Matemáticas II

Unidad 1. Ecuaciones cuadráticas

PROPÓSITOS DE LA UNIDAD:

✍*Al finalizar, el alumno:*

Resolverá ecuaciones cuadráticas mediante diversos métodos de solución. Modelará problemas que conduzcan a este tipo de ecuaciones. Establecerá la relación que existe entre el grado de la ecuación y el número de soluciones.

Tiempo:15 horas

CONTENIDO

1.1 Problemas que dan lugar a ecuaciones cuadráticas con una incógnita.

1.2 Resolución de ecuaciones cuadráticas de la forma:

- 1.2.1 $x^2 = c$.
- 1.2.2 $ax^2 = c$.
- 1.2.3 $ax^2 + c = d$.
- 1.2.4 $ax^2 + bx = 0$.
- 1.2.5 $a(x + m)^2 = n$.
- 1.2.6 $(ax + b)(cx + d)=0$.

1.3 Métodos de solución de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$

- 1.3.1 Factorización.
- 1.3.2 Método de completar un trinomio cuadrado perfecto.
- 1.3.3 Fórmula general para resolver una ecuación cuadrática.
  - 1.3.3.1 Discriminante $b^2 - 4ac$ y naturaleza de las raíces.

1.4 Problemas de aplicación.

Autoevaluación.

Bibliografía.

PRESENTACIÓN

Sabemos que te has enfrentado a muchas dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, no eres el único, ya que esta problemática se presenta en la mayoría de los estudiantes, por ejemplo, al empezar la historia de "El Diablo de los Números", precisamente se habla de la problemática del lenguaje matemático, léelo por ti mismo:

> "En los sueños, todo es diferente al colegio o a la ciencia. Cuando Robert y el diablo de los números hablan, se expresan a veces de forma bastante extraña. Tampoco esto es sorprendente, pues *El diablo de los números* es precisamente una extraña historia.
>
> ¡Pero no creáis que todo el mundo entiende las palabras que ambos utilizan! Vuestro maestro de matemáticas, por ejemplo, o vuestros padres. Si les decís *saltar* o *rábano*, no entenderán qué quiere decir. Entre los adultos se habla de otra forma: en vez de *saltar* se dice *elevar al cuadrado* o *elevar a la potencia* y en lugar de *rábano* escriben *raíz* en la pizarra. Los *números de primera* se llaman en la clase de matemáticas números primos, y vuestro profesor jamás dirá ¡*Cinco pum*!, porque para eso tiene una expresión extranjera que es *factorial de cinco*.
>
> En los sueños no existen estas expresiones especializadas. Nadie sueña con palabras extranjeras. Así que cuando el diablo de los números habla en imágenes y hace saltar los números en vez de elevarlos a potencias, no es sólo cosa de niños: en sueños, todos hacemos lo que queremos.
>
> Pero en la clase uno no se duerme, y raras veces sueña. Por eso vuestro profesor tiene razón cuando se expresa como todos los matemáticos del mundo. Por favor, dejaos orientar por él, porque de lo contrario podría haber enfados en el cole."[1]

Por nuestra parte, los profesores trataremos de explicar de una mejor forma los temas de esta primera unidad de Matemáticas II, para que tú como alumno, adquieras estos conocimientos y logres avanzar en la resolución de problemas agregando los conocimientos sobre las Ecuaciones Cuadráticas.

Al finalizar la unidad proponemos una autoevaluación donde tú mismo evaluaras lo que has aprendido, además de un juego donde también practicaras lo visto en esta unidad, es un ¿Quién tiene? Yo tengo de ecuaciones cuadráticas, invita a tu profesor lo ponga en práctica con todo tu grupo.

Conceptos claves: Ecuación cuadrática, raíces de una ecuación, métodos de solución.

[1] Tomado del libro El diablo de los números de Hans Magnus Enzensberger.

1.1 Problemas que dan lugar a ecuaciones cuadráticas con una incógnita.

El **modelo matemático** para resolver los problemas que se presentan en esta unidad, es una ecuación cuadrática, analicemos algunos de ellos.

En cada ejemplo sólo encontraremos el modelo matemático cuya solución resuelve el problema.

Problema 1) Un jardín con forma rectangular tiene un perímetro de 42 metros y un área de 108 metros cuadrados. Determina el modelo matemático que nos ayude a encontrar sus dimensiones.

Solución:

Se debe empezar por dibujar un rectángulo que represente el jardín en cuestión.

Como puedes observar en la figura, no conocemos la longitud de los lados, dichas longitudes las representaremos con las incógnitas "x" y "y".
Para resolver este problema y analizando los datos que nos proporcionan, perímetro 42 metros y área de 108 metros cuadrados. Necesitaremos las fórmulas del perímetro y el área del rectángulo.
Recordando de cursos anteriores la fórmula del perímetro de un rectángulo es: _________ y la fórmula del área del rectángulo es: ___________________

Ahora integraremos los datos de acuerdo al problema, obteniendo la ecuación:

$42 = 2x + 2y$, simplificando tenemos: **$21 = x + y$,** para el perímetro y **$108 = x \cdot y$,** para el área.

Como se puede observar después de interpretar los datos del problema hemos obtenido el sistema de ecuaciones:

$$x + y = 21 \qquad (1)$$

$$x \cdot y = 108 \qquad (2)$$

Que resolveremos por el método de Sustitución:

Para encontrar las dimensiones del jardín, de la ecuación (1) se despeja la incógnita y, obteniendo $y = 21 - x$.

Después debemos sustituir dicho despeje en la ecuación (2): $x\,(21 - x) = 108$

Realizando la multiplicación del miembro izquierdo de la ecuación se obtiene:

$$21x - x^2 = 108$$

Igualando a cero y ordenando se tiene la **ecuación de segundo grado** con la incógnita x: $\mathbf{x^2 - 21x + 108 = 0}$

Donde la solución de este modelo permite encontrar las dimensiones del rectángulo.

Problema 2) El gerente de una fábrica organizó una comida para sus trabajadores, de acuerdo a los trabajadores que se apuntaron el precio de la comida fue de \$3000.00, como el día del evento llegaron 15 trabajadores más, aunque comieron menos, cada trabajador pago \$10.00 menos. Encuentra el modelo matemático para determinar cuántos trabajadores asistieron y cuánto pago cada uno de ellos.

Solución:

Representemos con x el número inicial de trabajadores que se apuntaron para el evento, el costo de la comida para cada uno de ellos era de $\frac{3000}{x}$ pesos.

Al llegar 15 trabajadores más, hay un total de $x + 15$ trabajadores, y cada uno pagará $\frac{3000}{x+15}$ pesos.

Por otro lado, para los trabajadores que se habían apuntado el costo disminuye en \$10.00, es decir, cada uno pagará $\frac{3000}{x} - 10$ pesos.

Igualamos estas dos expresiones ya que representan lo mismo, y se tiene el modelo matemático en la siguiente ecuación $\frac{3000}{x} - 10 = \frac{3000}{x+15}$.

Nota: En cada uno de los siguientes ejemplos completar donde sea necesario.

PARA ENCONTRAR UNA ECUACIÓN EQUIVALENTE Y MÁS SENCILLA:

Recuerda que para quitar los denominadores, se multiplica a toda la ecuación por el m.c.m. de los denominadores, que es $x(x + 15)$:

$$x(x+15)\left(\frac{3000}{x} - 10 = \frac{3000}{x+15}\right)$$

Al efectuar las multiplicaciones correspondientes tenemos:

$$\frac{3000\,(\quad)(\qquad)}{x} - 10\,(\quad)(\qquad) = \frac{3000\,(\quad)(\qquad)}{x+15}$$

$$3000(x + 15) - 10x(x + 15) = 3000x$$

Realizando las multiplicaciones:

$$\underline{\qquad\quad} + \underline{\qquad\qquad} - \underline{\qquad\quad} - \underline{\qquad\quad} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

Simplificando los términos semejantes y ordenando queda:

$$\underline{\qquad x^2} - \underline{\qquad\qquad x\;} + \underline{\qquad\quad} = 0$$

Dividiendo toda la ecuación entre –10 obtenemos la ecuación de segundo grado en x:

$$\mathbf{x^2 + 15x - 4500 = 0}$$

Problema 3) Un corredor veloz le toma 10 segundos más recorrer una distancia de 1500 metros que el tiempo que usó otro corredor más lento para recorrer 1000 metros. Si la velocidad del corredor más rápido era 5 metros/segundo mayor que la del más lento. Determina el modelo matemático que permita encontrar las velocidades de ambos corredores.

Solución:

Utilizaremos la fórmula muy conocida en Física, $v = \frac{d}{t}$: la velocidad es igual a distancia sobre el tiempo.

Para el corredor más lento	Para el corredor más rápido
d_1 = 1000 metros $v_1 = \frac{1000}{t}$	d_2 = 1500 metros $v_2 = \frac{1500}{t+10}$

La afirmación “la velocidad del corredor más rápido era 5 metros/segundo mayor que la del más lento” se expresa como: $v_2 = v_1 + 5$

Con los resultados obtenidos hasta el momento, podemos escribir esta expresión como: $v_2 = \frac{1000}{\boldsymbol{t}} + 5$

Igualando las dos expresiones que tenemos para v_2, obtenemos el modelo matemático cuya solución permite encontrar las velocidades de ambos corredores:

$$\frac{1000}{t} + 5 = \frac{1500}{t+10}$$

Para encontrar una ecuación equivalente y más sencilla, completa donde sea necesario:

Para quitar los denominadores, se multiplica a toda la ecuación por el m.c.m. de los denominadores, que es $t(t + 10)$; $t(t + 10)\left(\frac{1000}{t} + 5 = \frac{1500}{t+10}\right)$

$$\frac{(\ )(\qquad)1000}{t} + 5(\ )(\qquad) = \frac{(\ )(\qquad)1500}{t+10}$$

Haciendo los productos y simplificando se obtiene:

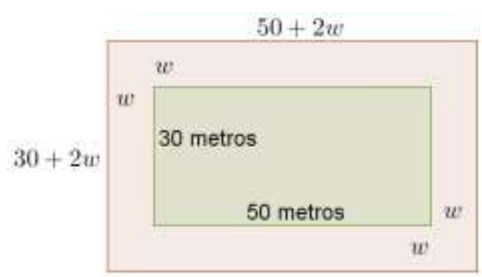
$$\underline{\qquad}(t + 10) + \underline{\quad}\,t\,(t + 10) = t\underline{\qquad}$$

$$\underline{\qquad}\,t + \underline{\qquad} + \underline{\quad}\,t^2 + \underline{\qquad}\,t = \underline{\qquad}\,t$$

$$\underline{\qquad}\,t^2 - \underline{\qquad}\,t + \underline{\qquad} = 0$$

Dividiendo a toda la ecuación entre 5 se tiene: $\boldsymbol{t^2 - 90t + 2000 = 0}$

Problema 4) Un parque contiene un jardín de flores de 50 metros de largo y 30 metros de ancho, rodeado por un sendero o andador de ancho constante. Si el área del marco es 600 m^2. Encuentra el modelo matemático que determina el ancho del sendero.



Solución:

El área total del parque es: $(30 + 2w)(50 + 2w)$

El área del jardín de flores es: $(50)(30) = 1500\ m^2$

El área del parque menos el área del jardín es igual al área del andador, al convertir estas condiciones al lenguaje matemático, se obtiene el modelo:

$$(50 + 2w)(30 + 2w) - 1500 = 600$$

Para encontrar una ecuación equivalente y más sencilla, completa lo que sigue:

$\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_w + \_\_\_\_\_w + \_\_\_\_\_w^2 - 1500 = 600$ Desarrollando el producto de los dos binomios.

$\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_w + \_\_\_\_\_w^2 - 1500 = 600$ Simplificando el producto.

$\_\_\_\_\_\_w^2 + \_\_\_\_\_\_w - \_\_\_\_\_\_\_\_ = 0$ Igualando a cero y ordenando.

$w^2 + \_\_\_\_\_\_w - \_\_\_\_\_\_\_\_ = 0$ Simplificando.

Problema 5) Anita compró varios libros por \$180, cada libro cuesta lo mismo. Si hubiese comprado 6 libros menos, por el mismo dinero cada libro le habría costado \$1.00 más. Encuentra el modelo matemático que determine cuantos libros compró y cuánto costó cada libro.

Solución:

Supongamos que x representa el número de libros comprados.

Si Anita pago \$180 por los libros, el costo de cada libro es de $\frac{180}{x}$.

Un peso más por cada libro se escribe como: $\frac{180}{x} + 1$

La afirmación "Si hubiese comprado 6 libros menos" se escribe como: $x - 6$

De la afirmación "Si hubiese comprado 6 libros menos, por el mismo dinero cada libro le habría costado \$1.00 más" se escribe la ecuación:

$$\left(\frac{180}{x} + 1\right)(x - 6) = 180$$

Encontremos una ecuación equivalente más sencilla, completa donde sea necesario:

El producto de los dos binomios. $\_\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_\_ = 180$

Simplificando el producto e igualando a cero, se obtiene:

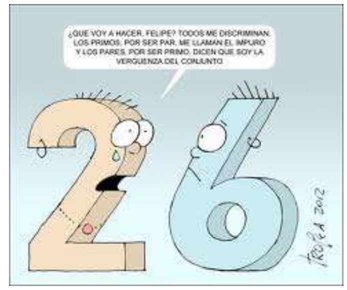
$$-\frac{1080}{x} + \_\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_\_ = 0$$

Multiplica por x, y obtienes: $-\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_\_ = 0$

Ordenando: $x^2 - 6x - 1080 = 0$

Es el modelo cuya solución nos determina el número de libros que compró Anita.

Problema 6. ¿Existen dos números pares consecutivos, con una suma de sus recíprocos igual $\frac{8}{45}$? Encuentra el modelo matemático.



Solución:

Dos números pares consecutivos se representan como $2n$, y $2n + 2$.

Los recíprocos de cada número respectivamente son: $\frac{1}{2\boldsymbol{n}}$ y $\frac{1}{2n+2}$

Así, la expresión "la suma de sus recíprocos igual a $\frac{8}{45}$", se escribe como:

$$\frac{1}{2\boldsymbol{n}} + \frac{1}{2\boldsymbol{n}+2} = \frac{8}{45}$$

Encontremos una ecuación equivalente más sencilla:

Recuerda que para quitar los denominadores, se multiplica a toda la ecuación por el m.c.m. de los denominadores, que es $2n(2n + 2)(45)$:

$$2n(2n+2)(45)\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+2} = \frac{8}{45}\right)$$

Haciendo los productos y simplificando:

$$\frac{(\quad)(\qquad)(\quad)}{2n} + \frac{(\quad)(\qquad)(\quad)}{2n+2} = \frac{8(\quad)(\qquad)(\quad)}{45}$$

Simplificando: $(2n + 2)45 + (2n)(45) = 8(2n)(2n + 2)$

Realizando los productos: $\_\_\_n + \_\_\_\_ + \_\_\_\_\_n = \_\_\_\_n^2 + \_\_\_\_n$

Igualando a cero y ordenando: $\_\_\_\_\_n^2 - \_\_\_\_\_n - \_\_\_\_ = 0$

Es equivalente a: $16n^2 - 74n - 45 = 0$

Problema 7. Una tienda de departamentos vende 20 estéreos portátiles a un precio de $800.00 cada uno, el gerente considera que por cada $50.00 de rebaja en el precio se venderán 6 estéreos más. Encuentra el modelo matemático para determinar el precio de los estéreos si la tienda quiere tener una venta de $22400.0.

Solución:

Sea x el número de estéreos que se quiere vender.

$800 - 50x$ será el precio al que se deben vender cada estéreo en x descuentos.

$20 + 6x$ representa la cantidad de estéreos vendidos en x descuentos.

$(800 - 50x)(20 + 6x)$ representa las ventas.

$(800 - 50x)(20 + 6x) = 22400$ porque las ventas deben ser iguales a $22400.

La ecuación que resulta al hacer la multiplicación correspondiente, igualando la ecuación a cero y reduciendo los términos semejantes es:

$$-\_\_\_\_\_\_x^2 + \_\_\_\_\_\_x - \_\_\_\_\_\_\_ = 0$$

Y al simplificarla se obtiene la ecuación cuadrática: $-3x^2 + 38x - 64 = 0$, que sería el modelo matemático para resolver este problema.

Problema 8) La autopista México - Puebla tiene una recta de 16 kilómetros, en la cual el aire que baja de las montañas en dirección a Puebla tiene una velocidad de 4 kilómetros por hora. Un ciclista recorre esta recta de ida y regreso a velocidad constante. Si su recorrido tuvo una duración de 2 horas. Construye el modelo para encontrar la velocidad del ciclista.

Solución:

La fórmula que se utiliza en este problema es $v = \frac{d}{t}$, velocidad es igual a distancia entre el tiempo utilizado en hacer el recorrido, (realizar el despeje del tiempo). Suponiendo que la velocidad del ciclista es x, hacemos una tabla con los datos que nos da el problema.

Dirección	Velocidad	Distancia	Tiempo
México - Puebla	$x + 4$	16	$\frac{16}{x+4}$
Puebla - México	$x - 4$	16	$\frac{16}{x-4}$

Como el tiempo del recorrido es de 2 horas, el modelo o ecuación que lo representa es: $2 = \frac{16}{x+4} + \frac{16}{x-4}$

Veamos cómo encontrar una ecuación equivalente más sencilla:

Multiplicamos toda la ecuación por el m.c.m. de los denominadores, que es $(x + 4)(x - 4)$:

$$(x + 4)(x - 4)\left(2 = \frac{16}{x+4} + \frac{16}{x-4}\right)$$

Realizando las multiplicaciones indicadas y simplificando, la ecuación que resulta es: 2(_________)(_________) = 16 (_________) + 16 (_________)

$$\_\_\_x^2 - \_\_\_ = \_\_\_\_\_x - \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_x + \_\_\_\_\_$$

Igualando a cero: $\_\_\_\_\_\_x^2 - \_\_\_\_\_\_x - \_\_\_\_\_\_ = 0$

Finalmente debes obtener: $x^2 - 16x - 16 = 0$

Es el modelo cuya solución nos dará la velocidad del ciclista.

Problema 9) Un principiante de canotaje puede recorrer 12 km rio abajo y regresar en un total de 5 horas. Si la velocidad de la corriente es de 1 km/hora. Encuentra el modelo matemático para la velocidad a la que puede remar el principiante en aguas tranquilas.

Solución:

Supongamos que x es la velocidad de la canoa en aguas tranquilas.

Dirección	Velocidad	Distancia	Tiempo
Rio abajo (Favor de la corriente)		12	
Regreso (Contra la corriente)		12	

Considerando la fórmula de velocidad $v = \frac{d}{t}$, y que el tiempo $t = \frac{d}{v}$, de recorrido en contra de la corriente es $\frac{12}{x-1}$ y el tiempo a favor de la corriente será _______.

Así que el tiempo total de recorrido es: $5 = \frac{12}{x-1} + \frac{12}{x+1}$.

Encontremos una ecuación equivalente más sencilla:

Multiplicando toda la ecuación por $(x - 1)(x + 1)$ y simplificando, tenemos:

5(_________)(_________) = 12 (_________) + 12 (_________)

___x^2 – ___ = _____x + _____ + _____x – _____

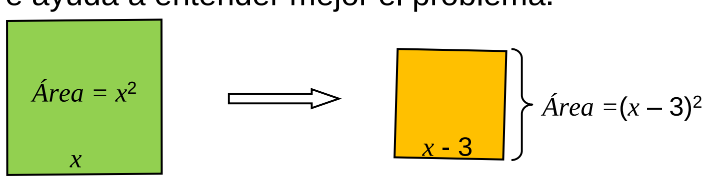
Finalmente debes obtener: $5x^2 - 24x - 5 = 0$.

Es el modelo matemático simplificado para este problema.

Observación: En esta parte es pertinente pedir a tu profesor que recuerde a todo el grupo el desarrollo de expresiones de la forma $(a + b)(a - b)$ y de $(a + b)^2$, otra opción es que lo investigues en algún libro de álgebra o en internet.

Problema 10) Si se disminuye en 3 metros el lado de un cuadrado, el área del cuadrado original es igual al doble del área del cuadrado disminuido en 207 m^2. Encuentra el modelo matemático para determinar las dimensiones del cuadrado original.

Un dibujo siempre ayuda a entender mejor el problema.



Solución:

La afirmación "el área del cuadrado original es igual al doble del área del cuadrado disminuido en 207 m^2", se expresa con la ecuación: $x^2 = 2(x - 3)^2 - 207$

Haciendo las multiplicaciones indicadas se obtiene la ecuación cuadrática:

$$x^2 - 12x - 189 = 0$$

La cual es el modelo matemático simplificado para este problema.

Problema 11) Encuentra el modelo matemático para este problema.
Regocíjense los monos
divididos en dos bandos
su sexta parte al cuadrado
en el bosque se solazan.
Con alegres gritos, ocho
atronando el campo están.
¿Sabes cuántos monos hay
en la manada en total?[2]

Solución:

Si x es el total de monos en la manada:

La sexta parte al cuadrado es $\left(\frac{x}{6}\right)^2$, más los 8 que en el campo están $\left(\frac{x}{6}\right)^2 + 8$, será igual a la manada completa: $\left(\frac{x}{6}\right)^2 + 8 = x$

Haciendo las operaciones indicadas, una ecuación equivalente será:

$$\frac{x^2}{36} = x - 8$$

Multiplicando la ecuación por 36 e igualando a cero, la ecuación que resulta es:

$$x^2 - 36x + 288 = 0.$$

La cual es el modelo matemático simplificado para este problema.

Ejercicios 1.1

Encuentra **sólo** el **Modelo Matemático** cuya solución resuelva el problema planteado en cada punto.

1) Un parque de forma rectangular tiene un perímetro de 160 metros y un área de 1500 metros cuadrados, ¿cuáles son las dimensiones del parque? Encuentra el modelo matemático simplificado para este problema.

2) Un grupo de alumnos organizo una excursión, el costo para los alumnos que van es de $4200, el día de la excursión llegaron 7 alumnos más y el chofer les dijo que el costo era el mismo, por lo que cada alumno pago $20.00 menos. Determina el

[2] Perelman, Y. Algebra Recreativa

modelo matemático de cuántos alumnos fueron a la excursión, y cuánto pago cada uno.

3) A un corredor veloz le toma 40 segundos menos recorrer una distancia de 1200 metros, que el tiempo que uso un corredor más lento para recorrer 1600 metros. Si la velocidad del corredor más rápido era 4 metros/segundo mayor que la del más lento. ¿Cuál es el modelo matemático para saber la velocidad de cada corredor?

4) Un parque de forma rectangular tiene 60 por 100 metros, si contiene un jardín rectangular rodeado por un andador de concreto, ¿Cuál es el modelo matemático que determina el ancho del andador si el área del jardín es la mitad del área del parque?

5) Encuentra el modelo matemático para resolver el siguiente problema.

“La suma de los recíprocos de dos números enteros consecutivos es $\frac{13}{42}$, ¿cuáles son los números?”

6) Determina el modelo matemático de: El producto de dos enteros impares consecutivos es 143.

7) Determinar el modelo matemático para resolver: Dos números positivos difieren en 5, y su producto es 104. ¿Cuáles son estos números?

8) La corriente del rio Usumacinta entre los pueblos A y B es de 10 kilómetros por hora y va del pueblo A al pueblo B, una lancha hace el recorrido redondo entre los pueblos A y B a velocidad constante y tarda 3 horas, sí la distancia que hay entre los dos pueblos es de 20 kilómetros, ¿Cuál es el modelo matemático para determinar la velocidad de la lancha?

9) Nahil compró varios libros por \$360.00. Si hubiese comprado 5 libros menos por el mismo dinero, cada libro le habría costado \$1.00 más. Determina el modelo matemático cuya solución responde a la pregunta ¿Cuántos libros compró y cuánto costó cada uno?

10) Marcos compró varios libros por la cantidad de \$468.00, si hubiera comprado 13 libros menos, cada libro costaría \$3.00 más. Determina el modelo matemático que responde a la pregunta ¿Cuántos libros compró y cuánto costó cada libro?

11) El viaje a una práctica de campo salió en \$1560, el día de la práctica llegaron 9 estudiantes más, y el costo de la práctica fue de \$12 menos para cada estudiante. Determina el modelo matemático cuya solución responde a la pregunta ¿Cuántos estudiantes fueron a la práctica de campo?

12) Una lancha puede recorrer 60 kilómetros río abajo y regresar en un total de 8 horas. Si la velocidad del río es de 10 kilómetros/hora, Encuentra el modelo matemático que determina la velocidad de la lancha en aguas tranquilas.

13) Adriana vive a 30 km de su trabajo. Si viaja en su bicicleta a 5 km/hora más rápido de lo usual, llega a su trabajo 5 minutos más temprano. Encuentra el modelo matemático que determina a qué velocidad maneja normalmente su bicicleta.

14) Si se aumenta en 4 cm el lado de un cuadrado, su área es 112 cm^2 menos que el doble del área original. Encuentra el modelo matemático que determina el área y perímetro del cuadrado inicial.

15) Determina el modelo matemático de la siguiente poesía.
Regocíjense los monos
divididos en dos bandos,
su octava parte al cuadrado
en el bosque se solaza.
Con alegres gritos, doce
atronando el campo están.
¿Sabes cuántos monos, hay en la manada?

1.2 Resolución de ecuaciones cuadráticas de las formas:

$$x^2 = c,\ \ ax^2 = c,\ \ ax^2 + c = d,\ ax^2 + bx = 0,\ \ a(x+b)^2 + c = d,\ \ (x+b)(x+c) = 0.$$

Después de analizar los problemas anteriores, puedes observar que las ecuaciones que se obtuvieron tienen tres términos, y uno de ellos es cuadrático de ahí su nombre de ecuaciones cuadráticas. Pero existen ecuaciones cuadráticas que pueden tener uno o dos términos y son llamadas "*ecuaciones cuadráticas incompletas*", como las que veremos a continuación.

1.2.1 Ecuaciones de la forma $x^2 = c$ equivalentes a $x^2 - c = 0$

Para ecuaciones de esta forma, la solución se encuentra despejando la incógnita x, recuerda que c es un número real y puede ser positivo o negativo.

Para despejar a x, solo se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación, y obtendremos: $x = \pm\sqrt{c}$

Con los siguientes ejemplos comprenderás mejor este procedimiento.

Ejemplo 1) Resuelve la ecuación $x^2 = 124$

Solución:

Despejamos la incógnita x, para esto:

Se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación: $\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{124}$

Es decir, $x = \pm\sqrt{124} = \pm 2\sqrt{31}$

Ya que simplificando el radical $\pm\sqrt{124} = \pm\sqrt{4(31)} = \pm\sqrt{4}\sqrt{31} = \pm 2\sqrt{31}$

Las soluciones de la ecuación son: $x_1 = 11.135$, $x_2 = -11.135$

COMPROBACIÓN:

Si $x_1 = 2\sqrt{31}$; $\left(2\sqrt{31}\right)^2 = 2^2\left(\sqrt{31}\right)^2 = 4(31) = 124.$

Si $x_2 = -2\sqrt{31}$; $\left(-2\sqrt{31}\right)^2 = (-2)^2\left(\sqrt{31}\right)^2 = 4(31) = 124.$

Ejemplo 2) Resuelve la ecuación $x^2 = -36$

Solución:

Despejamos la incógnita x, para esto:

Se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación: $x = \pm\sqrt{-36}$

En este caso, la ecuación no tiene soluciones reales, ¿por qué?

____

Ejemplo 3) Resuelve la ecuación $x^2 - 25 = 0$
Solución:
Despejamos la incógnita x, para esto:
En este caso, primero se suma en ambos lados de la igualdad el inverso aditivo de -25: $x^2 - 25 + 25 = 0 + 25$, es decir, $x^2 = 25$.
Luego se procede como en los anteriores.
Se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación: $\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{25}$
Es decir, $x = \pm 5$. Las soluciones de la ecuación son: $x_1 = +5$ y $x_2 = -5$

Ahora resuelve los siguientes ejercicios de forma similar, completando donde sea necesario.

Ejercicio 1) Resuelve la ecuación $x^2 = 250$,

Solución:

Recuerda que se despeja la incógnita x, para hacerlo:

Se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación: $x = \pm\sqrt{\quad\quad}$

Se simplifica el radical: $\pm\sqrt{\quad\quad} = \pm$ ___ $\sqrt{\quad}$

Las soluciones de la ecuación son: x_1 = __________, x_2 = ___________

COMPROBACIÓN:

Si x_1 = ________, $(\quad\quad)^2 = (\quad)^2(\quad\quad)^2 = \quad\quad = 250$
Si x_2 = ________, $(\quad\quad)^2 = (\quad)^2(\quad\quad)^2 = \quad\quad = 250$

Ejercicio 2) Resuelve la ecuación $x^2 = -125$

Solución:

Despejamos la incógnita x, para esto:

Se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación: $x = \pm\sqrt{\quad\quad}$

En este caso, la ecuación ______________ soluciones reales, ya que:

____

Ejercicio 3) Resuelve la ecuación $x^2 - 50 = 0$

Solución:

Despejamos la incógnita x:

En este caso, primero se suma en ambos lados de la igualdad el inverso aditivo de _____: $x^2 - 50 +$ _____ $= 0 +$ _____, es decir, x^2 = _______.

Se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación: _______________

Es decir, $x = \pm$ ____. Las soluciones de la ecuación son: x_1 = _____ y x_2 = _____

Realiza la comprobación.

Ejercicios 1.2.1

Encuentra las soluciones o raíces de cada una de las siguientes ecuaciones.

1) $x^2 = 9$
2) $y^2 = -16$
3) $x^2 = 86$
4) $z^2 = -144$
5) $w^2 = \frac{4}{9}$
6) $x^2 - 81 = 0$
7) $t^2 - 225 = 0$
8) $x^2 - 68 = 0$
9) $x^2 + 625 = 0$
10) $y^2 - \frac{9}{16} = 0$

1.2.2 Ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$

Para ecuaciones de esta forma, la solución se encuentra despejando a x con el siguiente procedimiento, recuerda que a y c son números reales con $a \neq 0$.

Además, toma en cuenta que el número c puede ser positivo o negativo.

Procedimiento	Justificación
$ax^2 + c = 0$	Ecuación original.
$ax^2 = -c$	Se suma el inverso aditivo de c en ambos miembros de la ecuación.
$x^2 = \frac{-c}{a}$	Se multiplica la ecuación por el inverso multiplicativo de a.
$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$	Finalmente se saca raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación.

Con los siguientes ejemplos comprenderás mejor este procedimiento.

Ejemplo 1) Resuelve la ecuación $4x^2 - 124 = 0$

Solución:

Observa el procedimiento y su justificación de cada paso, para realizar el despeje de la incógnita x.

Procedimiento	Justificación
$4x^2 - 124 + 124 = 0 + 124$ $4x^2 = 124$	Se suma el inverso aditivo de 124 en ambos miembros de la ecuación.
$\frac{4x^2}{4} = \frac{124}{4}$ $x^2 = 31$	Se multiplica la ecuación por el inverso multiplicativo de 4.
$x = \pm\sqrt{31}$	Se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación.
Las soluciones de la ecuación son: $x_1 = 5.56$, $x_2 = -5.56$	

COMPROBACIÓN:

Si $x_1 = \sqrt{31}$; $4\left(\sqrt{31}\right)^2 - 124 = 4(31) - 124 = 124 - 124 = 0$

Si $x_2 = -\sqrt{31}$; $4\left(-\sqrt{31}\right)^2 - 124 = 4(31) - 124 = 124 - 124 = 0$

Ejemplo 2) Resuelve la ecuación $3x^2 + 192 = 0$

Solución:

Procedimiento	Justificación
$3x^2 + 192 - 192 = 0 - 192$ $3x^2 = -192$	Se suma el inverso aditivo de –192 en ambos miembros de la ecuación.
$x^2 = -\frac{192}{3}$ $x^2 = -64$	Se multiplica la ecuación por el inverso multiplicativo de 3.
$x = \pm\sqrt{-64}$	Se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación.
En este caso, la ecuación no tiene solución en los Números Reales.	

Ahora resuelve los siguientes ejercicios de forma similar, completando donde sea necesario.

Ejercicio 1) Resuelve la ecuación $12x^2 - 240 = 0$

Solución:

Procedimiento	Justificación
_______________ = _______ _______ = _______	Se suma el inverso aditivo de _______ en ambos miembros de la ecuación.
_______ = _______ ______ = ______	Se multiplican ambos miembros de la ecuación por el inverso multiplicativo de ______.
x = _______	Se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación.
Las soluciones de la ecuación son: x_1 = __________, x_2 = __________	

REALIZA LA COMPROBACIÓN:

Si x_1 = _______, $12(\quad)^2 - 240 = 12(\quad) - 240 = \qquad = 0$

Si x_2 = _______, $12(\quad)^2 - 240 = 12(\quad) - 240 = \qquad = 0$

Ejercicio 2) Resuelve la ecuación $\frac{5}{7}x^2 + \frac{371}{140} = 0$

Solución:

Procedimiento	Justificación
______________ = _______ _______ = _______	Se suma el inverso aditivo de _______ en ambos miembros de la ecuación.
_______ = _______ ______ = ______	Se multiplican ambos miembros de la ecuación por el inverso multiplicativo de ______.
x = _______	Se obtiene la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación.
Las soluciones de la ecuación son: x_1 = ___________, x_2 = ___________	

REALIZA LA COMPROBACIÓN:

Ejercicios 1.2.2

Encuentra las soluciones o raíces de cada una de las siguientes ecuaciones.

1) $3x^2 - 45 = 0$
2) $10y^2 + 56 = 0$
3) $3x^2 + 36 = 0$
4) $7z^2 - 448 = 0$
5) $\frac{2}{3}w^2 - 54 = 0$
6) $\frac{1}{2}x^2 - 18 = 0$
7) $3t^2 - 12 = 0$
8) $-5x^2 + 20 = 0$
9) $4x^2 - 64 = 0$
10) $\frac{3}{2}y^2 - 54 = 0$

1.2.3 Ecuaciones de la forma $ax^2 + c = d$

El procedimiento y justificación para resolver este tipo de ecuaciones:

Procedimiento	Justificación

$ax^2 + c = d$	Ecuación original.
$ax^2 = d - c$	Se suma el inverso aditivo de c en ambos miembros de la ecuación.
$x^2 = \dfrac{d-c}{a}$	Se multiplica la ecuación por el inverso multiplicativo de a.
$x = \pm\sqrt{\dfrac{d-c}{a}}$	Finalmente se saca raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación.

Ejemplo 1) Resuelve la ecuación $4x^2 - 16 = 48$.

Solución:

Procedimiento	Justificación
$4x^2 - 16 + 16 = 48 + 16$ $4x^2 = 64$	Se suma el inverso aditivo de –16 en ambos miembros de la ecuación.
$x^2 = \dfrac{64}{4} = 16$	Se multiplica la ecuación por el inverso multiplicativo de 4.
$x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$	Se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación.
Las soluciones de la ecuación son: $x_1 = 4$, $x_2 = -4$	

COMPROBACIÓN:

Si $x_1 = 4$; $4(4)^2 - 16 = 4(16) - 16 = 64 - 16 = 48$

Si $x_2 = -4$; $4(-4)^2 - 16 = 4(16) - 16 = 64 - 16 = 48$

Ejemplo 2) Resuelve la ecuación $\frac{2}{3}x^2 + 30 = 24$

Solución:

Procedimiento	Justificación
$\frac{2}{3}x^2 = 24 - 30$	Se suma el inverso aditivo de 30 en ambos miembros de la ecuación.
$x^2 = \dfrac{3(-6)}{2}$	Se multiplica la ecuación por el inverso multiplicativo de ⅔.
$x = \pm\sqrt{-9}$	Se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación.

Las raíces de la ecuación no son reales ya que la raíz cuadrada de un número negativo no existe en los Números Reales.

De forma similar completa los siguientes ejercicios para encontrar las soluciones de las ecuaciones dadas.

Ejercicio 1) Resuelve la ecuación $\frac{2}{3}x^2 - 32 = 10$.

Solución:

Procedimiento	Justificación
____________ = _________ _____ = ______	Se suma el inverso aditivo de _______ en ambos miembros de la ecuación.
x^2 = _______	Se multiplica la ecuación por el inverso multiplicativo de _______.
x = _______	Se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación.
Las soluciones de la ecuación son: x_1 = ___________ , x_2 = ___________	

REALIZA SU COMPROBACIÓN:

Si x_1 =______

Si x_2 = ______

Ejercicio 2) Resuelve la ecuación $5x^2 - \frac{12}{158} = 120$.

Solución:

Procedimiento	Justificación
____________ = _________ _____ = ______	Se suma el inverso aditivo de _______ en ambos miembros de la ecuación.
x^2 = _______	Se multiplica la ecuación por el inverso multiplicativo de _______.

x = ________	Se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación.
Las soluciones de la ecuación son: x_1 = ___________ , x_2 = ___________	

¿Puedes realizar la comprobación?

Ejercicios 1.2.3

Encuentra las soluciones o raíces de cada una de las siguientes ecuaciones.

1) $5x^2 + 36 = 161$
2) $w^2 - 24 = -8$
3) $x^2 + 12 = 48$
4) $3y^2 + 64 = 100$
5) $p^2 + 126 = 90$
6) $q^2 - 400 = 624$
7) $r^2 + 51 = 100$
8) $5z^2 - 25 = 220$
9) $3s^2 + 600 = 1275$
10) $4x^2 - 144 = 432$
11) $-5y^2 + 100 = -505$
12) $\frac{3}{2}x^2 - 54 = -123$

1.2.4 Ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$

En el procedimiento para resolver este tipo de ecuaciones hay que tomar en cuenta que, dados $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ dos números reales, la igualdad $\boldsymbol{p(q)} = 0$ se cumple si y sólo si $\boldsymbol{p} = 0$ o $\boldsymbol{q} = 0$, veamos cómo se realiza paso por paso.

$\boldsymbol{ax^2 + bx} = 0$	Ecuación original.
$\boldsymbol{x(ax + b)} = 0$	Se factoriza la incógnita $\boldsymbol{x}$.
$\boldsymbol{x} = 0$ ó $\boldsymbol{ax + b} = 0$	Para que el producto de dos números sea cero, uno de ellos debe ser cero.
$\boldsymbol{x_1} = 0$ y $\boldsymbol{x_2} = -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$	Se despeja $\boldsymbol{x}$, de la segunda ecuación y se obtienen las dos soluciones.

Ejemplo 1) Resuelve la ecuación $6x^2 - 8x = 0$

Solución:

Procedimiento	Justificación
$2x\,(3x - 4) = 0$	Se factoriza la incógnita $\boldsymbol{x}$ en este caso será $2\boldsymbol{x}$

$2x = 0$ ó $3x - 4 = 0$	Para que el producto de dos números sea cero, uno de ellos debe ser cero.
$x = \frac{0}{2}$ ó $3x = 4$ $x = 0$ ó $x = \frac{4}{3}$	Se despeja $\boldsymbol{x}$ de cada ecuación y se obtienen las dos soluciones.
Las raíces o soluciones de la ecuación son: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{4}{3}$	

COMPROBACIÓN:

Si $x_1 = 0$; $6(0)^2 - 8(0) = 0$

Si $x_2 = \frac{4}{3}$; $6\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 8\left(\frac{4}{3}\right) = 6\left(\frac{16}{9}\right) - \frac{32}{3} = \frac{96}{9} - \frac{32}{3} = \frac{32}{3} - \frac{32}{3} = 0$

Ejemplo 2) Resuelve la ecuación $4x^2 + 12x = 0$

Solución:

Procedimiento	Justificación
$4x(x + 3) = 0$	Se factoriza la incógnita $\boldsymbol{x}$, en este caso $4\boldsymbol{x}$.
$4x = 0$ ó $x + 3 = 0$	Para que el producto de dos números sea cero, uno de ellos debe ser cero.
$x = \frac{0}{4} = 0$ ó $x = -3$	Se despeja $\boldsymbol{x}$ en cada expresión y se obtienen las dos soluciones.
Las raíces de la ecuación son: $x_1 = 0$ $x_2 = -3$	

COMPROBACIÓN:

Si $x_1 = 0$; $4(0)^2 + 12(0) = 0$

Si $x_2 = -3$; $4(-3)^2 + 12(-3) = 4(9) - 36 = 36 - 36 = 0$

Ejemplo 3) Resuelve la ecuación $-3x^2 - 18x = 0$

Solución:

Procedimiento	Justificación
$-x(3x + 18) = 0$	Se factoriza la incógnita $\boldsymbol{x}$, en este caso $\boldsymbol{-x}$.
$-x = 0$ ó $3x + 18 = 0$	Para que el producto de dos números sea cero, uno de ellos debe ser cero.

$x_1 = 0$ ó $3x = -18$ $x_2 = -6$	Se despeja $\boldsymbol{x}$ en cada expresión y se obtienen las dos soluciones.
Las raíces de la ecuación son: $x_1 = 0$ y $x_2 = -6$	

COMPROBACIÓN:

Si $x_1 = 0$; $-3(0)^2 - 18(0) = 0$
Si $x_2 = -6$; $-3(-6)^2 - 18(-6) = -3(36) + 108 = -108 + 108 = 0$

Ahora te toca practicar, completando los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1) Resuelve la ecuación $13x^2 - 16x = 0$

Solución:

Procedimiento	Justificación
______________ = 0	Se factoriza la incógnita ______.
_______= 0 ó _______ = 0	Para que el producto de dos números sea cero, uno de ellos debe ser cero.
______=______; _______=______ x = ________; x = _________	Se despeja $\boldsymbol{x}$ de cada expresión y se obtienen las dos soluciones.
Las raíces o soluciones de la ecuación son: $x_1 = 0$, x_2 = _______	

COMPROBACIÓN:

Si $x_1 = 0$;
Si x_2 = ______;

Ejercicio 2) Resuelve la ecuación $\frac{30}{7}x^2 - \frac{6}{7}x = 0$

Solución:

Procedimiento	Justificación
$30x^2 - 6x = 0$	Multiplicando toda la ecuación por 7.
________________ = 0	Se factoriza la incógnita $\boldsymbol{x}$.
_______= 0 ó _______ = 0	Para que el producto de dos números sea cero, uno de ellos debe ser cero.
_____=_____ ; _______=______ x = ________; x = _________	Se despeja $\boldsymbol{x}$ de cada expresión y se obtienen las dos soluciones.

Las raíces o soluciones de la ecuación son: $x_1 = 0$, $x_2 =$ ________

Ejercicios 1.2.4

Encuentra las soluciones o raíces de cada una de las siguientes ecuaciones.

1) $5x^2 - 70x = 0$ 2) $y^2 - 24y = 0$ 3) $w^2 + 12w = 0$

4) $3t^2 + 69t = 0$ 5) $s^2 - \frac{3}{4}s = 0$ 6) $4x^2 - \frac{1}{2}x = 0$

7) $p^2 + 51p = 0$ 8) $1.5q^2 - 81q = 0$ 9) $3x^2 + 600x = 0$

10) $4r^2 - 144r = 0$ 11) $-5x^2 + 100x = 0$ 12) $\frac{3}{2}z^2 - 24z = 0$

1.2.5 Ecuaciones de la forma $a(x + b)^2 + c = d$.

La ecuación $a(x + b)^2 + c = d$ se puede escribir de la forma $a(x + b)^2 = \mathrm{n}$.

Ya que en $a(x + b)^2 + c = d$ al sumar en ambos lados el inverso aditivo de c, obtenemos $a(x + b)^2 = d - c$. Haciendo $d - c = \mathrm{n}$, se obtiene $a(x + b)^2 = \mathrm{n}$.

El procedimiento para resolver este tipo de ecuaciones es el siguiente.

Procedimiento	Justificación
$a(x + b)^2 = \mathrm{n}$	Continuamos de la última ecuación.
$(x + b)^2 = \frac{\mathrm{n}}{a}$	Se multiplica la ecuación por el inverso multiplicativo de a.
$x + b = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{n}}{a}}$	Se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación
$x = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{n}}{a}} - b$	Se suma el inverso aditivo de b en ambos lados de la ecuación.
$x_1 = +\sqrt{\frac{\mathrm{n}}{a}} - b$ y $x_2 = -\sqrt{\frac{\mathrm{n}}{a}} - b$	Son las soluciones de la ecuación

Nota: Como lo observaste, en ecuaciones de esta forma no se desarrolla $(x + b)^2$.

Ejemplo 1) Resuelve la ecuación $3(x-6)^2 = 432$

Solución:

Procedimiento	Justificación
$(x-6)^2 = \frac{432}{3}$	Se multiplica la ecuación por el inverso multiplicativo de 3.
$x - 6 = \pm\sqrt{144}$	Se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros.
$x = 6 \pm 12$	Se suma el inverso aditivo de –6 en ambos miembros.
Las soluciones o raíces de la ecuación son:	$x_1 = 6 + 12$ y $x_2 = 6 - 12$ $x_1 = 18$ y $x_2 = -6$

¿Puedes realizar la comprobación?

Ejemplo 2) Resuelve la ecuación $5(x+6)^2 + 22 = 0$

Solución:

Procedimiento	Justificación
$5(x+6)^2 = -22$	Se suma el inverso aditivo de 22 en ambos lados de la ecuación.
$(x+6)^2 = \frac{-22}{5}$	Se multiplica la ecuación por el inverso multiplicativo de 5.
$x + 6 = \pm\sqrt{\frac{-22}{5}}$	Se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros.
$x = \pm\sqrt{\frac{-22}{5}} - 6$	Pero como en los Números Reales no existen las raíces cuadradas de números negativos.
La ecuación no tiene soluciones o raíces reales.	

Ejemplo 3) Resuelve la ecuación $-5(x+7)^2 + 400 = -32000$

Solución:

Procedimiento	Justificación
$-5(x+7)^2 = -32400$	Se suma el inverso aditivo de 400 en ambos lados de la ecuación.

$(x+7)^2 = \frac{-32400}{-5}$ $(x+7)^2 = 6480$	Se multiplica la ecuación por el inverso multiplicativo de –5.
$x + 7 = \pm\sqrt{6480}$ $= \pm 80.498$	Se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros.
$x = \pm 80.498 - 7$	Se suma el inverso aditivo de 7 en ambos miembros.
Las soluciones o raíces de la ecuación son:	$x_1 = 73.498$ y $x_2 = -87.498$

¿Puedes hacer la comprobación?

Ahora te toca practicar un poco más, completando los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1) Resuelve la ecuación $5(x-3)^2 - 245 = 0$

Solución:

Procedimiento	Justificación
______ = _____	Se suma el inverso aditivo de ______ en ambos lados de la ecuación.
______ = ______	Se multiplica la ecuación por el inverso multiplicativo de _____.
_____ = _______	Se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros.
____ = _______	Se suma el inverso aditivo de ______ en ambos lados de la igualdad.
Las soluciones de la ecuación son:	x_1 = __________ y x_2 = __________

¿Puedes hacer la comprobación?

Ejercicio 2) Resuelve la ecuación $7(x+3)^2 - 49 = 126$

Solución:

Procedimiento	Justificación
_________ = _________	Se suma el inverso aditivo de _____ en ambos lados de la ecuación.
_________ = _________ _________ = _________	Se multiplica la ecuación por el inverso multiplicativo de ______.
_______ = _________	Se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros.
_______ = _________	Se suma el inverso aditivo de ____ en ambos miembros.
Las soluciones o raíces de la ecuación son:	x_1 = _________ y x_2 = _________

¿Puedes hacer la comprobación?

Ejercicios 1.2.5

Encuentra las soluciones o raíces de cada una de las siguientes ecuaciones.

1) $\frac{3}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{243}{676}$
2) $\frac{1}{2}(y+3)^2 = 3528$
3) $-\frac{1}{4}\left(w-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{-1}{2304}$
4) $2(p-3)^2 = -10$
5) $8(q+4)^2 = 128$
6) $\frac{2}{3}(r-4)^2 = 150$
7) $7(s+8)^2 = -56$
8) $6(m+8)^2 = 90$
9) $\frac{1}{2}(n-1)^2 = 162$
10) $(w+8)^2=\frac{25}{81}$
11) $-3(x-\frac{1}{2})^2 = 108$
12) $\frac{1}{2}(y+5)^2 = 32$

1.2.6 Ecuaciones de la forma $(x + b)(x + c) = 0$

$(x + b)(x + c) = 0$ es equivalente a $(ax + b)(cx + d) = 0$ cuando a y c son igual a 1, podemos afirmar que esta última ecuación es más general. En el procedimiento para resolver este tipo de ecuaciones recuerda que: Dados p y q dos números reales, la igualdad $p(q) = 0$ se cumple si y sólo si $p = 0$ o $q = 0$, veamos cómo se resuelven.

Procedimiento	Justificación
$(ax + b)(cx + d) = 0$	Ecuación original.

$\boldsymbol{ax + b} = 0$ **o** $\boldsymbol{cx + d = 0}$	Para que el producto de dos números sea cero, uno de ellos debe ser cero.
$\boldsymbol{ax = -b}$ **o** $\boldsymbol{cx = -d}$ $x = -\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$ **o** $x = -\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{c}}$	Se despeja x de cada ecuación.
Las soluciones de la ecuación son $x_1 = -\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$ y $x_2 = -\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{c}}$	

Observación: Creemos que estás listo para resolver las siguientes ecuaciones con mayor rapidez, suponemos que ya sabes la justificación de cada paso. Así que escribiremos solo los procedimientos.

Ejemplo 1) Resuelve la ecuación $(2x - 3)(5x + 6) = 0$

Solución:

$$(2x - 3)(5x + 6) = 0$$

$$2x - 3 = 0 \quad \text{ó} \quad 5x + 6 = 0$$

$$2x = 3 \quad \text{ó} \quad 5x = -6$$

$$x_1 = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-6}{5}$$

COMPROBACIÓN:

Si $x_1 = \frac{3}{2}$, sustituyendo en la ecuación $(2x - 3)(5x + 6) = 0$.

$$(2(\tfrac{3}{2}) - 3)(5(\tfrac{3}{2}) + 6) = (3 - 3)(\tfrac{15}{2} + 6) = 0(\tfrac{27}{2}) = 0$$

Si $x_2 = \frac{-6}{5}$, sustituyendo en la ecuación $(2x - 3)(5x + 6) = 0$.

$$(2\left(-\frac{6}{5}\right) - 3)(5\left(-\frac{6}{5}\right) + 6) = \left(-\frac{12}{5} - 3\right)(-6 + 6) = \left(-\frac{27}{5}\right)0 = 0$$

Ejemplo 2) Resuelve la ecuación $(5x - 4)(2x - 7) = 0$

Solución:

$$(5x - 4)(2x - 7) = 0$$

$$5x - 4 = 0 \quad \text{ó} \quad 2x - 7 = 0$$

$$5x = 4 \quad \text{ó} \quad 2x = 7$$

$$x_1 = \frac{4}{5} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{7}{2}$$

COMPROBACIÓN:

Si $x_1 = \frac{4}{5}$, sustituyendo en la ecuación $(5x - 4)(2x - 7) = 0$.

$$(5x - 4)(2x - 7) = (5(\tfrac{4}{5}) - 4)(2(\tfrac{4}{5}) - 7) = (4 - 4)(\tfrac{8}{5} - 7) = 0\left(-\frac{27}{5}\right) = 0$$

Si $x_2 = \frac{7}{2}$, sustituyendo en la ecuación $(5x - 4)(2x - 7) = 0$.

$$(5x - 4)(2x - 7) = (5(\tfrac{7}{2}) - 4)(2(\tfrac{7}{2}) - 7) = (\tfrac{35}{2} - 4)(7 - 7) = \left(\frac{27}{2}\right)0 = 0\ .$$

Ahora resuelve los siguientes ejercicios completando lo que se pide.

Ejercicio 1) Resuelve la ecuación $(7x - 8)(6x + 7) = 0$.

Solución: $(7x - 8)(6x + 7) = 0$

____________= 0 ó ____________ = 0

_________= _____ ó __________= _____

$x_1 =$ y $x_2 =$

Realiza la comprobación.

Ejercicio 2) Resuelve la ecuación $(\frac{30}{7}x - 8)(6x + \frac{3}{7}) = 0$ completando la solución.

Solución: $(\frac{30}{7}x - 8)(6x + \frac{3}{7}) = 0$

____________= 0 ó ____________ = 0

___________= _____ ó __________= _____

$x_1 =$ y $x_2 =$

Realiza la comprobación.

Ejercicios 1.2.6

Encuentra las soluciones o raíces de cada una de las siguientes ecuaciones.

1) $(2x - 3)(5x + 6) = 0$

2) $(4y + 6)(2y - 8) = 0$

3) $(\frac{2}{3}x - 6)(\frac{1}{5}x - 4) = 0$

4) $\left(5w - \frac{3}{2}\right)\left(2w - \frac{1}{3}\right) = 0$

5) $(3p - 8)(4p - 12) = 0$

6) $(q - 7)(3q - 2) = 0$

7) $\left(\frac{2}{3}n + \frac{8}{12}\right)(n - 7) = 0$

8) $\left(\frac{1}{2}x - 10\right)\left(\frac{1}{3}x + 6\right) = 0$

9) $(3y - 63)\left(\frac{1}{4}y + \frac{7}{2}\right) = 0$

10) $\left(\frac{1}{2}w - \frac{9}{4}\right)\left(\frac{1}{6}w - \frac{3}{2}\right) = 0$

11) $(3z - 18)(2z - 8) = 0$

12) $\left(\frac{2}{3}x + \frac{16}{9}\right)(5x - 25) = 0$

1.3 Resolución de la ecuación cuadrática completa $ax^2 + bx + c = 0$.

Toda ecuación de segundo grado con una variable se puede escribir en la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$, y si sucede que también $b, c \neq 0$ a la ecuación se le llama “completa” en su forma general.

A cada uno de sus términos se les llama:

$$\underbrace{ax^2}_{\text{Término cuadrático}} + \underbrace{bx}_{\text{Término lineal}} + \underbrace{c}_{\text{Término independiente}} = 0$$

Existen varios métodos para resolver una ecuación cuadrática completa, veremos algunos de ellos que son:

Método por Factorización.

Método de Completar Trinomio Cuadrado Perfecto.

Método por Fórmula General.

1.3.1 Método por Factorización.

Este método consiste en escribir la ecuación cuadrática como producto de dos binomios.

Para utilizar este método la ecuación cuadrática debe de estar en su forma general $ax^2 + bx + c = 0$. Se pueden presentar dos casos, cuando $a = 1$ o cuando $a \neq 1$.

Caso 1: Si $a = 1$, la ecuación es de la forma $x^2 + bx + c = 0$ y se puede factorizar como: $x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$ donde los números m y n deben de cumplir:

$m + n = b$ (cuya suma sea b)

$m \bullet n = c$ (su producto sea c)

Caso 2: Si $a \neq 1$, la ecuación se factoriza como $ax^2 + bx + c = (px + m)(qx + n)$ donde p, q, m y n son números reales que cumplen otras propiedades que se aclararán en los siguientes ejemplos.

Nota: El estudio de este método lo haremos para m, n, p y q valores enteros.

Ejemplo 1) Encuentra las soluciones o raíces de la ecuación $x^2 - x - 12 = 0$.

Solución:

En este caso $\boldsymbol{a = 1}$, $b = -1$ y $c = -12$.

Tenemos que buscar dos números m y n tal que:

$m + n = -1$ (cuya suma sea -1)

$m \bullet n = -12$ (su producto sea -12)

En este caso los números son $m = 3$ y $n = -4$, ya que $3 - 4 = -1$ y $3(-4) = -12$

La factorización buscada es $x^2 - x - 12 = (x + 3)(x - 4)$, como $x^2 - x - 12 = 0$, entonces, $(x + 3)(x - 4) = 0$.

Resolviéndola, $x + 3 = 0$ ó $x - 4 = 0$ de esto se deduce que

$x = -3$ y $x = 4$

Finalmente las raíces de la ecuación son $x_1 = -3$ y $x_2 = 4$.

COMPROBACIÓN:

Se sustituye cada valor de x en la ecuación dada y debe de resultar cero.

Si $x = -3$: $(-3)^2 - (-3) - 12 = 9 + 3 - 12 = 12 - 12 = 0$

Si $x = 4$: $(4)^2 - (4) - 12 = 16 - 4 - 12 = 16 - 16 = 0$

Ejemplo 2) Encontrar las soluciones o raíces de la ecuación, $x^2 + x + 1 = 0$.

Solución:

En este caso $\boldsymbol{a = 1}$, $b = 1$ y $c = 1$.

Buscamos dos números m y n, tal que la suma sea $b = 1$ $(m + n = 1)$ y que el producto sea $c = 1$ $(m \bullet n = 1)$.

No hay números reales que cumplan con las condiciones necesarias, entonces la ecuación no se puede factorizar, se comprobará posteriormente que las soluciones de esta ecuación no son reales.

Practica esta parte completando los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1) Encuentra las soluciones o raíces de la ecuación $x^2 + 2x - 35 = 0$.

Solución:

$$x^2 + 2x - 35 = 0.$$

En este caso tenemos: $\boldsymbol{a = 1}$, $b =$ ______ y $c =$ _______.

De nuevo tenemos que buscar dos números m y n tal que:

$m + n =$ _______ (cuya suma sea ____)

$m \bullet n =$ _______ (su producto sea ____)

Los números son $m =$ ______ y $n =$ ______, ya que,

_______ + _______ = 2 y ( )( ) = – 35

La factorización buscada es: $x^2 + 2x - 35 = (x + \quad)(x - \quad)$,

Como $x^2 + 2x - 35 = 0$, entonces, $(x + 7)(x - 5) = 0$.

Resolviéndola: $x +$ ____ $= 0$ ó $x -$ ____ $= 0$ despejando x.

$x_1 =$ y $x_2 =$

Finalmente las raíces de la ecuación son $x_1 =$ y $x_2 =$

Realiza la comprobación.

Ejercicio 2) Encuentra las raíces de la ecuación $3x^2 - 6x - 72 = 0$.

Solución:

Observa que en este caso 3 es factor de cada uno de los términos de la expresión, así que podemos dividir por 3 toda la expresión para obtener la ecuación.

$$x^2 - 2x - 24 = 0$$

Y volvemos a obtener el caso donde $\boldsymbol{a} = 1$, b = ______ y c = _______.

Buscamos dos números m y n tal que:

$m + n$ = _______ (cuya suma sea -2)

$m \cdot n$ = _______ (su producto sea -24)

Los números son m = ______ y n = ______, ya que,

_____ + _____ = -2 y ( )( ) = -24

La factorización buscada es $x^2 - 2x - 24 =$ ( )( ), como $x^2 - 2x - 24 = 0$, entonces, $(x - 6)(x + 4) = 0$.

Resolviéndola: $x -$ ____ = 0 ó $x +$ ____ = 0, y despejando a x de cada ecuación.

$x_1 =$ y $x_2 =$

Finalmente las raíces de la ecuación son $x_1 =$ y $x_2 =$

Realiza la comprobación.

Continuando con los ejemplos, caso 2: cuando $\boldsymbol{a} \neq 1$.

Ejemplo 3) Encontrar las raíces de la ecuación, $2x^2 - 5x - 12 = 0$.

Solución:

En este caso tenemos: $a = 2$, $b = -5$ y $c = -12$.

Tenemos que buscar dos números r y s tal que: $r \cdot s = a \cdot c$ y $r + s = b$

Es decir, $r \cdot s = (2)(-12) = -24$ y $r + s = -5$.

Los números que lo cumplen son -8 y 3 ya que $(-8)(3) = -24$ y $-8 + 3 = -5$.

Usándolos se reescribe el término lineal de la ecuación $-5x$, es decir, $-5x = -8x + 3x$, sustituyendo: $2x^2 - 5x - 12 = 2x^2 - 8x + 3x - 12$

Después, se factoriza la última expresión de la siguiente forma:

Como $2x^2 - 8x = 2x(x - 4)$ y $3x - 12 = 3(x - 4)$

Tenemos que: $2x^2 - 8x + 3x - 12 = 2x(x - 4) + 3(x - 4) = (x - 4)(2x + 3)$

Dado que la ecuación inicial es igual a cero, entonces, tenemos que resolver la ecuación $(x - 4)(2x + 3) = 0$.

Resolviéndola: $x - 4 = 0$ ó $2x + 3 = 0$

$x = 4$ y $x = -\frac{3}{2}$

Finalmente las raíces de la ecuación son: $x_1 = 4$ y $x_2 = -\frac{3}{2}$

COMPROBACIÓN:

Si $x = 4$: $2(4)^2 - 5(4) - 12 = 32 - 20 - 12 = 32 - 32 = 0$

Si $x = -\frac{3}{2}$: $2(-\frac{3}{2})^2 - 5(-\frac{3}{2}) - 12 = 2(\frac{9}{4}) + 5(\frac{3}{2}) - 12 = \frac{9}{2} + \frac{15}{2} - 12 = \frac{24}{2} - 12 = 0$

Ejemplo 4) Encontrar las raíces de la ecuación $12x^2 - 19x + 5 = 0$.

Solución:

Los valores de los coeficientes numéricos son $a = 12$, $b = -19$ y $c = 5$.

Tenemos que buscar dos números r y s tal que: $r \bullet s = a \bullet c$ y $r + s = b$

Es decir, $r \bullet s = (12)(5) = 60$ y $r + s = -19$.

Los números buscados son -4 y -15 ya que $(-4)(-15) = 60$ y $-4 + (-15) = -19$.

Usándolos se reescribe el término lineal de la ecuación $-19x$, es decir, $-19x = -4x - 15x$, sustituyendo: $12x^2 - 19x + 5 = 12x^2 - 4x - 15x + 5$

Después, se factoriza la última expresión de la siguiente forma:

$12x^2 - 4x - 15x + 5 = 4x(3x - 1) - 5(3x - 1) = (3x - 1)(4x - 5)$

Dado que la ecuación inicial es igual a cero, entonces, tenemos que resolver la ecuación $(3x - 1)(4x - 5) = 0$.

Resolviéndola: $3x - 1 = 0$ ó $4x - 5 = 0$

Las soluciones o raíces de la ecuación son: $x_1 = \frac{1}{3}$ y $x_2 = \frac{5}{4}$.

Realiza la comprobación.

Te toca practicar completando donde sea necesario.

Ejercicio 3) Encontrar las raíces de la ecuación $7x^2 - 19x - 6 = 0$.

Solución:

En este ejercicio a = _____, b = _____ y c = _____.

Tenemos que buscar dos números r y s tal que: $r \bullet s = a \bullet c$ y $r + s = b$

Es decir, $r \bullet s$ = (____)(____) = _____ y $r + s$ = ______.

Los números buscados son ______ y _____, ya que, (_____)(____) = ______ y _____ + ______ = ______.

Usándolos se reescribe el término lineal de la ecuación $-19x$, es decir, $-19x$ = _____ + ______, sustituyendo: $7x^2 - 19x - 6$ = ________________________.

Después, se factoriza la última expresión de la siguiente forma:

$7x^2$ – ____x + ____x – 6 = $7x$ (x –   ) + 2(x –   ) = $(x - 3)(7x + 2) = 0$

Dado que la ecuación inicial es igual a cero, entonces, tenemos que resolver la ecuación $(x - 3)(7x + 2) = 0$.

Resolviéndola: $x - 3 = 0$ ó $7x + 2 = 0$, de esto se deduce que

x = _________ y x = ___________

Finalmente las raíces de la ecuación son x_1 = _______ y x_2 = ______

Realiza la comprobación.

Ejercicios 1.3.1

Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones por el método de **Factorización** cuando esto sea posible.

1. $x^2 + 7x + 6 = 0$
2. $y^2 - 12y + 11 = 0$
3. $x^2 - 16x + 64 = 0$
4. $x^2 + 10x + 25 = 0$
5. $x^2 - 4x + 3 = 0$
6. $y^2 - 9y + 15 = 0$
7. $x^2 + x + 7 = 0$
8. $2x^2 - 5x + 13 = 0$
9. $m^2 - 8m + 18 = 0$
10. $x^2 - 5x - 14 = 0$
11. $x^2 + 2x - 63 = 0$
12. $x^2 + 12x + 36 = 0$
13. $10x^2 + x - 2 = 0$
14. $2x^2 - x - 3 = 0$
15. $20x^2 - 13x + 2 = 0$
16. $21x^2 + 50x - 16 = 0$
17. $2x^2 + 5x - 3 = 0$
18. $5x^2 - 9x - 2 = 0$

1.3.2 Método de Completar Trinomio Cuadrado Perfecto.

Para resolver una ecuación cuadrática por el método de Completar un Trinomio Cuadrado Perfecto, la ecuación debe de estar en su forma general $ax^2 + bx + c = 0$. El procedimiento para resolverla se muestra en los siguientes ejemplos, en este método también se analizan dos casos diferentes según $a = 1$ o $a \neq 1$.

Observación: En esta parte es pertinente pedir a tu profesor que recuerde a todo el grupo la factorización de un trinomio cuadrado perfecto, es decir, $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$. Otra opción es que lo investigues en algún libro de álgebra o en internet.

Ejemplo 1) Resuelve la ecuación $x^2 + 6x + 5 = 0$.

Solución:

Paso 1. El valor de $\boldsymbol{a}$ debe ser siempre uno y positivo, en caso contrario, se divide toda la ecuación entre $\boldsymbol{a}$. En esta ecuación $\boldsymbol{a} = 1$, no es necesario hacer la división.	$x^2 + 6x + 5 = 0$
Paso 2. El término independiente se coloca del otro lado de la igualdad con el inverso aditivo.	$x^2 + 6x = -5$
Paso 3. Se completa un Trinomio Cuadrado Perfecto. Debes elevar al cuadrado la mitad del coeficiente del término lineal. Este valor se suma en ambos miembros de la ecuación.	$\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 3^2 = 9$ $x^2 + 6x + 9 = -5 + 9$ $x^2 + 6x + 9 = 4$
Paso 4. Factorizar el trinomio cuadrado perfecto, este se puede escribir como el cuadrado de un binomio.	$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2 = 4$
Paso 5. Se despeja $\boldsymbol{x}$ de la nueva ecuación.	$(x + 3)^2 = 4$ $x + 3 = \pm\sqrt{4}$ $x + 3 = \pm 2$ $x = -3 \pm 2$
Las soluciones de la ecuación son: $x_1 = -3 + 2 = -1$ y $x_2 = -3 - 2 = -5$ $x_1 = -1$ y $x_2 = -5$	

COMPROBACIÓN:

Se sustituye cada valor de x en la ecuación dada y debe de quedar igual a cero.

Si $x = -1$: $(-1)^2 + 6(-1) + 5 = 1 - 6 + 5 = 6 - 6 = 0$

Si $x = -5$: $(-5)^2 + 6(-5) + 5 = 25 - 30 + 5 = 30 - 30 = 0$

Ejemplo 2) Resuelve la ecuación $-x^2 = -3x - 18$.

Solución:

Paso 1. El valor de ***a*** debe ser siempre uno y positivo, en este caso no lo es. Para esto, a toda la ecuación la multiplicamos por (– 1).	$-x^2 = -3x - 18.$ $(-1)(-x^2) = (-3x - 18)(-1)$ $x^2 = x + 18$
Paso 2. Se agrupa los términos cuadrático y lineal de un lado de la ecuación y el término independiente del otro lado.	$x^2 - 3x = 18$
Paso 3. Se Completa el Trinomio Cuadrado Perfecto. Debes elevar al cuadrado la mitad del coeficiente del término lineal. Este valor se suma en ambos miembros de la ecuación.	$\left(\frac{-3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 18 + \frac{9}{4}$ $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{81}{4}$
Paso 4. Factorizar el trinomio cuadrado perfecto, este se puede escribir como el cuadrado de un binomio.	$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = (x - \frac{3}{2})^2$
Paso 5. Se despeja ***x*** de la nueva ecuación.	$(x - \frac{3}{2})^2 = \frac{81}{4}$ $x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{81}{4}}$ $x - \frac{3}{2} = \pm \frac{9}{2}$ $x = \frac{3}{2} \pm \frac{9}{2}$
Las soluciones de la ecuación son: $x_1 = \frac{3}{2} + \frac{9}{2} = \frac{12}{2} = 6$; $x_1 = 6$ $x_2 = \frac{3}{2} - \frac{9}{2} = -\frac{6}{2} = -3$; $x_2 = -3$	

COMPROBACIÓN:

Se sustituye cada valor de x en la ecuación dada y debe de dar una igualdad verdadera, realízala.

Completa donde sea necesario los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1) Resuelve la ecuación $-3m^2 + 6m + 24 = 0$.

Solución:

Paso 1. El valor de ***a*** debe ser siempre uno y positivo, por lo tanto, se divide a la ecuación entre – 3.	$m^2 - 2m - 8 = 0$

Paso 2. Se agrupa los términos cuadrático y lineal de un lado de la ecuación y el término independiente del otro lado.	$m^2 - 2m =$ ____
Paso 3. Se Completa el Trinomio Cuadrado Perfecto. Debes elevar al cuadrado la mitad del coeficiente del término lineal. Este valor se suma en ambos miembros de la ecuación.	$\left(\frac{\ }{2}\right)^2 =$ ______ $m^2 - 2m +$ ___ $=$ ___ $+$ ___
Paso 4. Factorizar el trinomio cuadrado perfecto que se puede escribir como el cuadrado de un binomio.	$m^2 - 2m +$ ___ $= (m \qquad)^2$
Paso 5. Se despeja $\boldsymbol{m}$ de la nueva ecuación.	$(m \qquad)^2 =$ __________ m _______ $= \pm\sqrt{\qquad}$ m _______ $= \pm$ ______ $m =$ ______ $\pm$ _______
Las soluciones de la ecuación son: $m_1 =$ ______ $+$ _______ $=$ ________ $m_2 =$ ______ $-$ _______ $=$ ________	

COMPROBACIÓN:

Si $m =$ ___:

Si $m =$ ___:

Ejercicio 2) Resuelve la ecuación $5y^2 + 6y - 56 = 0$.

Solución:

Paso 1. El valor de $\boldsymbol{a}$ debe ser siempre uno y positivo, por lo tanto, se divide a la ecuación entre ______.	$y^2 +$ ___ $y -$ ____ $= 0$
Paso 2. Se agrupa los términos cuadrático y lineal de un lado de la ecuación y el término independiente del otro lado.	$y^2 +$ ____ $y =$ ____
Paso 3. Se Completa el Trinomio Cuadrado Perfecto. Debes elevar al cuadrado la mitad del coeficiente del término lineal. Este valor se suma en ambos miembros de la ecuación.	$\left(\frac{-}{2}\right)^2 =$ ______ $y^2 +$ __ $y +$ ___ $=$ ___ $+$ ___

Paso 4. Factorizar el trinomio cuadrado perfecto que se puede escribir como el cuadrado de un binomio.	$y^2 + \_\_ y + \_\_ = (y + \_\_)^2$
Paso 5. Se despeja y de la nueva ecuación.	$(y + \_\_)^2 = \_\_$ $y + \_\_ = \pm\sqrt{\;-\;}$ $y + \_\_ = \pm \_\_$ $y = \_\_ \pm \_\_$
Las soluciones de la ecuación son: $y_1 = \_\_ + \_\_ =$ $y_2 = \_\_ - \_\_ = \_\_$	

COMPROBACIÓN:

Si $y_1 =$

Si $y_2 =$

Ejercicio 3) Resuelve la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

Solución:

Paso 1. El valor de a debe ser siempre uno y positivo, por lo tanto, la ecuación se divide entre ______.	$ax^2 + bx + c = 0$ $x^2 + \quad x + \quad = 0$
Paso 2. Se agrupa los términos cuadrático y lineal de un lado de la ecuación y el término independiente del otro lado.	$x^2 + \quad x = \_\_\_\_\_\_$
Paso 3. Se Completa el Trinomio Cuadrado Perfecto. Debes elevar al cuadrado la mitad del coeficiente del término lineal. Este valor se suma en ambos miembros de la ecuación.	$\left(\frac{\frac{\;}{\;}}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ $x^2 + \_\_ x + \_\_ = \_\_ + \_\_$
Paso 4. Factorizar el trinomio cuadrado perfecto, ya que se puede escribir como el cuadrado de un binomio.	$x^2 + \_\_ x + \_\_ = (x + \quad)^2$

Paso 5. Se despeja $\boldsymbol{x}$ de la nueva ecuación.	$(x + \quad)^2 = \_\_ + \_\_$ $(x + \quad)^2 = \frac{-4ac+b^2}{4a^2}$ $x + \quad = \pm\sqrt{\frac{\quad}{\quad}}$ $x + \quad = \pm\frac{\sqrt{\quad}}{2a}$
	$x = \quad \pm \frac{\sqrt{\quad}}{2a}$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Las soluciones de la ecuación son: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	

Ejercicios 1.3.2

Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones.

1. $x^2 + 2x - 3 = 0$
2. $x^2 - 6x + 8 = 0$
3. $x^2 - 4x - 5 = 0$
4. $x^2 + 8x + 12 = 0$
5. $x^2 + 3x + 2 = 0$
6. $y^2 + 4y - 32 = 0$
7. $x^2 - 3x + 15 = 0$
8. $x^2 - 9x + 14 = 0$
9. $m^2 + 2m + 15 = 0$
10. $x^2 + 5x + 4 = 0$
11. $x^2 + 5x + 6 = 0$
12. $x^2 - 2x + 4 = 0$
13. $x^2 + 9x + 18 = 0$
14. $x^2 - 9x + 18 = 0$
15. $x^2 - 15x + 36 = 0$
16. $x^2 = 3x + 28$
17. $-4x = -x^2 + 12$
18. $x^2 + 3x + 6 = 0$

1.3.3 Método por Fórmula General.

Como lo mostramos anteriormente, las soluciones o raíces de una ecuación de segundo grado en su forma general $ax^2 + bx + c = 0$, están dadas por la fórmula general:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En los siguientes ejercicios mostraremos paso por paso la utilización de esta fórmula para encontrar las soluciones de cada ecuación dada.

Ejemplo 1) Resuelve la ecuación $x^2 + 2x - 8 = 0$ mediante la fórmula general.

Solución:

La ecuación está dada en su forma general donde $a = 1$, $b = 2$ y $c = -8$.

Paso 1. Sustituyendo en la fórmula los valores de a, b y c:	$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-8)}}{2(1)}$
Paso 2. Realizando las operaciones indicadas:	$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-(-32)}}{2}$ $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2}$ $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2}$
Paso 3. La primera solución se obtiene con el signo positivo.	$x_1 = \frac{-2+6}{2} = \frac{4}{2} = 2$
Paso 4. La segunda solución se obtiene con el signo negativo.	$x_2 = \frac{-2-6}{2} = \frac{-8}{2} = -4$
Paso 5. Las raíces o soluciones de la ecuación son: $x_1 = 2$ y $x_2 = -4$	

COMPROBACIÓN:

Se sustituye cada valor de x en la ecuación dada y debe de quedar igual a cero.

Si $x = 2$: $(2)^2 + 2(2) - 8 = 4 + 4 - 8 = 8 - 8 = 0$

Si $x = -4$: $(-4)^2 + 2(-4) - 8 = 16 - 8 - 8 = 16 - 16 = 0$

Ejemplo 2) Resuelve la ecuación $2x^2 + 4x + 5 = 0$ mediante la fórmula general.

Solución:

La ecuación está en su forma general, donde a = 2, b = 4, c = 5.

Paso 1. Sustituyendo en la fórmula los valores de a, b y c:	$x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(2)(5)}}{2(2)}$
Paso 2. Realizando las operaciones indicadas:	$x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 40}}{4}$ $x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{-24}}{4}$
Paso 3. Como la raíz cuadrada de un número con signo negativo no existe en los números reales, concluimos que la ecuación No tiene soluciones reales.	Soluciones No reales

Para comprender mejor este método, completa los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1) Resuelve la ecuación $x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{1}{3} = 0$ mediante la fórmula general.

Solución:

Se puede resolver la ecuación usando los valores a = 1, $b = \frac{2}{5}$, y $c = -\frac{1}{3}$, pero se te pueden complicar los cálculos aritméticos al sustituir en la fórmula general.

Es mejor expresar la ecuación en una forma más simple, para esto, multiplicamos toda la ecuación por 15 que es el mínimo común múltiplo de los denominadores 5 y 3, y se obtiene la ecuación $15x^2 + 6x - 5 = 0$.

Para esta ecuación tenemos que a = 15, b = 6 y c = – 5.

Paso 1. Sustituyendo estos valores en la fórmula general.	$x_{1,2} = \dfrac{-\quad \pm \sqrt{(\quad)^2 - 4(\quad)(\quad)}}{2(\quad)}$
Paso 2. Haciendo operaciones aritméticas.	$x_{1,2} = \dfrac{\pm\sqrt{\qquad -(\qquad)}}{30}$ $x_{1,2} = \dfrac{\pm\sqrt{\qquad +\qquad}}{30}$ $x_{1,2} = \dfrac{\pm\sqrt{\qquad}}{30}$ $x_{1,2} = \dfrac{\pm\qquad\sqrt{\qquad}}{30}$
Paso 3. La primera solución se obtiene usando el signo positivo del radical.	$x_1 = \dfrac{+\qquad\sqrt{\qquad}}{30} =$

Paso 4. La segunda solución se obtiene usando el signo negativo del radical.	$x_2 = \frac{- \quad \sqrt{\quad}}{30} =$
Paso 5. Las raíces de la ecuación son: $x_1 =$, $x_2 =$	

COMPROBACIÓN:

Si $x_1 =$:

Si $x_2 =$:

En algunas ocasiones se nos puede presentar una ecuación cuadrática en forma más complicada como en los siguientes ejercicios.

Ejercicio 2) Resolver la ecuación $2x(5 + 3x) - 9x + 6 = 7(5 - x)(5 + x)$

Solución:

En estos casos primero se debe simplificar la ecuación haciendo las operaciones indicadas, reduciendo los términos semejantes e igualando la ecuación a cero.

$2x(5 + 3x) - 9x + 6 = 7(5 - x)(5 + x)$

$10x + 6x^2 - 9x + 6 = 7(25 + 5x - 5x - x^2)$

$6x^2 + x + 6 = 7(25 - x^2)$

$6x^2 + x + 6 = 175 - 7x^2$

$6x^2 + x + 6 - 175 + 7x^2 = 0$

$13x^2 + x - 169 = 0.$

Los valores de los coeficientes son los siguientes, $a = 13$, $b = 1$ y $c = -169$.

Paso 1. Sustituyendo los valores en la fórmula general.	$x_{1,2} = \frac{- \quad \pm \sqrt{(\quad)^2 - 4(\quad)(\quad)}}{2(\quad)}$
Paso 2. Haciendo operaciones aritméticas.	$x_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{\quad - (\quad)}}{26}$ $x_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{\quad + \quad}}{26}$ $x_{1,2} = \frac{\pm}{26}$

Paso 3. La primera solución se obtiene usando el signo positivo.	$x_1 = \frac{\quad + \quad}{26} =$
Paso 3. La segunda solución se obtiene usando el signo negativo.	$x_2 = \frac{\quad - \quad}{26} =$

COMPROBACIÓN:

Si $x_1 =$:

Si $x_2 =$:

Ejercicio 3) Resolver la ecuación $18 + \frac{3w}{w-1} = 2 + \frac{w+3}{w+2}$

Solución:

Transformaremos la ecuación a una forma más simple.

Multiplicando a toda la ecuación por $(w - 1)(w + 2)$ tenemos:

$$18(w-1)(w+2) + 3w(w+2) = 2(w-1)(w+2) + (w+3)(w-1)$$

$$18(w^2 + w - 2) + 3w^2 + 6w = 2(w^2 + w - 2) + w^2 + 2w - 3$$

$$18w^2 + 18w - 36 + 3w^2 + 6w = 2w^2 + 2w - 4 + w^2 + 2w - 3$$

$$21w^2 + 24w - 36 = 3w^2 + 4w - 7$$

$$18w^2 + 20w - 29 = 0$$

Los valores de sus coeficientes son: $a = 18$, $b = 20$ y $c = -29$.

Paso 1. Sustituyendo los valores en la fórmula.	$w_{1,2} = \frac{-\quad \pm \sqrt{(\quad)^2 - 4(\quad)(\quad)}}{2(\quad)}$
Paso 2. Haciendo las operaciones aritméticas.	$w_{1,2} = \frac{-\quad \pm \sqrt{\quad -(\quad)}}{36}$ $w_{1,2} = \frac{-\quad \pm \sqrt{\quad + \quad}}{36}$

	$w_{1,2} = \frac{- \quad \pm \sqrt{\quad}}{36}$ $w_{1,2} = \frac{- \quad \pm}{36}$
Paso 3. La primera solución se obtiene con el signo positivo.	$w_1 = \frac{- \quad +}{36} =$
Paso 3. La segunda solución se obtiene con el signo negativo.	$w_2 = \frac{- \quad -}{36} =$

Realiza la comprobación.

En la comprobación el resultado no es exactamente cero porque las soluciones resultantes fueron aproximaciones.

Ejercicios 1.3.3

Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones.

1. $x^2 + 2x - 8 = 0$
2. $2x^2 + 4x - 5 = 0$
3. $-2p^2 - 5p = 6$
4. $x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{1}{3} = 0$
5. $x^2 - 3x + 2 = 0$
6. $x^2 + 6x + 8 = 0$
7. $x^2 - 9x + 20 = 0$
8. $x^2 - 3x - 10 = 0$
9. $x^2 - 6x = -5$
10. $x^2 = 13x - 36$
11. $x^2 - 36 = 0$
12. $x^2 - 6x = 0$
13. $z^2 + 17z + 72 = 0$
14. $2x^2 - 3x + 2 = 0$
15. $2y^2 - 7y + 4 = 0$
16. $6x^2 = -x + 1$
17. $2x^2 - 7x = -5$
18. $2x^2 = 4x + 1$
19. $2.07b - 3.79b + 1.34 = 0$
20. $\frac{3}{y} + \frac{2}{y-1} = 4$
21. $2(1 - x)^2 = 3(1 + 2x) + 5$

1.3.3.1 Análisis del discriminante $b^2 - 4ac$.

Las raíces o soluciones de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, se pueden encontrar utilizando la fórmula general:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A la expresión $b^2 - 4ac$ dentro del radical, se le llama **discriminante**.

Analizando el discriminante podemos conocer el número y el tipo de raíces que tiene la ecuación.

Número y naturaleza de las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

En toda ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, dependiendo del valor del discriminante $b^2 - 4ac$, se puede afirmar lo siguiente:

- Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación cuadrática **tiene dos raíces reales diferentes**.
- Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación cuadrática **tiene dos raíces iguales, se le llama raíz doble**.
- Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación cuadrática **no tiene raíces reales, son imaginarias o complejas**.

Analizaremos cada uno de estos casos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1) Indica el número y naturaleza de las raíces que tiene la ecuación cuadrática $11x = 6x^2 - 10$.

Solución:

La ecuación se ordena en su forma general: $6x^2 - 11x - 10 = 0$.

Los valores de sus coeficientes son: $a = 6$, $b = -11$ y $c = -10$

El valor del discriminante es: $b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4(6)(-10)$

$= 121 + 240 = 361$

$361 > 0$

Como el valor del discriminante es positivo, la ecuación **tiene dos raíces reales diferentes**, y son: $x_1 =$______ y $x_2 =$_______

Ejemplo 2) Indica el número y tipo de raíces que tiene la ecuación $x^2 - 8x + 16 = 0$.

Solución:

Como la ecuación está en su forma general, los valores de sus coeficientes son:

$$a = 1,\ b = -8 \ \text{ y } \ c = 16.$$

El valor del discriminante es:

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (-8)^2 - 4(1)(16) \\ &= 64 - 64 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como el valor del discriminante es 0, la ecuación **tiene dos raíces iguales**, en muchas ocasiones se dice que tiene solo una solución o raíz, si, pero es **llamada raíz doble**. Calculando las raíces para esta ecuación, estas son: $x_1 = x_2 =$______, es decir, podemos afirmar que _______ es una raíz doble.

Ejemplo 3) Indica el número y naturaleza de las raíces que tiene la ecuación cuadrática $2x^2 - 4x + 6 = 0$.

Solución:

Como la ecuación está en su forma general, los valores de sus coeficientes son:

$$a = 2,\ b = -4 \ \text{ y } \ c = 6.$$

El valor del discriminante es:

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (-4)^2 - 4(2)(6) \\ &= 16 - 48 \\ &= -32 \\ -32 &< 0 \end{aligned}$$

Como el valor del discriminante es negativo, la ecuación **no tiene raíces reales, sus raíces son imaginarias porque son números complejos**.

Practica un poco más esta parte completando los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1) Indica el número y tipo de raíces que tiene la ecuación cuadrática $2x^2 - 11x - 21 = 0$.

Los valores de sus coeficientes son: $a =$ ______, $b =$ ______ y $c =$ _______

El valor del discriminante es: $b^2 - 4ac = (\quad)^2 - 4(\quad)(\quad)$

= =

________ ____ 0

Como el valor del discriminante es __________, la ecuación **tiene** _______ **raíces** _______________________, y son: $x_1 =$, $x_2 =$

Ejercicio 2) La ecuación $25y^2 - 20y + 4 = 0$, ¿cuántas raíces tiene y de qué tipo son?

Los valores de sus coeficientes son $a =$ _______ $b =$ _______ y $c =$ ________

El valor del discriminante es: $b^2 - 4ac = (\quad)^2 - 4(\quad)(\quad)$

= =

_______ ____ 0

Como el valor del discriminante es __________, la ecuación **tiene** _______ **raíces** ______________________, y son: $y_1 =$, $y_2 =$

Ejercicio 3) Indica el número y naturaleza de las raíces de la ecuación cuadrática

$3z^2 + z + 30 = 0$.

Los valores de sus coeficientes son, $a =$ _____, $b =$ _____ y $c =$ _____

El valor del discriminante es: $b^2 - 4ac = (\quad)^2 - 4(\quad)(\quad)$

= =

________ ____ 0

Como el valor del discriminante es __________, la ecuación **tiene**______**raíces** ____________________.

Ejercicios 1.3.3.1

En cada caso indica el número y naturaleza de las soluciones de cada ecuación, analizando su discriminante.

1. $x^2 + 4x - 3 = 0$
2. $3w^2 + w + 3 = 0$
3. $2z^2 - 4z + 7 = 0$
4. $-2x^2 + x - 8 = 0$
5. $5y^2 + 3y - 7 = 0$
6. $2x^2 = 16x - 32$
7. $-3x^2 + 5x - 8 = 0$
8. $4x^2 - 8x + 6 = 0$
9. $y^2 - 22y + 121 = 0$
10. $9w^2 = -6w - 1$
11. $-2x^2 - x - 3 = 0$
12. $2x^2 - 7x + 4 = 0$
13. $5z^2 + 20z + 4 = 0$
14. $x^2 + 8x + 15 = 0$
15. $y^2 + 6y + 9 = 0$
16. $2x^2 - x = 6$
17. $-z^2 = -7z + 5$
18. $3x^2 = 18x - 27$

1.4 Aplicaciones de la Ecuación Cuadrática.

Estas listo para resolver problemas cuyo planteamiento es una ecuación cuadrática, porque ya puedes encontrar sus soluciones con el método que más te agrade. Para empezar, ya puedes resolver los 11 problemas planteados al inicio de esta unidad. Y para ampliar tus estrategias de resolución de problemas, analicemos otros ejemplos más en los cuales debes ir completando donde sea necesario.

Ejemplo 1) Una frutería vende 300 kilos diarios de plátanos, a \$12 por kilo. El gerente de ventas observa que por cada \$0.50 de descuento, se venden 50 kilos más de plátano. ¿Cuál deberá ser el precio del kilo de plátano, si se quiere tener una venta semanal de \$30800?

Solución:

Si x representa el número de descuentos de \$0.50 realizados.

Las ventas diarias deben ser de: $V=\frac{30800}{7} = 4400$, se venden diariamente \$4400

Si se hacen x descuentos, el precio del kilo de plátano debe ser de $12 - 0.5x$, y la cantidad de kilos de plátano vendidos debe ser de $300 + 50x$.

Las ventas diarias están dadas por: $(12 - 0.5x)(300 + 50x)$

Si igualamos la venta diaria a la cantidad que se desea obtener, se tiene la ecuación:

$$(12 - 0.5x)(300 + 50x) = 4400$$

Después de realizar la multiplicación indicada y de igualar la ecuación a cero, se simplifican los términos semejantes y se llega a:

$$\_\_\_x^2 + \_\_\_\_\_x - \_\_\_\_\_\_ = 0$$

Al resolver esta ecuación, sus raíces son: $x_1 =$ _______ y $x_2 =$ _______

Respuesta: Para que la venta semanal sea de \$30800 puede haber dos precios del kilo de plátanos, si se hacen 2 descuentos el precio es de \$11, pero si se hacen 16 descuentos el precio es de \$4.

COMPROBACIÓN:

Sí $x = 2$ descuentos:

Precio del plátano: $12 - 0.5x = 12 - 0.5(2) = 12 - 1 = 11$, es decir \$11 por kilo.

La cantidad de kilos de plátano que se deben vender son: $300 + 50x = 300 + 50(2) = 300 + 100 = 400$, 400 kilos de plátano.

Las ventas diarias son: $(12 - 0.5x)(300 + 50x) = (11)(400) = 4400$, \$4400 diarios

Las ventas semanales son de: $(7)(4400) = 30800$, \$30800

Sí $x = 16$ descuentos:

El precio del plátano es: $12 - 0.5x = 12 - 0.5(16) = 12 - 8 = 4$, es decir \$4 por kilo.

La cantidad de kilos de plátano que se deben vender son: $300 + 50x = 300 + 50(16) = 300 + 800 = 1100$, 1100 kilos de plátano.

Las ventas diarias son de: $(12 - 0.5x)(300 + 50x) = (4)(1100) = 4400$, \$4400.00

Las ventas semanales son de: $(7)(4400) = 30800$, \$30800.00

Ejemplo 2) Sandra vive a 360 km de la casa de su mamá. Si viaja en su coche 12 km/hora más rápido de lo usual, llega a la casa de su mamá una hora antes. ¿A qué velocidad maneja Sandra normalmente su coche?

Solución:

Si x es la velocidad normal, el tiempo que hace para ir a la casa de su mamá es:

$$t = \frac{360}{x}$$

Y como se hace una hora menos, si maneja 12 km/hora más rápido, entonces, el tiempo que hace es: $t - 1 = \frac{360}{x+12}$

Al despejar t en esta última ecuación tenemos $t = 1 + \frac{360}{x+12}$, al igualar las dos expresiones de t, se tiene la ecuación, $\frac{360}{x} = 1 + \frac{360}{x+12}$.

Multiplicando toda la ecuación por $x(x + 12)$ se obtiene la ecuación:

$$360(x + 12) = x(x + 12) + 360x$$

Después de hacer las multiplicaciones, simplificar los términos semejantes e igualar a cero tenemos la ecuación cuadrática: $x^2 +$ ______x – _______ = 0

Las raíces de la ecuación son: x_1 = _______ x_2 = _________.

Respuesta: Sandra maneja normalmente su coche a 60 km/h.

El valor de x = ________ no es solución del problema ya que no hay velocidades negativas.

COMPROBACIÓN:

Sí x = ______:

Tiempo que hace para ir a la casa de su mamá es: $t = \frac{360}{60} = 6$ horas

Tiempo que hace si maneja 12 km/hora más rápido es:

$t = \frac{360}{60 + 12} = \frac{360}{72} = 5$ que corresponde a una hora menos.

Ejemplo 3) Un deportista caminó 36 km en un cierto número de horas. Sí hubiese caminado 3 km más por hora, habría tardado 6 horas menos en recorrer la misma distancia. ¿Cuántas horas ha estado caminando?

Solución:

Si v es la velocidad del deportista y h son las horas que duró la caminata, la velocidad a la que recorrió el camino es: $v = \frac{36}{h}$

Si hubiese caminado 3 km más por hora, aumenta su velocidad, que sería $v + 3$; pero hubiera tardado 6 horas menos, es decir, su tiempo hubiese sido $h - 6$. Entonces la nueva velocidad del recorrido sería: $v + 3 = \frac{36}{h-6}$

Al despejar v se tiene: $v = \frac{36}{h-6} - 3$

Igualando los dos valores de v se tiene la ecuación: $\frac{36}{h} = \frac{36}{h-6} - 3$

Multiplicando ambos miembros por $h(h - 6)$ se obtiene la ecuación:

$$36(h - 6) = 36h - 3h\,(h - 6)$$

Al hacer las multiplicaciones indicadas, simplificar e igualar a cero, se llega a la ecuación cuadrática: _____h^2 + _______h + ______ = 0

Y al resolverla se obtienen las raíces h_1 = ________, h_2 = _______

Respuesta: El deportista ha estado caminando 12 horas.

El valor de h_1 = ________ no es solución del problema, ya que no podemos considerar tiempos negativos.

COMPROBACIÓN:

Para h_2 = ________, sustituyendo en $v = \frac{36}{h}$ se tiene que v = 3 km

Efectivamente, si en 12 hrs recorrió 36 km, su velocidad era de 3 km/h. Por otro lado, si hubiese caminado 3 km más por hora, su velocidad sería de 6 km/h, así que los 36 km los recorrería en 6 horas, que son 6 horas menos de las que ha estado caminando.

Ejemplo 4) Carlos reparte 96 revistas entre sus amigos, dándole a cada uno tantas revistas como amigos son, más 4 revistas. ¿Cuántos amigos tiene Carlos?

Solución:

Sí x el número de amigos, el número de revistas para cada amigo es $x + 4$.

Entonces el producto del números de amigos por las revistas para cada uno debe ser 96 tenemos: $x(x + 4) = 96$.

Al hacer la multiplicación indicada queda $x^2 + 4x = 96$, e igualando la ecuación a cero se tiene la ecuación de segundo grado: x^2 + ______ x – _______ = 0.

Resolviendo la ecuación, sus raíces son: x_1 = ________ y x_2 = _______.

El valor de x_1 = _______ no se es solución del problema ya que no podemos tener un número negativo de amigos.

Respuesta: Para x_2 = _____ tenemos la solución del problema, son ____ amigos.

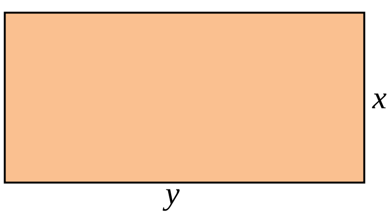
COMPROBACIÓN:

Si Carlos tiene ___ amigos, a cada uno le dio ___ + 4 = ____ revistas.

Ejemplo 5) Determina la longitud de los lados de un terreno rectangular sabiendo que su semi-perímetro (mitad del perímetro) es 30 m y su área es 221 m^2.

Solución:

Un dibujo siempre es de gran ayuda para comprender mejor el problema:



Sea y el lado mayor y x el lado menor del terreno, su semi-perímetro es igual a $x + y = 30$, y su área igual a $221 = x \cdot y$.

Despejando y del semi-perímetro se obtiene $y = 30 - x$.

Este valor se sustituye en el área y tenemos: $x(30 - x) = 221$.

Al hacer la multiplicación indicada, igualando a cero y multiplicando por – 1 se obtiene la ecuación cuadrática ____ x^2 – _____ x + ______ = 0.

Resolviéndola, sus raíces son: x_1 = ________ y x_2 = _______.

Si x = _____ entonces y = 30 – ______ = ________.

Si x = _____ entonces y = 30 – ______ = ________.

Respuesta: Las dimensiones del terreno son: largo 17 metros, ancho 13 metros.

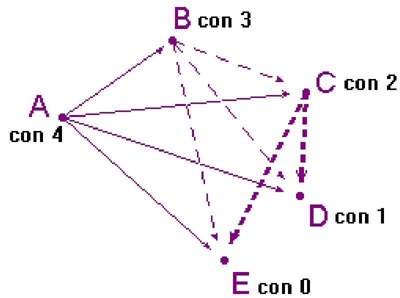
COMPROBACIÓN:

Semi-perímetro: _____ + ______ = 30 Área: ____(_______) = 221

Ejemplo 6) En un torneo de ajedrez cada maestro juega una vez con cada uno de los restantes. Si en total se juegan 45 partidas. ¿Cuántos jugadores toman parte en el torneo?

Solución:

Un diagrama nos ayuda a comprender mejor el problema. Suponiendo que son 5 maestros jugadores, A, B, C, D y E, entonces habrá un total de 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 10 partidas.



Supongamos que hay x maestros en el torneo.

El total de partidas será: $x + (x - 1) + (x - 2) + \ldots + 2 + 1 + 0 = \frac{x(x-1)}{2}$ (te toca investigar porque se cumple esta igualdad)

y como en total son 45 partidas, se puede establecer la ecuación: $\frac{x(x-1)}{2} = 45$

Que es equivalente a: $x(x - 1) = 90$.

Haciendo la multiplicación e igualando a cero se tiene la ecuación:

$$\_\_\_x^2 - \_\_\_ x - \_\_\_\_\_ = 0$$

Resolviéndola, sus raíces o soluciones son: x_1 = _______ y x_2 = ________.

Respuesta: Toman parte en el torneo ______ jugadores, ya que para el problema no tiene sentido un número negativo.

COMPROBACIÓN:

Primer maestro juega con 9, segundo maestro juega con 8, etc.

En total hay 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 45 partidas en total.

Ejemplo 7) Un grupo de abejas, cuyo número era igual a la raíz cuadrada de la mitad de todo su enjambre, se posó sobre un jazmín, habiendo dejado muy atrás a $\frac{8}{9}$ del enjambre; sólo una abeja del mismo enjambre revoloteaba en torno a un loto, atraída por el zumbido de una de sus amigas que cayó imprudentemente en la trampa de la florecilla, de dulce fragancia. ¿Cuántas abejas formaban el enjambre?

Solución:

Supongamos que x es el número de abejas en el enjambre.

La raíz cuadrada de la mitad del enjambre es $\sqrt{\frac{x}{2}}$

Los $\frac{8}{9}$ del enjambre es $\frac{8x}{9}$.

Tomemos en cuenta las 2 abejas que se separaron del enjambre.

La ecuación cuya solución resuelve el problema es: $\sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{8}{9}x + 2 = x$

Encontraremos una ecuación equivalente más sencilla.

Pasando el término lineal y el independiente al otro lado de la igualdad nos da:

$$\sqrt{\frac{x}{2}} = x - \frac{8}{9}x - 2$$

$$\sqrt{\frac{x}{2}} = \frac{1}{9}x - 2$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación: $\frac{x}{2} = \left(\frac{1}{9}x - 2\right)^2$

Multiplicando la ecuación por 2, tenemos: $x = 2\left(\frac{x}{9} - 2\right)^2$

Desarrollando el cuadrado del binomio: $x = 2(\frac{1}{81}x^2 - \frac{4}{9}x + 4)$

Al hacer la multiplicación por 2 tenemos: $x = \frac{2x^2}{81} - \frac{8x}{9} + 8$

Finalmente multiplicando a toda la ecuación por 81 e igualando a cero tresulta la ecuación cuadrática: ______x^2 – ______ x + _______= 0.

Las soluciones o raíces de la ecuación son: x_1 = ______ y x_2 = ______

Respuesta: Las abejas que forman el enjambre son ______, no puede haber _____ abejas ya que es ilógico tener fracciones de abejas.

COMPROBACIÓN:

La raíz cuadrada de la mitad del enjambre es $\sqrt{\frac{72}{2}} = 6$

Los $\frac{8}{9}$ del enjambre es $\frac{8(72)}{9} = 64$

Más las 2 abejas que se separaron del enjambre, son en total 72 abejas.

Ejercicios 1.5

Encuentra el modelo matemático y la solución para cada uno de los siguientes problemas.

1) Un granjero desea cercar un terreno rectangular de 46 metros de perímetro. Un río corre a lo largo de un lado mayor, por lo cual no cercará ese lado. Encontrar cuántos metros de cerca debe comprar para cercar los tres lados del terreno se éste tiene un área de 112 m^2.

2) Si se aumenta en 5 cm el lado de un cuadrado, su área es 94 cm^2 menos que el doble del área original. Calcular el área y perímetro del cuadrado inicial.

3) Claudia conduce su automóvil a una velocidad constante, recorre una distancia de 300 km, invirtiendo un determinado tiempo. Si incrementara la velocidad en 25 km/hora, el tiempo requerido sería 2 horas menor. ¿Cuál es el tiempo que invierte Claudia sin incrementar la velocidad?

4) Daniela reparte 35 revistas entre sus amigos, dándole a cada uno tantas revistas como amigos son más dos revistas. ¿Cuántos amigos tiene Daniela?

5) Determina la longitud de los lados de un rectángulo sabiendo que su semi-perímetro es 25 m y su área es 150m^2.

6) En un torneo de ajedrez cada maestro juega una vez con cada uno de los restantes. Si en total se juegan 105 partidas. ¿Cuántos jugadores toman parte en el torneo?

7) Un grupo de abejas cuyo número era igual a la raíz cuadrada de la mitad de todo su enjambre, se posó sobre un jazmín, habiendo dejado muy atrás a $\frac{59}{64}$ del enjambre; solo una abeja del mismo enjambre revoloteaba en torno de un loto, atraída por el zumbido de una de sus amigas que cayó imprudentemente en la trampa de la florecilla de dulce fragancia. ¿Cuántas abejas formaban el enjambre?

8) Una compañía de soldados de 180 hombres está dispuesta en filas. El número de soldados en cada fila es 8 más que el número de filas que hay. ¿Cuántas filas hay y cuántos solados en cada fila?

9) Se han comprado gomas de borrar por un total de $60. Si se hubieran comprado tres gomas más, el comerciante habría hecho un descuento de $1 en cada una, y el precio total habría sido el mismo. ¿Cuántas gomas se compraron?

10) Dos obreros tardan 12 horas en hacer un trabajo. ¿Cuánto tardarían en hacerlo separadamente, si uno tarda 5 horas más que el otro?

11) La maestra de Jorge le dejó el trabajo de construir una caja de cartón abierta. La caja debe de tener la base cuadrada, los lados de 9 cm de altura y una capacidad de 5184 cm^2. Encontrar las dimensiones de la pieza de cartón mínima que debe comprar para construir la caja.

12) Un grupo de estudiantes compró una calculadora graficadora que costó $1200. El dinero que paga cada estudiante excede en 194 al número de estudiantes que hicieron la compra. ¿Cuántos estudiantes compraron la calculadora graficadora?

13) Omar compró varias paletas por $24, el precio de cada una es el mismo. Si cada paleta le hubiese costado $1 menos, podría haber comprado 4 paletas más con el mismo dinero ¿Cuántas paletas compró Omar y a qué precio?

14) Un avión vuela entre dos ciudades separadas 300 km. Cuando el viento sopla a favor a una velocidad de 30 km/h, el avión alcanza su destino media hora antes. ¿Cuál es la velocidad del avión?

15) Silvia compró varios libros por la cantidad de $540, el precio de cada uno es el mismo. Sí hubiera comprado 6 libros menos por la misma cantidad, cada libro le hubiera costado $3.00 más. ¿Cuántos libros compró y cuánto costó cada libro?

A U T O E V A L U A C I O N

Con esta evaluación verificarás si realmente has adquirido los conocimientos básicos necesarios para aprobar esta unidad. Para hacer esta evaluación, es necesario que la resuelvas sin consultar algún texto durante la solución.
Esperamos que esta autoevaluación la termines en 1½ hora como máximo.

ENCONTRAR LAS SOLUCIONES DE LAS SIGUIENTES ECUACIONES:

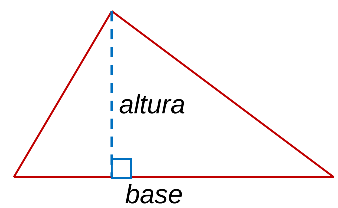
1) $6x^2 + 20x = 0$

2) $3y^2 - 42 = 0$

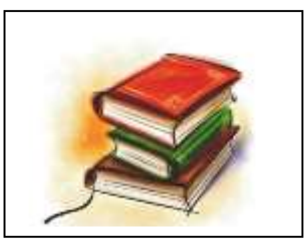
3) $4(3 - x)(3 + x) - 6(1 - x)^2 = 3x + 12$

4) Analizando su discriminante, indica el número y la naturaleza de las soluciones de la ecuación $x^2 - 9x - 36 = 0$.

RESOLVER LOS SIGUIENTES PROBLEMAS:



5) La altura de un triángulo es 5 cm menor que la longitud de la base, si el área del triángulo es de 63 cm^2, encontrar la longitud de su altura y la de su base.



6) Ana compró varios comics por $540, cada comic cuesta lo mismo. Si hubiese comprado 6 comics menos por el mismo dinero, cada comic le habría costado $3 más. ¿Cuántos comics compró y cuanto le costó cada uno?

ESCALA:
Para considerar si has adquirido los aprendizajes de esta unidad, es necesario que resuelvas correctamente todos los ejercicios.
Si resuelves bien 3 o menos, tienes que volver a estudiar con mayor conciencia esta unidad, y hacer todos los ejercicios.
Si contestas bien 4 ejercicios has logrado aprender sólo los conocimientos básicos, pero si resolviste 5 o 6 vas avanzando bien en tu estudio.

BIBLIOGRAFÍA.

Miller, Charles D., Heeren, Vern E., Hornsby, John. (2013). *Matemática: razonamiento y aplicaciones.* (12ª. ed.) México: Pearson. Addison Wesley.

Swokowski, E. y Cole, J. (2011). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica.* México: Cengage.

Smith, S., Charles R., Dossey J., Keedy M., y Bittinger M., (2001). *Álgebra.* México: Pearson.

Olguín, G., Popoca, MV., Ortíz S., et al. (2011). Paquete para la evaluación extraordinaria del curso de Matemáticas I. México: CCH Oriente, UNAM.

Citas de recursos electrónicos:

Introducción a las ecuaciones cuadráticas, obtenido el 31 de agosto de 2016, de https://www.youtube.com/watch?v=hAL4hx26n60&t=743s

Ecuación Cuadrática, método de factorización, obtenido el 23 de septiembre de 2016, de https://www.youtube.com/watch?v=FTAyKcvWFnY

Ecuación Cuadrática, método de completar trinomio cuadrado perfecto, obtenido el 31 de agosto de 2016, de http://www.youtube.com/watch?v=oKO3DvsF2I8&feature=related

Ecuación Cuadrática, soluciones con la fórmula general, obtenido el 23 de septiembre de 2016, de https://www.youtube.com/watch?v=sdWh5CnYIX4

Aplicaciones de ecuaciones cuadráticas parte I, obtenido el 10 de septiembre de 2016, de https://www.youtube.com/watch?v=Am5NZfmBgq4&feature=related

Aplicaciones de ecuaciones cuadráticas parte II, obtenido el 10 de septiembre de 2016, de https://www.youtube.com/watch?v=C-MIecfEJ8Q

ANEXO COMPLEMENTARIO.

1) ¿QUIÉN TIENE?..., YO TENGO …. de ecuaciones cuadráticas.

Este juego permite consolidar conceptos ya trabajados anteriormente. Está pensada para que nuestros estudiantes adquieran cierta agilidad en el manejo de varios de los conceptos abordados en la unidad 1 de Matemáticas 2 del CCH.

Materiales: Son un total de 26 cartas. Para elaborarlas se deberá pegar el anverso y el reverso correspondientes ya que están en orden. Se recomienda hacer las tarjetas en cartulina plastificada para su mejor conservación.
Las cartas llevan por un lado una pregunta que empieza siempre con: ***¿Quién tiene …?*** Y por el otro lado una respuesta que inicia con la frase: ***Yo tengo …***, esta puede ser un número o una expresión algebraica. La cadena se cierra, es decir cada pregunta de una tarjeta, tiene una respuesta y sólo una que aparece en el reverso de otra tarjeta.

Metodología: Se juegan con grupos de 25 alumnos, a cada alumno se le da una carta. Se elige un alumno al azar para que inicie leyendo la pregunta que tiene su carta, esta se debe lee lentamente dos veces si es necesario. La respuesta a su pregunta esta en otra carta, que a su vez trae otra pregunta, la leerá la pregunta quien la tenga, y así sucesivamente.
Ganará el alumno que primero termine de leer sus dos cartas.

Aprendizaje: Practicar y reforzar varios de los conceptos sobre ecuaciones cuadráticas, este juego motiva y prepara al alumno para continuar con sus clases de matemáticas.

Las cartas son las siguientes:

¡Yo lo tengo! es:

-11

¿Quién tiene una solución de la ecuación cuadrática

$(x - 1)(x - 4) = 0$?

¡Yo lo tengo! es:

1

¿Quién tiene una solución de la ecuación cuadrática

$x^2 - 36 = 0$?

¡Yo lo tengo! es:

6

¿Quién tiene una solución de la ecuación cuadrática

$$3x^2 - 6 = 0?$$

¡Yo lo tengo! es:

$$\sqrt{2}$$

¿Quién tiene el valor del discriminante de la ecuación cuadrática

$$x^2 + 3x + 1 = 0?$$

¡Yo lo tengo! es:

5

¿Quién tiene el desarrollo de la expresión

$(x - 4)^2 = ?$

¡Yo lo tengo! es:

$x^2 - 8x + 16$

¿Quién tiene el resultado del producto

$(x + 2)(x - 2) = ?$

¡Yo lo tengo! es:

$x^2 - 4$

¿Quién tiene el valor del discriminante de la ecuación cuadrática

$2x^2 - x + 1 = 0$?

¡Yo lo tengo! es:

-7

¿Quién tiene una solución de la ecuación cuadrática

$2(x + 5)^2 = 0$?

¡Yo lo tengo! es:

-5

¿Quién tiene una solución de la ecuación cuadrática

$$x^2 - 2x = 0?$$

¡Yo lo tengo! es:

2

¿Quién tiene el número que se suma a

$$x^2 + 6x + \_\_\_\_$$

para completar un Trinomio Cuadrado Perfecto?

¡Yo lo tengo! es:

9

¿Quién tiene el valor del <u>discriminante</u> de la ecuación cuadrática

$5x^2 - 4x + 1 = 0$?

¡Yo lo tengo! es:

-4

¿Quién tiene una solución de la ecuación cuadrática

$(x + 8)^2 = 0$?

¡Yo lo tengo! es:

-8

¿Quién tiene una solución de la ecuación cuadrática

$(x - 3)(x + 1) = 0$?

¡Yo lo tengo! es:

3

¿Quién tiene el valor del <u>discriminante</u> de la ecuación cuadrática

$x^2 - 3x - 1 = 0$?

¡Yo lo tengo! es:

13

¿Quién tiene la factorización de la expresión

$$x^2 - 25 = ?$$

¡Yo lo tengo! es:

$$(x + 5)(x - 5)$$

¿Quién tiene una solución de la ecuación cuadrática

$$5(x - 4)^2 = 0?$$

¡Yo lo tengo! es:

4

¿Quién tiene el desarrollo de la expresión

$(x - 3)^2 = ?$

¡Yo lo tengo! es:

$x^2 - 6x + 9$

¿Quién tiene el valor del <u>discriminante</u> de la ecuación cuadrática

$3x^2 + 5x - 1 = 0$?

¡Yo lo tengo! es:

37

¿Quién tiene una solución de la ecuación cuadrática

$x^2 - 7x = 0$?

¡Yo lo tengo! es:

7

¿Quién tiene el número que se suma a

$x^2 - 10x +$ ____

para completar un Trinomio Cuadrado Perfecto?

¡Yo lo tengo! es:

25

¿Quién tiene una raíz de la ecuación cuadrática

$$x^2 - 16x + 64 = 0?$$

¡Yo lo tengo! es:

8

¿Quién tiene el valor del <u>discriminante</u> de la ecuación cuadrática

$$x^2 - 6x + 6 = 0?$$

¡Yo lo tengo! es:

12

¿Quién tiene una solución de la ecuación cuadrática

$(x + 6)(x + 2) = 0$?

¡Yo lo tengo! es:

-2

¿Quién tiene la factorización de la expresión

$x^2 - 9 =$?

¡Yo lo tengo! es:

$(x + 3)\ (x - 3)$

¿Quién tiene una raíz de la ecuación cuadrática

$x^2 + 9x + 18 = 0$?

¡Yo lo tengo! es:

-3

¿Quién tiene el valor del <u>discriminante</u> de la ecuación cuadrática

$x^2 - 3x + 5 = 0$?