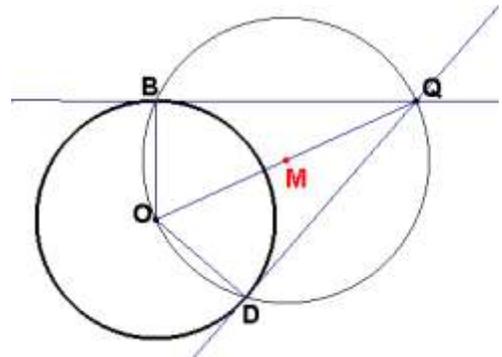
A este radio se le construye una perpendicular en su extremo P, la cual será la tangente deseada.



- b) Trazar una tangente a una circunferencia dada, que pase por un punto M fuera de ella.

CONSTRUCCIÓN:

Se traza una circunferencia con centro O y se marca un punto Q fuera de ella. Se traza un segmento de recta que una al punto Q con el centro O de la circunferencia. Se traza el punto medio M del segmento OQ, y con centro en M y radio igual a MQ, se traza un arco que corte a la circunferencia en los puntos B y D. Se unen los puntos Q con B o con el punto D, encontrando así la tangente deseada. Se puede deducir que hay dos tangentes a la circunferencia que pasan por Q.

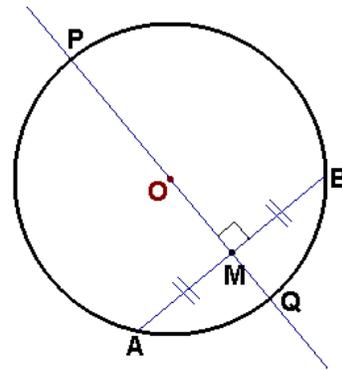


- c) Localización del centro de una circunferencia dada.

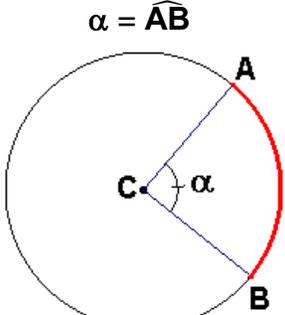
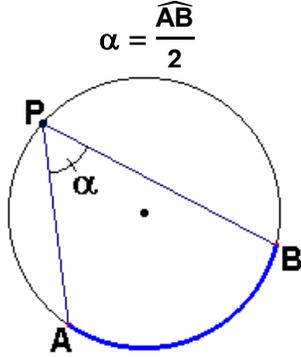
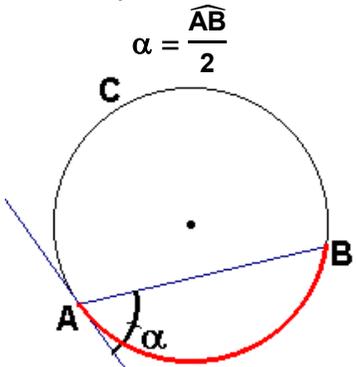
CONSTRUCCIÓN:

Se traza una circunferencia con cualquier radio.

Se traza una cuerda cualquiera AB y se localiza su punto medio M. Se traza una recta perpendicular a AB que pase por M (mediatriz), esta cortará a la circunferencia en los puntos P y Q. Se localiza el punto medio O de PQ, el cual será el centro del círculo.



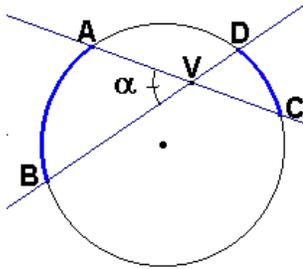
Para que el alumno tenga un mayor conocimiento sobre los ángulos, este es el momento indicado para trabajar los ángulos en una circunferencia. Este tema no se encuentra en la temática del Plan de Estudios, por tal razón, queda a criterio del profesor si lo aborda o no.

ÁNGULO CENTRAL	ÁNGULO INSCRITO	ÁNGULO SEMI-INSCRITO
<p>Su vértice es el centro de la circunferencia, y sus lados son dos radios. La medida de un ángulo central es la medida del arco que abarca.</p> <p style="text-align: center;">$\alpha = \widehat{AB}$</p>  <p>Ejemplo: Si $\widehat{AB} = 89^\circ$ $\alpha = 89^\circ$.</p>	<p>Su vértice se ubica sobre la circunferencia y sus lados son cuerdas. La medida de un ángulo inscrito es la mitad del arco que abarca.</p> <p style="text-align: center;">$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2}$</p>  <p>Ejemplo: Si $\widehat{AB} = 110^\circ$, $\alpha = 55^\circ$.</p>	<p>Su vértice se ubica sobre la circunferencia, un lado es cuerda y el otro una tangente a ella. La medida de un ángulo semi-inscrito es la mitad del arco que abarca.</p> <p style="text-align: center;">$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2}$</p>  <p>Ejemplo: Si $\widehat{AB} = 136^\circ$, $\alpha = 68^\circ$.</p>

ÁNGULO INTERIOR	ÁNGULO EXTERIOR
<p>Su vértice se ubica dentro de la circunferencia y sus lados son secantes a ella.</p>	<p>Su vértice se ubica al exterior de la circunferencia y sus lados son: secantes a ella, o uno tangente y otro secante, o tangentes a ella. La medida de un ángulo exterior es la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos que</p>

La medida de un ángulo interior es la mitad de la suma de las medidas de los arcos que abarcan sus lados.

$$\alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$$

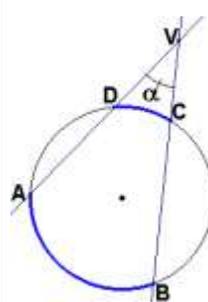


Ejemplo: Si $\widehat{AB} = 64^\circ$ y $\widehat{DC} = 50^\circ$,

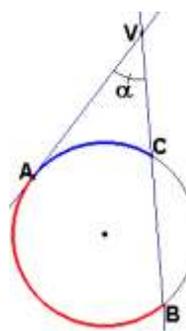
$$\alpha = \frac{64^\circ + 50^\circ}{2} = 57^\circ$$

abarcan sus lados y las prolongaciones de sus lados.

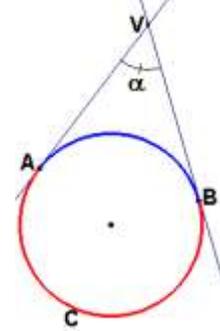
$$\alpha = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}$$



$$\alpha = \frac{\widehat{AB} - \widehat{AC}}{2}$$



$$\alpha = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{AB}}{2}$$



Ejemplo: Si $\widehat{AB} = 110^\circ$ y $\widehat{DC} = 25^\circ$,

$$\alpha = \frac{110^\circ - 25^\circ}{2} = \frac{85^\circ}{2} = 42.5^\circ$$

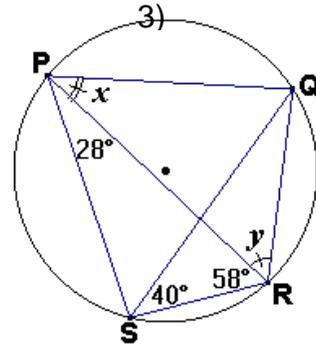
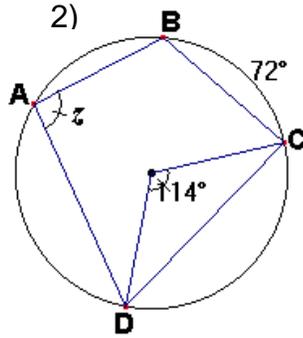
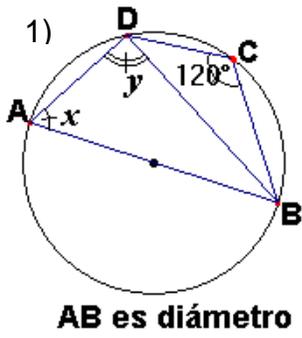
Algunas propiedades de la circunferencia son:

- 1) Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.
- 2) Toda recta tangente es perpendicular al radio en el punto de tangencia.
- 3) Desde un punto exterior a una circunferencia se pueden trazar dos tangentes a ésta, entonces los segmentos desde el punto de tangencia al punto exterior serán iguales.
- 4) Ángulos inscritos o semi-inscritos en una circunferencia que abarquen el mismo arco o arcos iguales, serán iguales entre sí.
- 5) En todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia los ángulos opuestos son suplementarios.
- 6) Arcos iguales en una circunferencia, subtienden cuerdas iguales.
- 7) Un radio o diámetro perpendicular a una cuerda, la corta a la mitad.

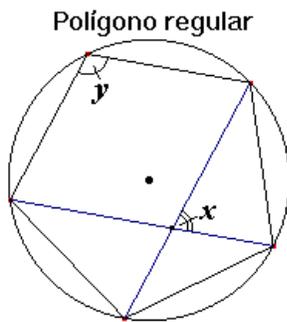
En esta parte se pueden trabajar algunos de los siguientes ejercicios.

EJERCICIOS 2.3

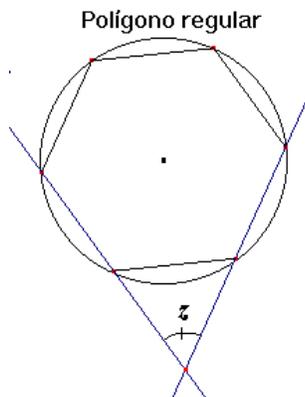
I. En cada figura calcular las medidas de los ángulos indicados con x , y ó z .



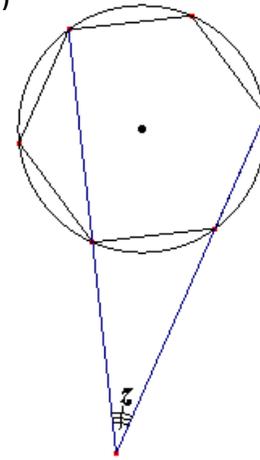
4)



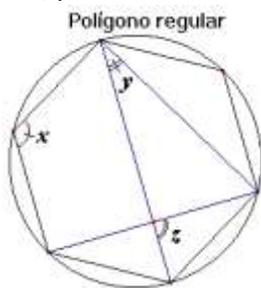
5)



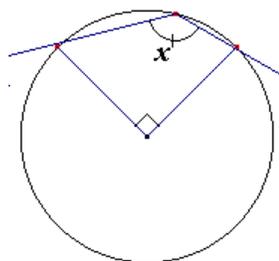
6) **Polígono regular**



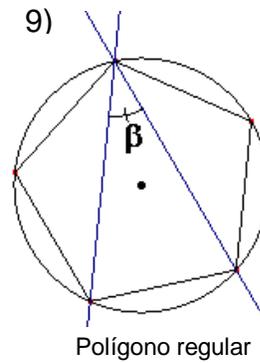
7)



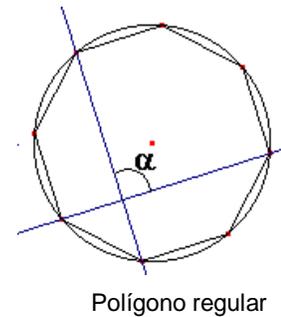
8)

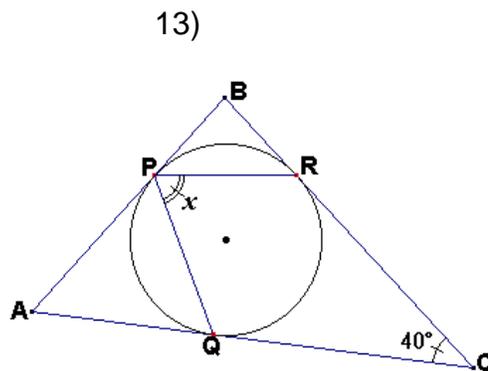
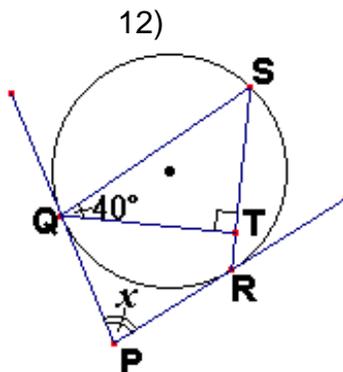
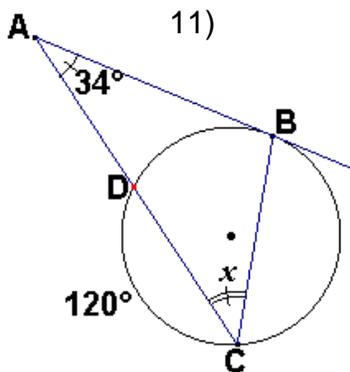


9)

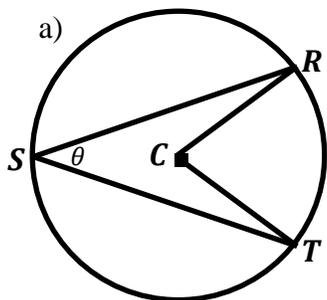


10)

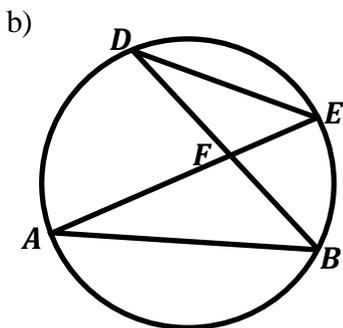




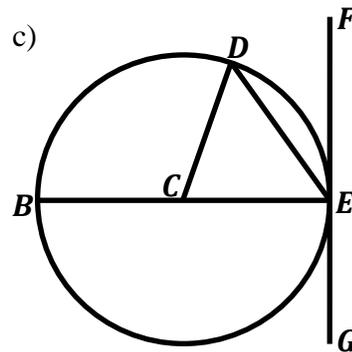
II. En cada caso encuentra lo que se pide.



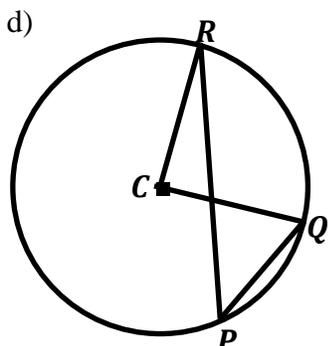
$\angle RCT = 80^\circ$
Hallar $\angle \theta$



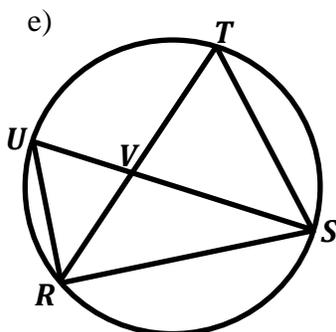
$\widehat{AD} = 100^\circ$; $\angle AFD = 80^\circ$
Hallar \widehat{BE}



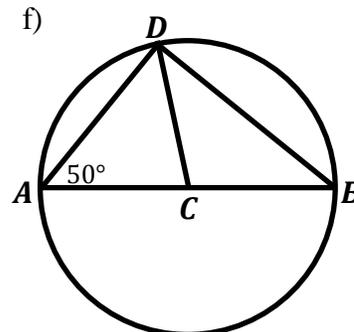
$\overline{FG} \perp$ al diámetro \overline{BE}
 $\angle BCD = 110^\circ$
Hallar $\angle DEF$



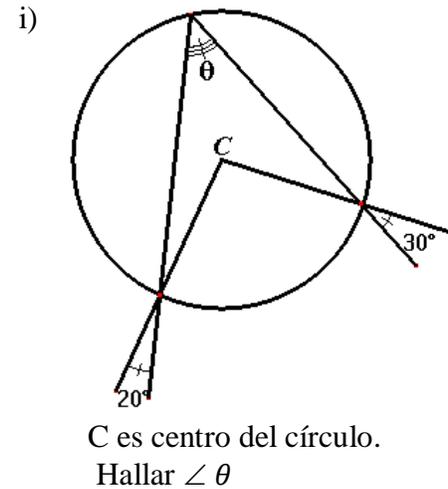
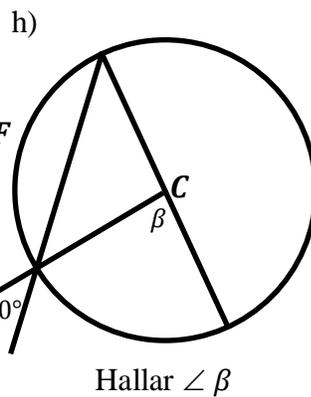
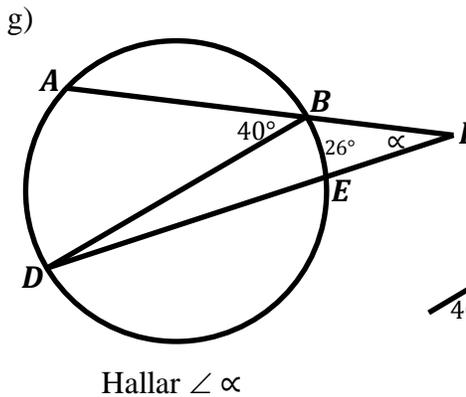
$\angle RCQ = 80^\circ$
Hallar $\angle RPQ$



\overline{US} biseca a $\angle RST$
 $\widehat{RS} = 120^\circ$; $\widehat{UR} = 62^\circ$
Hallar $\angle TVS$; \widehat{TS}



\overline{AB} diámetro
Hallar $\angle CBD$



2.4 Reproducción de un triángulo a partir de condiciones dadas (LAL, LLL, ALA)

Es bueno recalcar que no cualesquiera tres longitudes forman un triángulo, ya que estas deben de cumplir “la suma de las longitudes de dos lados de un triángulo debe ser mayor que la longitud del tercer lado”.

Una actividad muy útil para que el alumno haga observaciones y conjeturas sobre la longitud tanto de lados como de ángulos en un triángulo, es la siguiente.

Materiales: Hoja de papel, tijeras, regla graduada, compás y lápiz.

Se pide trazar y recortar 5 triángulos con las siguientes medidas:

$\triangle ABC$: Con $AB = 9$ cm, $BC = 7$ cm y $AC = 4$ cm

$\triangle DEF$: Con $DE = 8$ cm, $EF = 10$ cm y $\angle DEF = 40^\circ$.

$\triangle GHI$: Con $GH = 12$ cm, $\angle IGH = 50^\circ$ y $\angle GHI = 65^\circ$.

$\triangle PQR$: Con $PQ = 11$ cm, $QR = 8$ cm y $\angle PRQ = 60^\circ$.

$\triangle STU$: Con $\angle STU = 45^\circ$, $\angle TUS = 60^\circ$ y $\angle UST = 75^\circ$.

Sugerencia: Es recomendable dejar esta actividad extra clase.

Ya que los alumnos tienen sus triángulos recortados, en la clase:

1º) Indica que comparen el $\triangle ABC$, sobreponiendo. Finalmente, pide a todos los alumnos sus triángulos y sobreponlos, haciendo la observación de que todos sus

elementos tienen la misma medida, a pesar de que fueron construidos con materiales diferentes.

En ese momento se pueden corregir algunos errores que surjan en el trazo del $\triangle ABC$.

2º) De forma similar trabaja con los triángulos $\triangle DEF$ y $\triangle GHI$.

3º) Cuando se hace lo mismo con el $\triangle PQR$ y $\triangle STU$, hacer ver que no todos tendrán sus 6 elementos con la misma medida.

Con esto, el alumno concibe que no con cualesquiera tres medidas dadas se pueden obtener triángulos congruentes. Dando pie a la introducción del concepto de “Congruencia: misma forma y mismo tamaño”, donde sólo se obtienen cuando se dan las medidas de LLL, LAL y ALA, tres criterios que se abordarán con mayor detalle en la siguiente unidad.

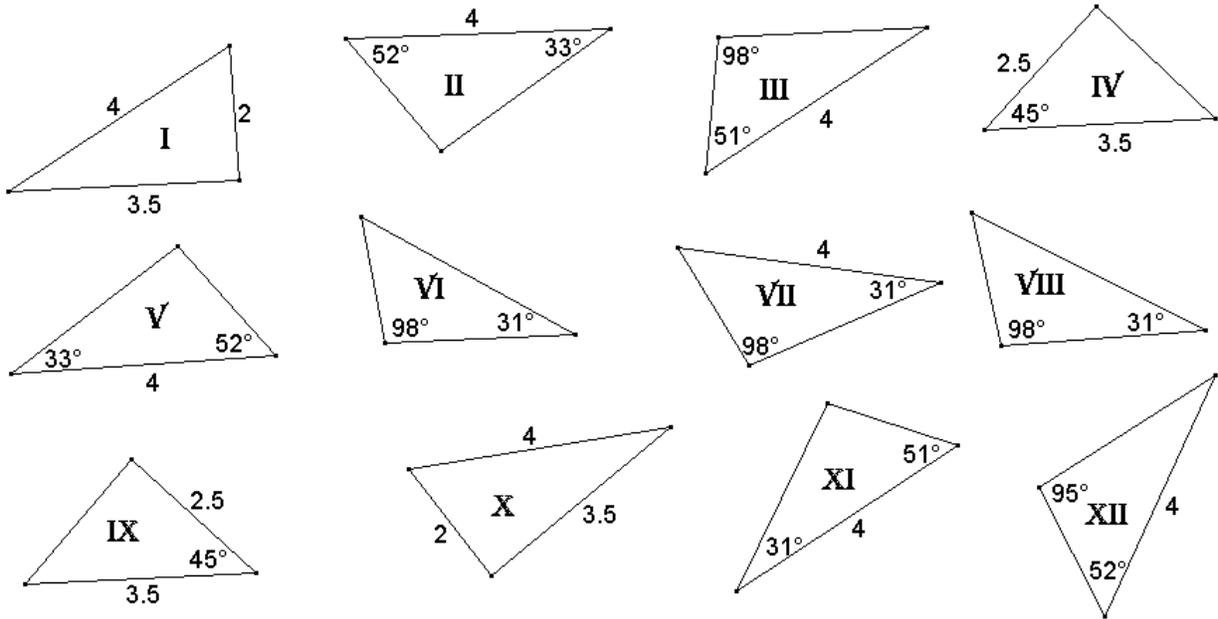
EJERCICIOS 2.4

I. Trazar y recortar los siguientes triángulos con las siguientes medidas:

- 1) $\triangle LMN$: Con $LM = 5$ cm, $MN = 9$ cm y $NL = 11$ cm.
- 2) $\triangle JKL$: Con $JK = 7$ cm y $KL = 10$ cm.
- 3) $\triangle FGH$: Con $FG = 10$ cm, $\angle GFH = 70^\circ$ y $\angle FGH = 45^\circ$.
- 4) $\triangle QRS$: Con $QR = 8$ cm, $QS = 6$ cm y $\angle SRQ = 50^\circ$.
- 5) $\triangle BCD$: Con $\angle BCD = 55^\circ$, $\angle CDB = 60^\circ$ y $\angle DBC = 65^\circ$.

En la clase, sobreponiéndolos, comprobar con tus compañeros la forma y el tamaño de los triángulos.

II. Dados los siguientes triángulos, asocia aquellos que son congruentes por la medida de sus elementos (LLL, LAL ó ALA), indicando la opción elegida.



Identificación de puntos problemáticos y propuestas de solución.

	PUNTOS PROBLEMÁTICOS	PROPUESTA DE SOLUCIÓN
2.1 CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS	<p>Al ser un tema diferente a lo que están acostumbrados, se les dificulta mucho a los alumnos. Esto porque involucra tanto lenguaje y acciones nuevas, como la manipulación de la regla no graduada y el compás, donde tiene que hacer un razonamiento geométrico al cual no están acostumbrados.</p> <p>Les cuesta mucho trabajo explicar sus construcciones, y sobre todo, las justificaciones de sus actividades.</p>	<p>Dar un repaso de los elementos necesarios a pesar de ser muy básicos, haciendo hincapié en el lenguaje geométrico. Escribir con detalle en el pizarrón la forma en que debe de explicarse las construcciones con regla y compás. Dejar tareas donde practiquen ejercicios sencillos para acostumbrarlos al lenguaje y visualización geométrica. Señalarle puntualmente al estudiante, los recursos matemáticos que debe tener para un buen desempeño en el tema.</p> <p>Apoyarnos con recursos de internet dando direcciones de algunas páginas Web donde hay videos del tema, por ejemplo:</p> <p>http://www.youtube.com/watch?v=QNrQCT9N6rQ&list=PLgZEwwjOo0OpfojR_cw8wxgOkXP0p12aR</p> <p>http://www.youtube.com/watch?v=rKpSeftVe6w</p> <p>http://www.youtube.com/watch?v=wXCb_UexSM</p> <p>Otro recurso de apoyo es usar el software de Cabri, Geogebra o Geometer's Sketchpad u otros parecidos, que ayudan mucho a la visualización y comprensión de los conceptos.</p>
2.2 TRIÁNGULOS	<p>En las propiedades de un triángulo no hay mucho problema, pero si las hay con la mediatriz, altura y mediana. Ya que las confunden y olvidan con facilidad la definición de cada una. También continúan las dificultades en escribir las justificaciones de</p>	<p>Hacer mucho énfasis en cada una de las propiedades de la mediatriz, mediana y altura, haciendo ver las similitudes y diferencias.</p> <p>Dejar varios ejercicios de tarea donde hagan los trazos de cada una para reforzar sus propiedades, mostrando con marcas iguales sus elementos iguales, por ejemplo, la misma marca a segmentos o ángulos iguales; cuando hay ángulo de 90° marcar el rectángulo que lo caracteriza, etc.</p> <p>Efectúe un desarrollo detallado en el pizarrón de los procesos tanto geométricos como algebraicos correspondientes a cada ejercicio mostrado en</p>

	<p>sus afirmaciones lo cual impide ver las propiedades que utilizan.</p>	<p>clases.</p> <p>Otro recurso que se debe aprovechar son las asesorías que ofrece el Colegio como apoyo a los alumnos con mayores dificultades. Algunos videos en las siguientes direcciones también son de gran apoyo.</p> <p>http://math2me.com/playlist/geometria/puntos-notables-en-un-trianguulo</p> <p>http://math2me.com/playlist/geometria/mediatriz-punto-notable-de-un-trianguulo</p> <p>http://math2me.com/playlist/geometria/mediana-punto-notable-de-un-trianguulo</p> <p>http://math2me.com/playlist/geometria/altura-punto-notable-de-un-trianguulo</p>
<p>2.3</p> <p>CIRCUNFERENCIA</p>	<p>En este tema, el mayor problema es la visualización de los ángulos en una circunferencia, y siguen sin justificar sus afirmaciones. Resuelven los ejercicios correctamente pero no explican las propiedades que utilizan o el porqué de sus afirmaciones.</p>	<p>Hacer ver con detalle y utilizar colores para que el alumno tenga una mayor visualización de los elementos que se involucran al resolver los ejercicios en la clase; dejar varios ejercicios de tarea y volver hacer énfasis en la explicación del porqué de sus afirmaciones.</p> <p>Algunos de los siguientes videos pueden ser de gran ayuda.</p> <p>http://www.youtube.com/watch?v=htIbCYFSyzk</p> <p>http://www.youtube.com/watch?v=THNMV2MsVxg</p> <p>http://www.youtube.com/watch?v=UvrXoc-UQ-w</p> <p>http://www.youtube.com/watch?v=np9b-xNOegc</p>
<p>2.4</p> <p>Reproducción de un triángulo a partir de condiciones dadas (LAL, LLL, ALA)</p>	<p>Este tema no presenta muchas dificultades, ya que se trabaja con visualización y sólo verifican si se cumplen las condiciones dadas.</p>	<p>Es recomendable dejar varios ejercicios donde practiquen las condiciones dadas para facilitar los aprendizajes de la siguiente unidad.</p>

Bibliografía básica y complementaria

Barnett, Rich. *Geometría Plana con Coordenadas*. Serie Schaum-s, Editorial macgraw hill, México, 1982.

Clemens, Stanley *et al*, *Geometría con Aplicaciones y Solución de Problemas*, Addison Wesley, México, 1989.

Euclides, *Elementos de Geometría I - II*, versión de Juan D. García Bacca, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, 1992.

García, Jesús y Bertrán, Celesti. *Geometría y Experiencias, Recursos Didácticos*, Alhambra, Addison-Wesley Longman, México, 1998.

Miller, Charles *et al*. *Matemática: Razonamiento y Aplicaciones*, Addison Wesley Longman, México, 1999

Wentworth, J.; Smith, D. *Geometría plana y del espacio*. Ed. Porrúa. 24a. Ed. 1997.

Páginas Web, vistas el 28 de septiembre de 2014:

http://www.youtube.com/watch?v=QNrQCT9N6rQ&list=PLgZEwwjOo0OpfojR_cw8wxgOkXP0p12aR

<http://www.youtube.com/watch?v=rKpSeftVe6w>

http://www.youtube.com/watch?v=wXCb_UexSM

<http://math2me.com/playlist/geometria/puntos-notables-en-un-triangulo>

<http://math2me.com/playlist/geometria/mediatriz-punto-notable-de-un-triangulo>

<http://math2me.com/playlist/geometria/mediana-punto-notable-de-un-triangulo>

<http://math2me.com/playlist/geometria/altura-punto-notable-de-un-triangulo>

<http://www.youtube.com/watch?v=htlbCYFSyzk>

<http://www.youtube.com/watch?v=THNMV2MsVxg>

<http://www.youtube.com/watch?v=Uvrxoc-UQ-w>

<http://www.youtube.com/watch?v=np9b-xNOegc>