



COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PLANTEL ORIENTE



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
AGOSTO 2017



COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
PLANTEL ORIENTE



**ELABORADO POR LOS
PROFESORES:**

**Ferman Arellano Cabezas
Genoveva Olguín Ramírez
María Victoria Popoca Yáñez
Sergio Ortiz Antonio**

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
AGOSTO 2017**

ÍNDICE

Introducción.		i
Presentación.		ii
Instrucciones de uso .		iv
Unidad 1.	Ecuaciones cuadráticas.	
	Propósitos y contenido.	1
	Presentación.	2
	1.1 Problemas que dan lugar a funciones cuadráticas con una incógnita.	3
	1.2 Resolución de ecuaciones cuadráticas de las formas: $x^2 = c$, $ax^2 = c$, $ax^2 + c = d$, $ax^2 + bx = 0$, $a(x+b)^2 + c = d$, $(x+b)(x+c) = 0$	14
	1.2.1 Ecuaciones de la forma $x^2 = c$ equivalentes a $x^2 - c = 0$	14
	1.2.2 Ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$	17
	1.2.3 Ecuaciones de la forma $ax^2 + c = d$	19
	1.2.4 Ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$	22
	1.2.5 Ecuaciones de la forma $a(x + b)^2 + c = d$.	25
	1.2.6 Ecuaciones de la forma $(x + b)(x + c) = 0$	28
	1.3 Resolución de la ecuación cuadrática completa $ax^2 + bx + c = 0$.	31
	1.3.1 Método por Factorización.	32
	1.3.2 Método de Completar Trinomio Cuadrado Perfecto.	37
	1.3.3 Método por Fórmula General.	42
	1.3.3.1 Análisis del discriminante $b^2 - 4ac$.	47
	1.4 Aplicaciones de la Ecuación Cuadrática.	59
	Autoevaluación.	59
	Bibliografía.	60
	Anexo: ¿Quién tiene?, Yo tengo, de ecuaciones cuadráticas.	61
Unidad 2.	Funciones Cuadráticas.	
	Propósitos y contenido.	75
	Presentación.	76
	2.1 Situaciones que involucran cambio y que dan origen a funciones cuadráticas.	77
	2.2 Estudio gráfico, analítico y contextual de la función: $y = ax^2 + bx + c$, en particular: $y = ax^2$; $y = ax^2 + c$; $y = a(x - h)^2 + k$	89
	2.3 Forma estándar $y = a(x - h)^2 + k$.	105
	2.4 Ceros de la función.	108
	2.5 La función $y = ax^2 + bx + c$ y sus propiedades gráficas.	116
	2.5.1 Simetría, concavidad, máximo o mínimo.	116
	2.6 Problemas de aplicación.	121
	Autoevaluación.	128
	Bibliografía.	129

	Anexo: Memorama de Funciones Cuadráticas.	130
Unidad 3.	Elementos básicos de geometría plana.	
	Propósitos y contenido.	136
	Presentación.	138
	3.1 Bosquejo histórico de la geometría.	139
	3.2 Elementos básicos de geometría plana: punto, línea recta, segmento, semirrecta, ángulo, punto de intersección, etcétera.	144
	3.3 Construcciones con regla y compás.	147
	3.4 Ángulos.	156
	3.4.1 Ángulos alternos internos, alternos externos, correspondientes. Postulado de las rectas paralelas y su inverso.	160
	3.4.2 Problemas de aplicación.	163
	3.5 Triángulos: desigualdad del triángulo y la clasificación de los triángulos.	167
	3.5.1 Propiedades del triángulo: La suma de los ángulos interiores es igual a 180°; la suma de los ángulos exteriores es igual a 360°; la suma de dos ángulos interiores es igual al exterior no adyacente.	168
	3.5.2 Propiedades de un triángulo isósceles.	170
	3.5.3 Problemas de aplicación.	172
	3.5.4 Rectas y puntos notables en el triángulo.	175
	3.5.5 Distancia de un punto a una recta.	179
	3.6 Polígonos.	180
	3.6.1 Perímetro y área; fórmula de Herón.	185
	3.7 Círculo y Circunferencia: Rectas y segmentos, localización del centro de una circunferencia, perímetro y área del círculo.	195
	3.7.1 Problemas de aplicación.	200
	Autoevaluación.	205
	Bibliografía.	206
	Anexo: Cadena de geometría elemental.	207
Unidad 4.	Congruencia, Semejanza y Teorema de Pitágoras.	
	Propósitos y contenido.	212
	Presentación.	214
	4.1 Congruencia.	215
	4.1.1 Notación.	215
	4.1.2 Congruencia.	216
	4.1.3 Figuras congruentes.	217
	4.2 Congruencia de triángulos.	219
	4.2.1 Criterios de congruencia de triángulos.	220
	4.2.2 Justificación de algunas construcciones.	228
	4.2.3 Problemas de aplicación.	233
	4.3 Semejanza y Teorema de Pitágoras.	238

	4.3.1 Notación.	238
	4.3.2 Semejanza.	238
	4.3.3 Criterios de semejanza de triángulos.	240
	4.3.4 Razón entre perímetros y entre áreas de triángulos semejantes.	245
	4.3.5 Problemas de aplicación.	248
	4.3.6 Teorema de Thales y su recíproco.	251
	Teorema de la altura de un triángulo rectángulo. Justificación.	253
	4.3.7 Teorema de Pitágoras y su recíproco. Justificación.	255
	Recíproco del Teorema de Pitágoras.	257
	4.3.8 Problemas de longitudes y áreas que involucran semejanza, congruencia, y Teorema de Pitágoras.	262
	Autoevaluación.	270
	Bibliografía.	271
	Anexo: Bingo de congruencia.	272



COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES



INTRODUCCIÓN

El presente paquete didáctico se elaboró basado en los contenidos y enfoques tanto disciplinario como didáctico que integran el Programa de Estudios de Matemáticas II actualizado de la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades, que pretende apoyar tanto al profesor, pero principalmente al alumno. El propósito es orientar y facilitar el desarrollo del curso de Matemáticas II, en el cual se abordan los conceptos de *ecuaciones cuadráticas, funciones cuadráticas, elementos básicos de geometría plana, congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras*. En la elaboración de este material se plasma la experiencia de los profesores del grupo, así como el apoyo de bibliografía correspondiente.

Este curso constituye un momento de preparación tanto en lo temático como en lo metodológico, ya que las cuatro unidades que se trabajan en este curso, corresponden a **los ejes de Funciones y Geometría Euclidiana**; sin embargo, el Álgebra se sigue trabajando a través de los contenidos de estas unidades, y, por otra parte, se sientan los cimientos para abordar la temática correspondiente a la Geometría Analítica que se estudiará en el semestre siguiente. Un estudiante, sólo podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento, por tal motivo, el tratamiento de los contenidos del presente material está enfocado a ir entrelazando nuevos conocimientos desde los más sencillos a otros con mayor complejidad, con diversas actividades tratando de que el alumno se apropie del conocimiento. Se está pensando en un manejo dinámico de los contenidos que contribuyan a que el alumno logre ser un sujeto capaz de buscar y adquirir por sí

mismo nuevos conocimientos, además de analizar e interpretar el mundo que lo rodea de manera reflexiva, analítica, sistemática y constructiva.

PRESENTACIÓN

Este material está diseñado para apoyar al alumno supervisado por su profesor, con el objetivo de lograr los propósitos estipulados en el Programa de Estudios actualizado, es un conjunto estructurado de materiales necesarios para la enseñanza aprendizaje adecuados al nivel y profundidad de los contenidos cognoscitivos, procedimentales y actitudinales.

Este paquete didáctico contiene diferentes estrategias didácticas que puede usar el alumno guiado por su profesor, por tal razón se sugieren ejemplos y ejercicios para trabajar en el salón de clases en forma de taller, actividades con el uso de Internet, series de ejercicios y actividades lúdicas. De tal forma que el profesor puede elegir e indicar cuáles, cuándo y cómo utilizarlas para que el alumno logre adquirir los conocimientos necesarios del curso.

La estructura del paquete didáctico es la siguiente:

- a) Introducción e indicaciones para su utilización.
- b) Presentación por unidad, indicando sus contenidos y propósitos.
- c) Sugerencias de actividades de aprendizaje y estrategias didácticas.
- d) Actividades de enseñanza aprendizaje.
- e) Sugerencias de autoevaluación.
- f) Bibliografía y cualquier otro elemento que facilite el impartir la asignatura.

Los propósitos y aprendizajes de cada unidad son los esperados de acuerdo al Programa de Estudios actualizado, se enuncian los conocimientos relevantes dirigidos al alumno, y se van haciendo varias sugerencias al mismo.

En los anexos que están al final de cada unidad, hacemos sugerencias de algunos juegos didácticos con sus instrucciones de construcción y uso, son materiales de apoyo extra que el profesor decide cuáles y en qué momento aplicarlos.

Por la naturaleza de la asignatura, el trabajo gráfico es muy abundante, por lo que se sugiere el uso de un software como: Cabri, Geometer Sketchpad, Geogebra, etc, para auxiliarse o comprobar algunas construcciones geométricas.

Hemos detectado, como en todos los cursos, que esta materia también tiene sus puntos conflictivos, los cuales se van señalando a lo largo del material y se hacen sugerencias para un tratamiento que logre superarlos. Esta es una de las razones por la cual se sugieren diferentes actividades y estrategias didácticas para trabajar los conceptos involucrados en la asignatura, el profesor decidirá cuales trabajar según lo requieran sus alumnos.

Esperamos que este material cumpla con su principal objetivo que es el de ayudar a los alumnos a mejorar su aprendizaje y al profesor mostrarle una variedad de materiales que puede utilizar en el curso de matemáticas II, sacándole el mejor provecho y haciéndonos llegar sus comentarios y sugerencias para mejorarlo.

Atentamente:
Los autores.

INSTRUCCIONES PARA SU UTILIZACIÓN.

Sugerencias al estudiante:

El uso de este material te ayudará a prepararte para acreditar la materia, sin embargo, se requiere que tú mismo estés dispuesto mentalmente para un periodo de estudio en el cual debes poner todo tu esfuerzo. Este material contiene una serie de elementos didácticos que te permitirán realizar tu estudio por tu cuenta o guiado por tu profesor, ya que él te indicará lo que debes de trabajar según la metodología que utilice.

Según sea el caso, para que logres adaptarte a esta forma de estudio, es necesario que tomes en cuenta las siguientes sugerencias, las cuales te ayudarán a modificar algunos hábitos:

- ✓ Trata de compartir el esfuerzo con tus familiares y amigos para que tengan conocimiento de tu situación y te apoyen respetando tus periodos de estudio.
- ✓ Prepárate para trabajar varias horas seguidas, pero dedica 5 o 10 minutos de descanso entre cada hora que estudies, si te sientes cansado.
- ✓ Busca un lugar tranquilo, bien iluminado y ventilado para trabajar.
- ✓ Una bebida o caminata puede renovar tu ánimo.
- ✓ Selecciona el horario en que te encuentres menos cansado.

También es importante que realices los siguientes pasos para que logres organizar poco a poco tu estudio:

- 1) Lee cuidadosamente las instrucciones y la explicación de la importancia de este material.
- 2) Revisa los aprendizajes ya que te indican los conocimientos y habilidades que deberás adquirir y desarrollar en el estudio de cada unidad.

- 3) Estudia los conceptos preliminares para cada unidad, siguiendo con cuidado los ejemplos o actividades que se te presentan y contesta lo que se te pide.
- 4) Realiza los ejercicios que están intercalados en cada tema. A veces te parecerá que son demasiados, o que son prácticamente iguales, pero no es así, los ejercicios propuestos han sido diseñados pensando en las dificultades que se te pueden presentar, de manera que no los saltes, aunque pareciera que ya no es necesario resolverlos.
- 5) Compara tus resultados con tus compañeros y si es necesario consulta algún profesor o asiste a las asesorías del plantel (PIA).
- 6) Si no obtuviste la solución correcta, trata de encontrar tus errores e intenta resolver nuevamente el ejercicio.
- 7) Cuando tengas alguna duda anótala y consulta con algún profesor.
- 8) Resuelve el examen de auto evaluación, sin consultar el contenido de la unidad.
- 9) En cada autoevaluación se incluye la escala de calificaciones, toma muy en cuenta las recomendaciones dadas.

Estamos seguros que con el esfuerzo de todos lograrás acreditar la materia.

¡ A D E L A N T E !