UNIDAD 1

SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

OBJETIVOS DE ESTA UNIDAD

Al finalizar la unidad habrás logrado:

- Ampliar el concepto de Sistema de Ecuaciones.
- Extender tus métodos algebraicos de solución.
- Reafirmar el significado algebraico y gráfico de la solución de un sistema.
- Proporcionar una herramienta para el manejo del método analítico.
- Avanzar en la práctica de la operatividad algebraica.

INTRODUCCIÓN

En pleno siglo XXI en una comunidad indígena, existe aún el trueque:

- Un chivo y un burro se cambian por un caballo.
- Un burro se cambia por un chivo y un potrillo.
- Por tres potrillos te dan un caballo.

Un habitante cambió un burro por chivos solamente, ¿cuántos chivos recibió?

Con el estudio de esta unidad generalizarás los procedimientos algebraicos de solución para Sistemas de Ecuaciones ya que ahora trabajarás con sistemas que incorporan más ecuaciones e incógnitas, o bien que incluyen ecuaciones cuadráticas. Por otra parte, se te presenta una nueva representación de los objetos geométricos que estudiarás desde otras perspectivas más propicias para la generalización y con ello, aumentan también las posibilidades de su tratamiento y aplicación, tanto en matemáticas, como en otras ramas del conocimiento. De esta forma retomaras conocimientos que ya trabajaste en semestres anteriores, los cuales ampliarás o les darás un nuevo tratamiento.

Es importante resaltar que los conocimientos adquiridos en esta unidad, apoyarán algebraicamente el estudio y resolución de problemas (como el que se menciona al principio de la introducción), también apoyarán otras situaciones que se tratarán en las unidades posteriores.

En cada tema se resuelven ejemplos detalladamente y se proponen ejercicios para que los resuelvas y refuerces lo estudiado, y al final de la unidad se dan las respuestas a estos ejercicios. También se te propone resolver un examen de autoevaluación que servirá para que tu mismo evalúes en que medida has aprendido el tema.

PROBLEMA INTRODUCTORIO

Toño es un muchacho de tu edad y es bastante inteligente, la casa donde vive es muy chica y muy vieja. Sus papás por fin completaron para dar el enganche de una casa más nueva y más grande. Era la hora de la cena y estaban todos alrededor de la mesa, Toño sus papás y su hermanita Didí.

Mamá: Antes de ir a dormir quisiera escuchar su opinión de cómo les gustaría que fuera nuestra nueva casa.

Papá: Buena idea, ya que tenemos que empezar a buscarla lo más pronto posible.

Didí: No, no, ¡yo no me quiero cambiar!.

Toño: No seas tonta Didí, no ves que en esta casa ya no cabe ni un alfiler, además se está cayendo de vieja.

Papá: No empiecen a discutir y pensemos en la propuesta de su mamá.

Didí: Bueno, a mi me gustaría que fuera rosa y con un jardín grandote para jugar.

Toño: ¡Hay Didí tú y tu color rosa!, pero a mi me gustaría que tuviera muchas ventanas.

Mamá: Claro, ya que debe de tener buena iluminación y buena ventilación, ¿cuántas ventanas te gustarían?

Toño se quedo pensando y con una pícara sonrisa dijo:

Toño: Me gustaría que tuviera un total de 132 ventanas, de tal forma que en la parte de enfrente debe de tener el doble de ventanas que en la parte de atrás, y en los costados el triple de ventanas que en la fachada y la parte trasera juntas.

Papá: ¡Toño, no empieces con tus acertijos!

Y los papás se miraron con preocupación ya que no sabían cuantas ventanas deben de ir en la fachada, cuántas atrás y cuántas a los lados.

¿Podrías ayudar a los papás de Toño para que sepan cuantas ventanas deben de ir en cada lado de la casa?

Si tu respuesta es NO, te invitamos a estudiar esta unidad y antes de terminarla creemos que ya tendrás la respuesta.
Pero si tu respuesta es SI te invitamos a contestar la autoevaluación que viene al final de la unidad y si lo apruebas continúa con la siguiente unidad.

1.1 SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES DE 2 x 2.

Recuerda que un Sistema de Ecuaciones Lineales de 2x2 es de la forma :

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$

$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

donde a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , c_1 , c_2 son números reales y x, y son las variables o incógnitas. Y cada una de estas ecuaciones representa una línea recta.

Un Sistema de ecuaciones lineales de 3x3 es de la forma:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$

$$a_3 x + b_3 y + c_2 z = d_3$$

donde a_1 , a_2 , a_3 , b_1 , b_2 , b_3 , c_1 , c_2 , c_3 , d_1 , d_2 , d_3 son números reales y x, y, z son las variables o incógnitas. Y cada una de estas ecuaciones representa un plano en tres dimensiones.
De esta forma puedes generalizar a sistemas de 4x4 , 5x5, etc.

A estos sistemas según su solución se le llama **consistente** si el sistema tiene una solución o una infinidad de soluciones, e **inconsistente** si no tiene solución.

También debes de tomar en cuenta el concepto de sistemas equivalentes, ya que para encontrar la solución de un sistema ya sea de 2x2, 3x3, 4x4, etc se puede hace por medio del uso de sistemas equivalentes.

Estamos listos para recordar como encontrar la solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales de 2x2, y al mismo tiempo iremos trazando las gráficas de cada ecuación para ver si existe alguna relación con sus soluciones. Empezaremos por el método de eliminaciones sucesivas.

1.1.1 MÉTODO DE ELIMINACIONES SUCESIVAS

Este método consiste en ir reduciendo el sistema a otros sistemas equivalentes en los cuales se van eliminando las variables una por una hasta llegar a una ecuación con una sola variable.

Por ejemplo si el sistema es de 2x2 se elimina una variable y nos queda un sistema equivalente y en este nuevo, hay una ecuación con una sola variable que ya podemos resolver, ahora si el sistema es de 3x3 al combinar las ecuaciones podemos eliminar una de las variables y podemos obtener un sistema equivalente en el cual hay un sistema de 2x2 que resolvemos como ya se mencionó. Seguimos el procedimiento anterior y así sucesivamente si tenemos uno de 4x4 reducimos a uno equivalente que contiene un sistema de 3x3 que resolvemos de la misma forma, y si llevamos un orden al eliminar las variables podemos llegar a un **sistema escalonado** donde la última de las ecuaciones solamente tiene una sola variable y resolvemos por sustitución.

A continuación haremos algunos ejemplos para que recuerdes tus conocimientos anteriores en **sistemas de 2x2** y puedas aplicar este método con sistemas de 3x3.

1.1.1 Sistemas de 2x2. Método de Eliminación.

Como ya se menciono éste método consiste en encontrar otro sistema equivalente en el cual se eliminar una de las dos variables del sistema y para lograr esto se tienen que hacer iguales los coeficientes de dicha variable en las dos ecuaciones, para que al sumarlas o restarlas se elimine la variable elegida. Hagamos un ejemplo:

Ejemplo 1.- Resuelve el sistema

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 5x - 2y &= -16 \end{aligned}$$

Solución:

Primero se elige la variable a eliminar, puede ser x o y, que sea y. Ahora fijémonos en los coeficientes de y, que son: 3 en la primera ecuación y –2 en la segunda, para que y tenga los mismos coeficientes en las dos ecuaciones se tiene que multiplicar la primera ecuación por 2; $2(2x + 3y = 5)$ y la segunda ecuación por 3; $3(5x - 2y = -16)$ y sumando el resultado de estas dos operaciones eliminamos a la variable y y nos queda una ecuación con solo la variable x que podemos resolver fácilmente

$$\begin{array}{lcl} 2(2x + 3y = 5) & \longrightarrow & 4x + 6y = 10 \\ 3(5x - 2y = -16) & \longrightarrow & 15x - 6y = -48 \\ \hline & & 19x + 0 = -38 \end{array}$$

Sistema equivalente al original.

$$19x = -38$$

dividimos entre 19 ambos lado

$$x = -38/19$$

$$x = -2$$

para encontrar el valor de y, sustituimos el valor de x en cualquiera de las ecuaciones originales, por ejemplo en la primera;

$$2x + 3y = 5 \longrightarrow 2(-2) + 3y = 5$$

$$-4 + 3y = 5$$

despejamos a y sumando 4 de ambos lados y dividiendo entre 3

$$3y = 5 + 4 = 9$$

$y = 9/3$ es decir $y = 3$

La solución del sistema es $x = -2$ y $y = 3$ ó la pareja ordenada $(-2, 3)$

COMPROBACIÓN.- Sustituimos los valores $x = -2$ y $y = 3$ en cada una de las ecuaciones del sistema original, como sigue:

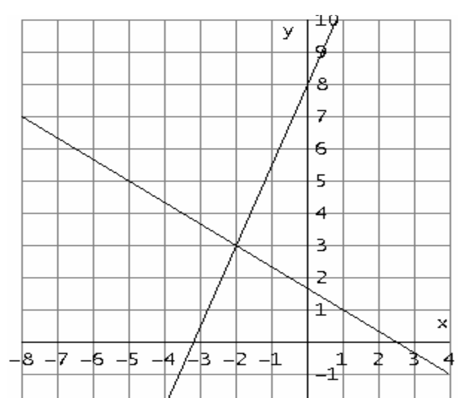
$$2x + 3y = 5 \longrightarrow 2(-2) + 3(3) = -4 + 9 = 5$$

$$5x - 2y = -16 \longrightarrow 5(-2) - 2(3) = -10 - 6 = -16$$

como estos valores satisfacen ambas ecuaciones, la solución es correcta y el sistema es **consistente**.

Representación gráfica:

Para trazar cada gráfica puedes dar dos valores a x para obtener los de sus y's correspondientes, ya que al ser rectas es suficiente con sólo dos valores y sus graficas quedan así:



Gráfica 1

Ejemplo 2.- Encuentra la solución del sistema $4x + 5y = -1$
$7x + 2y = 6$

Solución:

Ahora que sea x la variable que queremos eliminar; nos fijamos en los coeficientes de x que son 4 en la primera ecuación y 7 en la segunda, como tienen el mismo signo, entonces vamos a multiplicar la primera ecuación por 7 y la segunda ecuación por –4 y sumamos los resultados de estas operaciones como sigue:

$$\left.\begin{array}{lcl} 7(4x + 5y = -1) & \longrightarrow & 28x + 35y = -7 \\ -4(7x + 2y = 6) & \longrightarrow & -28x - 8y = -24 \end{array}\right\} \text{Sistema equivalente al original.}$$

$$+\quad \underline{\hphantom{-28x - 8y = -24}}$$

$$27y = -31$$

resolvemos para y; $y = -31/27$

sustituimos el valor de y en cualquiera de las ecuaciones originales y resolvemos como en el ejemplo 1.

Usamos la primer ecuación: $4x + 5y = -1$

Sustituimos el valor encontrados de y: $4x + 5(-\frac{31}{27}) = -1$

Despejando a x: $4x - \frac{5(31)}{27} = -1$

$$4x - \frac{155}{27} = -1 \longrightarrow 4x = -1 + \frac{155}{27} = \frac{128}{27}$$

$$x = \frac{\frac{128}{27}}{4} = \frac{128}{108} = \frac{32}{27}$$

La solución del sistema es $x = \frac{32}{27}$ y $y = -\frac{31}{27}$ o la pareja ordenada $\left(\frac{32}{27}, \frac{-31}{27}\right)$.

Este sistema es **consistente**.

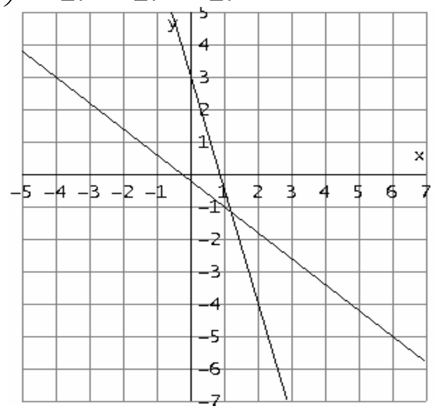
COMPROBACIÓN.- sustituimos los valores de x y y en las ecuaciones originales:

En $4x + 5y = -1$ tenemos: $4\left(\frac{32}{27}\right) + 5\left(\frac{-31}{27}\right) = \frac{128}{27} - \frac{155}{27} = -\frac{27}{27} = -1$

En $7x + 2y = 6$ tenemos: $7\left(\frac{32}{27}\right) + 2\left(\frac{-31}{27}\right) = \frac{224}{27} - \frac{62}{27} = \frac{162}{27} = 6$

Representación gráfica:

Si le das dos valores a x obtendrás sus respectivas y's, al localizar los puntos en el plano y trazar sus respectivas rectas, te deben de quedar como en la gráfica 2.



Gráfica 2

Al observar las gráficas de cada sistema y sus soluciones, ¿crees que exista alguna relación?, ! analízalo ¡.

Ejemplo 3.- Encuentra la solución del sistema

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= -3 \\ 6x - 15y &= 2 \end{aligned}$$

Solución:

Elegimos de nuevo a x la variable que vamos a eliminar, su coeficiente en la primera ecuación es 2 y en la segunda ecuación es 6, así es que podemos multiplicar la primera ecuación por -3 y a éste resultado sumarle la segunda ecuación, por lo que nos queda:

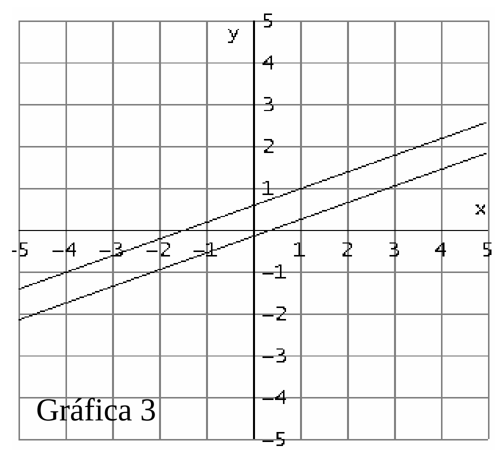
$$-3(2x - 5y = -3) \longrightarrow \left.\begin{aligned} -6x + 15y &= 9 \\ + \quad 6x - 15y &= 2 \end{aligned}\right\} \text{Sistema equivalente al original.}$$

$$0 + 0 = 11$$

se eliminaron las dos variables y 0 nunca va a ser igual a 11, por lo que el sistema no tiene solución, este sistema es **inconsistente**.

Representación gráfica:

Al trazar las rectas de cada ecuación en un mismo plano deben de quedarte como en la gráfica 3. Observa que las rectas son paralelas.



Gráfica 3

Creemos que ya te diste cuenta o recordaste que la solución de cada sistema (si es que tiene) son los valores de x y de y correspondientes al punto de intersección de las dos rectas. Y si el sistema no tiene solución quiere decir que las rectas son paralelas.

No te preguntas, ¿cómo serán las rectas cuando hay una infinidad de soluciones? Veamos el siguiente ejercicio.

Ejemplo 4.- Encuentra la solución del sistema

$$\begin{aligned} 3x + y &= 5 \\ -12x - 4y &= -20 \end{aligned}$$

Solución:

Eliminemos a y, multiplicando por 4 la primera ecuación y sumándole la segunda ecuación:

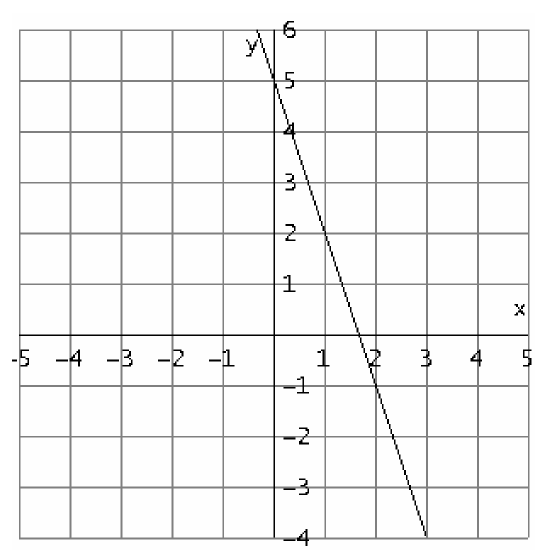
$$4(3x + y = 5) \longrightarrow \quad + \left.\begin{array}{r} 12x + 4y = 20 \\ -12x - 4y = -20 \end{array}\right\} \text{Sistema equivalente al original.}$$

$$\overline{0 \quad + \quad 0 = \quad 0}$$

como en el ejemplo anterior se eliminaron las dos variables, con la diferencia de que en este caso 0 siempre es igual a 0, y es cuando afirmamos que el sistema tiene una infinidad de soluciones, y si observas con mayor detalle te darás cuenta que las ecuaciones que forman el sistema son equivalentes, a este sistema también se le llama **consistente**.

Su representación gráfica es:

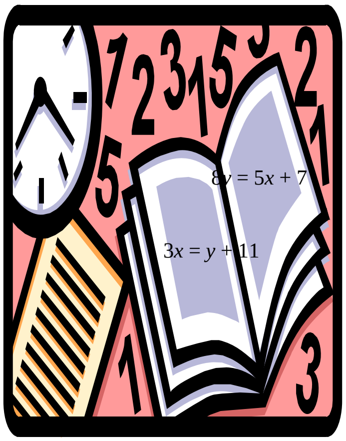
Como las ecuaciones que forman el sistema son equivalentes, al graficar cada recta, quedan una sobre la otra, es decir, son la misma línea recta. Esto quiere decir que se cortan en todos sus puntos, e ahí otra de las razones de porque el sistema tiene una infinidad de soluciones.



Gráfica 4

1.1.2 APLICACIONES DE LOS SISTEMAS DE 2x2:

EJEMPLO El triple de un número supera en 11 al doble de otro, mientras que 8 veces el segundo excede en 7 unidades al quíntuplo del primero. Encuentra ambos números.



Solución:

Primero simbolicemos: Supongamos que x es el primer número y y el segundo.

El triple de un número es $3x$, supera en 11 a y. Para que sean iguales al menor que es y le sumamos 11 y tenemos nuestra **primera ecuación**; $\mathbf{3x = y + 11}$.

Ocho veces el segundo número es $8y$.

El quíntuplo del primero es $5x$.

Como $8y$ excede en 7 unidades a $5x$, para que sean iguales al menor que es $5x$ le sumamos 7 y nuestra **segunda ecuación** es: $\mathbf{8y = 5x + 7}$.

Resolvemos el sistema formado por estas dos ecuaciones y tenemos:

$3x = y + 11 \longrightarrow 3x - y = 11 \longrightarrow$ Ecuación 1

$8y = 5x + 7 \longrightarrow -5x + 8y = 7 \longrightarrow$ Ecuación 2

Eliminemos a y: multiplicamos la ecuación 1 por 8 y le sumamos la ecuación 2

$$3x - y = 11 \longrightarrow 8(3x - y = 11) \longrightarrow \begin{array}{rl} & 24x - 8y = 88 \\ + & -5x + 8y = 7 \\ \hline & 19x + 0 = 95 \end{array}$$

$$x = 95/19 = 5$$

Sustituimos el valor de $x = 5$ en la ecuación 1

$3x - y = 11 \longrightarrow 3(5) - y = 11 \longrightarrow -y = 11 - 15 = -4$ entonces $y = 4$

Los números buscados son: el primero es 5 y el segundo es 4.

COMPROBACIÓN.- El triple de 5 es 15, supera en 11 al segundo que es 4.

Ocho veces el segundo es $8(4) = 32$ supera en 7 a el quíntuplo del primero que es $5(5) = 25$.

EJERCICIOS 1.1

Encuentra la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de eliminación, y trazar sus gráficas:

1) $3x + 5y = 5$
$2x - 4y = -4$

2) $2x - 7y = -11$
$5x + 3y = -7$

3) $3x + 5y = 4$
$-2x + 6y = 2$

4) $x - 4y = 5$
$2x + 3y = -1$

5) $9x - 5y = 10$
$7x + 3y = 2$

6) $4x + 6y = 7$
$2x + 3y = -5$

7) $x + 3y = -5$
$2x - 4y = 10$

8) $4x + 5y = 13$
$2x + 3y = 9$

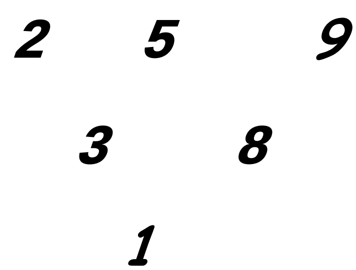
9) $5x - 3y = 26$
$x + 4y = -4$

10) $3x - 5y = 1$
$-9x + 15y = -3$

11) $2x - 3y = 1$
$-4x + 6y = 3$

II. Resuelve los siguientes problemas planteando un sistema de ecuaciones.

12) La suma del doble de un número y el triple de otro es 16, y la diferencia del doble del primero y el cuádruplo del segundo es 2. ¿ Cuáles son los números?



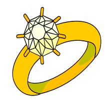
13) En un puesto de fruta se vendieron el lunes 9 kilos de limón y 20 kilos de naranja por la cantidad de $ 114.00. El día martes a los mismos precios se vendieron 11 kilos de limón y 16 kilos de naranja por la misma cantidad. Encuentra los precios del kilo de limón y el kilo de naranja.

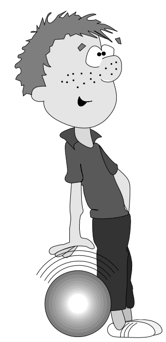
14) Laura y Marta son dos amigas que tienen una afición común: coleccionar anillos. Hasta tal punto que, entre las dos, tienen 60 anillos.

Ayer, Laura le decía a Marta:

_ *Tienes muchos anillos, pero, aunque te diera dos, seguiría teniendo el doble que tú*.

¿Cuántos anillos tiene cada una de las amigas?



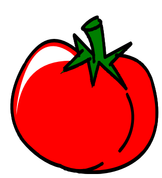


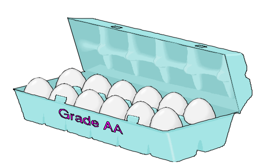
15) La edad de Alberto más el triple de la edad de su hermano Sergio es igual a 38, y el año que viene Alberto tendrá triple edad que Sergio.

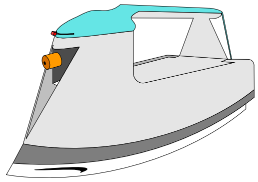
¿Qué edad tiene cada uno actualmente?

16) Encuentra un número de 2 cifras que satisfaga las siguientes condiciones: "Cuatro veces la cifra de las decenas menos 5 veces la de las unidades es igual a – 8. El doble de la cifra de las decenas menos 8 es igual a la cifra de las unidades".

17) Diez kilos de huevo y cuatro kilos de jitomate cuestan $146.00. Tres kilos de huevo y cinco kilos de jitomate cuestan $ 78.00. ¿Cuánto cuesta un kilo de huevo y un kilo de jitomate?.







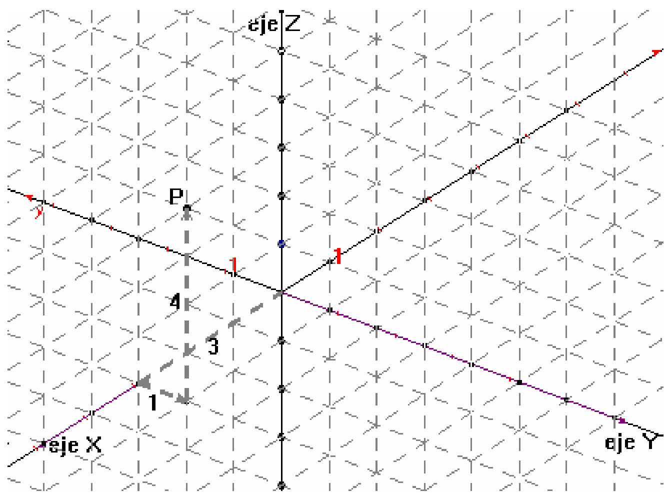
18) Una vendedora de flores camino al mercado, planeaba comprar una plancha con el producto de la venta del día. Pensaba, si vendo cada ramo en $ 15.00, me faltarían $ 16.00 para completar el costo de la plancha. Si vendo cada ramo en $ 17.00, podré comprar la plancha y me sobrarán $ 8.00. ¿Cuántos ramos de flores llevaba y cuál es el costo de la plancha?.

1.2 SISTEMAS DE 3x3, MÉTODO DE ELIMINACIÓN.

En sistemas de 2x2 se elimina una variable y se reduce a un sistema equivalente en donde una de sus ecuaciones sólo tiene una variable. En sistemas de 3x3, vamos a eliminar una variable y se va a reducir a un sistema de 2x2 que con el repaso anterior ya debes de ser capaz de resolver.

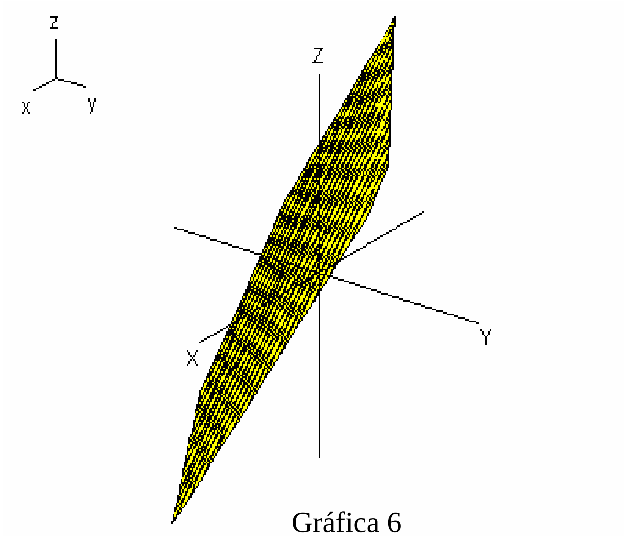
Respecto a su gráfica, observa que tenemos tres variables y para cada valor de estas tenemos una tríada de números que su representación gráfica es en un sistema tridimensional.

Por ejemplo, si x = 3, y = 1 y z = 4, se tiene la tríada **P**(3, 1, 4) y al localizarla en el sistema tridimensional debe de quedar como se ve en la gráfica 5.



Gráfica 5

Para trazar la gráfica de la ecuación $2x - 3y + 2z = 13$ se le deben de dar valores arbitrarios a dos variables para obtener el valor de la tercera; por ejemplo puedes darle valores a x y a y para obtener los de z, y después se localizan en el sistema tridimensional y al unirse se obtiene UN PLANO como lo ves en la gráfica 6.



Gráfica 6

Ejemplo 1.- Encuentra la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$2x - 3y + 2z = 13$$
$$3x + 2y - 4z = -8$$
$$5x - 4y - 3z = 5$$

Solución:

Primero hay que decidir que variable vamos a eliminar, por ejemplo eliminemos a y, tomando en cuenta la primera y la segunda ecuación, entonces, multipliquemos la primera ecuación por 2 y la segunda ecuación por 3 y sumamos los resultados;

$$\begin{array}{lcl} 2(2x - 3y + 2z = 13) & \longrightarrow & 4x - 6y + 4z = 26 \\ 3(3x + 2y - 4z = -8) & \longrightarrow & + \quad 9x + 6y - 12z = -24 \\ \hline & & 13x \quad - \ 8z \ = 2 \longrightarrow \text{Ecuac. 4} \end{array}$$

Ahora tomando en cuenta la segunda y la tercera ecuación eliminemos a y nuevamente, multipliquemos la segunda ecuación por 2 y el resultado se lo sumamos a la tercera ecuación;

$$\begin{array}{lcl} 2(3x + 2y - 4z = -8) & \longrightarrow & 6x + 4y - 8z = -16 \\ & + & 5x - 4y - 3z = 5 \\ \hline & & 11x \quad - \quad 11z = -11 \end{array}$$

esta ecuación se puede reducir dividiendo entre 11 todos sus términos y nos queda:

$$x - z = -1 \longrightarrow \text{Ecuac. 5}$$

Observa que la ecuación 4 y la ecuación 5 forman un sistema de 2x2 donde las variables son x y z; resolvamos este sistema:

$$13x - 8z = 2 \longrightarrow \text{Ecuación 4}$$
$$x - z = -1 \longrightarrow \text{Ecuación 5}$$

eliminemos a x multiplicando a la ecuación 5 por -13 y le sumamos la ecuación 5

$$\begin{array}{lcl} -13(x - z = -1) & \longrightarrow & -13x + 13z = 13 \\ & + & 13x - 8z = 2 \\ \hline & & 5z = 15 \end{array}$$

despejando a z: $\quad z = 3$

sustituimos en la ecuación 5 el valor de z, y resolvemos:

$$\text{Ecuación 5} \longrightarrow x - z = -1 \longrightarrow x - (3) = -1,$$

$$x = -1 + 3$$
$$x = 2$$

ya tenemos los valores de x y de z, ahora sustituimos estos valores en la primera de las ecuaciones originales y resolvemos para y:

$$2x - 3y + 2z = 13 \longrightarrow 2(2) - 3y + 2(3) = 13, \longrightarrow 4 - 3y + 6 = 13$$
$$-3y = 13 - 10 = 3$$
$$y = 3/-3 \quad \text{que es lo mismo a} \quad y = -1$$

La solución del sistema es $x = 2$, $y = -1$ y $z = 3$, o la terna ordenada $(2, -1, 3)$.

COMPROBACIÓN.- Sustituimos estos valores en las ecuaciones de sistema original:

$2x - 3y + 2z = 13 \longrightarrow 2(2) - 3(-1) + 2(3) = 4 + 3 + 6 = 13$

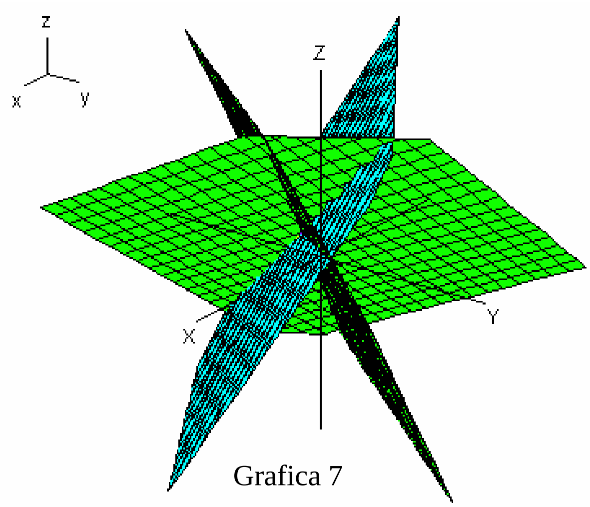
$3x + 2y - 4z = -8 \longrightarrow 3(2) + 2(-1) - 4(3) = 6 - 2 - 12 = -8$

$5x - 4y - 3z = 5 \longrightarrow 5(2) - 4(-1) - 3(3) = 10 + 4 - 9 = 5$

la solución es correcta ya que se satisfacen las 3 ecuaciones del sistema.

Representación gráfica:

Al trazar los planos de cada ecuación en un mismo sistema tridimensional deben de quedar como en la gráfica 7. Observa que los planos se cortan en un punto que debe de ser (2, –1, 3).



Grafica 7

Ejemplo 2.- Resuelve el siguiente sistema

$3x + 2y - \mathbf{z} = -15 \longleftarrow$ Ecuación 1

$2x - 3y + 4z = 13 \longleftarrow$ Ecuación 2

$5x + y - 2z = -24 \longleftarrow$ Ecuación 3

Solución:

Tomando en cuenta la primera y la segunda ecuación eliminemos a la variable x; multiplicando por 2 la primera ecuación y por –3 la segunda ecuación (observa y analiza el porqué se utilizan estos números para multiplicar), sumando los resultados nos queda:

$$\begin{array}{lcl} 2(3x + 2y - \mathbf{z} = -15) & \longrightarrow & 6x + 4y - 2z = -30 \\ -3(2x - 3y + 4z = 13) & \longrightarrow & -6x + 9y - 12z = -39 \\ \hline & & 0 + 13y - 14z = -69 \longrightarrow \text{Ecuación 4} \end{array}$$

ahora tomando en cuenta la primera ecuación y la tercera volvamos a eliminar la variable x; multipliquemos por 5 la primera ecuación y por –3 la tercera, sumando los resultados nos queda:

$$\begin{array}{lcl} 5(3x + 2y - \mathbf{z} = -15) & \longrightarrow & 15x + 10y - 5\mathbf{z} = -75 \\ -3(5x + y - 2z = -24) & \longrightarrow & -15x - 3y + 6z = 72 \\ \hline & & 0 + 7y + z = -3 \longrightarrow \text{Ecuación 5} \end{array}$$

resolvamos el sistema de 2x2 que nos queda: $13y - 14z = -69 \longrightarrow$ Ecuación 4

$$7y + z = -3 \longrightarrow \text{Ecuac. 5}$$

eliminemos a la variable y, multiplicando por 7 la ecuación 4 y por –13 la ecuación 5, sumando los resultados tenemos:

$$\begin{array}{lcl} 7(13y - 14z = -69) & \longrightarrow & 91y - 98z = -483 \\ -13(7y + z = -3) & \longrightarrow & -91y - 13z = 39 \\ \hline & & -111z = -444 \end{array}$$

despejamos a z:

$$z = -444/-111$$

$$z = 4$$

sustituimos este valor de z en la ecuación 4 del sistema de 2x2 para encontrar el valor de y y resolvemos:

$$13y - 14z = -69 \longrightarrow 13y - 14(4) = -69$$

$$13y - 56 = -69$$

$$13y = -69 + 56 = -13$$

$$y = -13/13 \quad \text{es decir} \quad y = -1$$

Ahora sustituimos estos valores de y y de z en la primera de las ecuaciones originales y resolvemos para x:

$$3x + 2y - \mathbf{z} = -15 \longrightarrow 3x + 2(-1) - (4) = -15$$

$$3x - 2 - 4 = -15$$

$$3x = -15 + 6 = -9$$

$$x = -9/3$$

$$x = -3$$

La solución es $x = -3$, $y = -1$ y $z = 4$

COMPROBACIÓN.- Sustituimos los valores de las variables en el sistema original.

$$3x + 2y - \mathbf{z} = -15 \longrightarrow 3(-3) + 2(-1) - (4) = -9 - 2 - 4 = -15$$

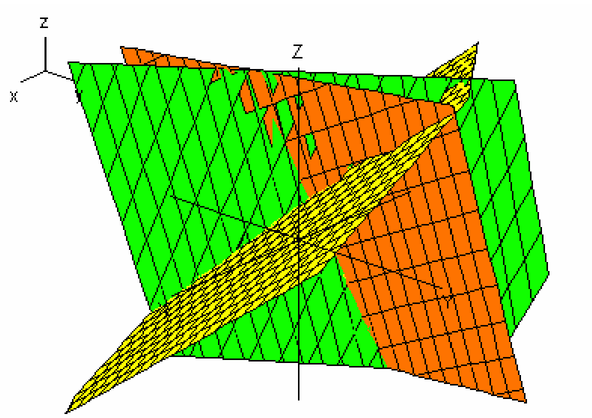
$$2x - 3y + 4z = 13 \longrightarrow 2(-3) - 3(-1) + 4(4) = -6 + 3 + 16 = 13$$

$$5x + y - 2z = -24 \longrightarrow 5(-3) + (-1) - 2(4) = -15 - 1 - 8 = -24$$

se cumplen las tres ecuaciones por lo tanto la solución es correcta.

Representación gráfica:

Al trazar los planos de cada ecuación en un mismo sistema tridimensional deben de quedar como en la gráfica 8. Observa que los planos se cortan en un punto que debe de ser (–3, –1, 4).



Gráfica 8

NOTA: Al sistema formado por la primera ecuación del sistema original, la ecuación 4 del sistema de 2x2 y el valor de la variable z se le llama sistema escalonado:

$$\begin{aligned} 3x + 2y - \mathbf{z} &= -15 \\ 13y - 14z &= -69 \\ z &= 4 \end{aligned}$$

Si tenemos cualquier sistema de ecuaciones de 3x3 siempre se puede reducir a un sistema escalonado siguiendo un orden en la eliminación de las variables que fue lo que se hizo en el ejemplo anterior; primero eliminamos a la variable x luego a la variable y para encontrar el valor de la variable z, no es necesario hacerlo siempre en ese orden.

Ejemplo 3.- Encuentra la solución del sistema:

$$\begin{aligned} x - 5y - 5z &= 0 \longrightarrow 1 \\ 2x + 10y + 5z &= 0 \longrightarrow 2 \\ 9x - 5y - 15z &= 0 \longrightarrow 3 \end{aligned}$$

Solución:

Numeramos las ecuaciones para hacer referencia a ellas, empecemos eliminando a la variable x; multiplicamos por -2 la ecuación 1 y al resultado le sumamos la ecuación 2:

$$-2(x - 5y - 5z = 0) \longrightarrow \begin{array}{r} -2x + 10y + 10z = 0 \\ + \quad 2x + 10y + 5z = 0 \\ \hline 0 + 20y + 15z = 0 \end{array} \longrightarrow 4$$

multipliquemos por -9 la ecuación 1 y al resultado sumémosle la ecuación 3:

$$-9(x - 5y - 5z = 0) \longrightarrow \begin{array}{r} -9x + 45y + 45z = 0 \\ + \quad 9x - 5y - 15z = 0 \\ \hline 0 + 40y + 30z = 0 \end{array} \longrightarrow 5$$

resolvamos el sistema de 2x2 formado por las ecuaciones 4 y 5, y si te das cuenta la ecuación 5 es dos veces la ecuación 4, por lo que si multiplicamos la ecuación 4 por -2 y al resultado le sumamos la ecuación 5 nos va a quedar que $0 = 0$.

Veámoslo:

$$-2(20y + 15z = 0) \longrightarrow \begin{array}{r} -40y - 30z = 0 \\ + \quad 40y + 30z = 0 \\ \hline 0 + 0 = 0 \end{array}$$

en la sección anterior quedamos que si esto pasaba se tenían muchas soluciones ya que las dos ecuaciones eran equivalentes, en este caso también se tienen muchas soluciones que se pueden encontrar en términos de una de las variables, por ejemplo si la variable z toma el valor de c, donde c puede ser cualquier número real, las soluciones las encontramos sustituyendo este valor en el sistema escalonado formado por la ecuación 1, la ecuación 4 y el valor de z, como sigue:

$$\begin{aligned} x - 5y - 5z &= 0 \\ 20y + 15z &= 0 \\ z &= c \end{aligned}$$

así tenemos que: $z = c$, $\quad 20y + 15c = 0$

despejando a y: $\quad 20y = -15c$

$$y = -15c/20 \quad \text{es lo mismo que} \quad y = \frac{-3c}{4}$$

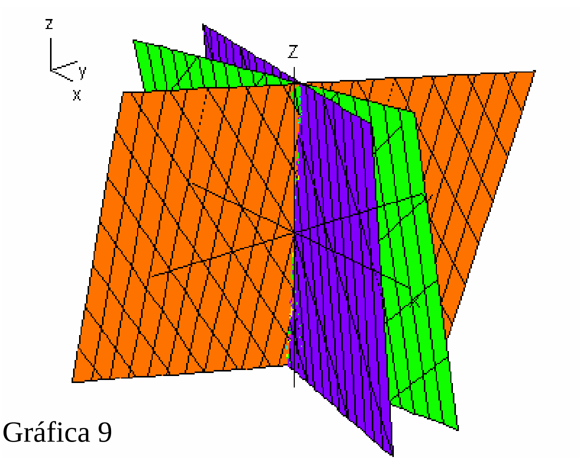
sustituyendo este valor en $x - 5y - 5z = 0$ tenemos $x - 5\left(\frac{-3c}{4}\right) - 5c = 0$

$$x + \left(\frac{15c}{4}\right) - 5c = 0, \qquad x = -\left(\frac{15c}{4}\right) + 5c = \frac{-15c + 20c}{4} \qquad \text{entonces} \quad x = \frac{5c}{4}$$

Las soluciones son: $x = \frac{5c}{4}$, $\quad y = \frac{-3c}{4}$ $\quad$ y $\quad z = c$

la solución depende del valor que le asignes a c, por ejemplo si $c = 4$ la solución es $x = 5$, $y = -3$ y $z = 4$ ó $(5, -3, 4)$; y así sucesivamente dándole diferentes valores a c tendremos las demás soluciones.

Gráficamente podemos apreciar que los tres planos no sólo se cortan en un punto, sino en toda una recta y como esta tiene una infinidad de puntos entonces las soluciones son una infinidad.



Gráfica 9

Nota: A los sistemas como este que acabamos de resolver, se les llama **homogéneos**. Que son aquellos en que todas sus ecuaciones son igual a cero.

Y se les llama **no homogéneos** si al menos una ecuación no es igual a cero.

Ejemplo 4.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} 2x + y - z = -3 & \longrightarrow & 1 \\ 4x - 2y + 3z = -1 & \longrightarrow & 2 \\ 6x - y + 2z = 8 & \longrightarrow & 3 \end{array}$$

Solución:

Eliminemos a la variable x utilizando la ecuación 1 y la ecuación 2, esto se puede hacer con solo multiplicar por -2 la ecuación 1 y sumándole la ecuación 2, es decir:

$$\begin{array}{rcrl} -2(2x + y - z = -3) & \longrightarrow & -4x - 2y + 2z = 6 & \\ 4x - 2y + 3z = -1 & \longrightarrow & 4x - 2y + 3z = -1 & \\ \hline & & -4y + 5z = 5 & \longleftarrow \text{Ecuación } 4 \end{array}$$

utilizando la ecuación 1 y la ecuación 3, eliminamos a la variable x multiplicando por –3 a la ecuación 1 y sumándole la ecuación 3

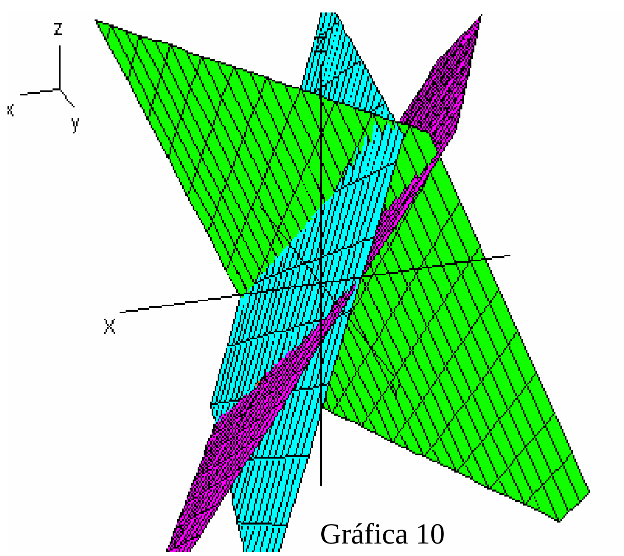
$$\begin{array}{rcrl} -3(2x + y - z = -3) & \longrightarrow & -6x - 3y + 3z = 9 & \\ 6x - y + 2z = 8 & \longrightarrow & 6x - y + 2z = 8 & \\ \hline & & -4y + 5z = 17 & \longleftarrow \text{Ecuación } 5 \end{array}$$

restando la ecuación 4 a la ecuación 5 tenemos:

$$\begin{array}{rr} & -4y + 5z = 17 \\ - & -4y + 5z = 5 \\ \hline & 0 + 0 = 12 \end{array}$$

como $0 \neq 12$, **el sistema no tiene solución es inconsistente**.

Gráficamente observa que los tres planos que representan a cada ecuación nunca se cortan al mismo tiempo, ni en un punto, ni en una recta; queda un hueco triangular en medio de los tres planos. Por eso es que el sistema no tiene solución.



Gráfica 10

1.2.1 APLICACIONES DE LOS SISTEMAS DE 3x3:

EJEMPLO 1

La Suma de las edades de Mary, Luis y Paty es 53. Paty es 5 años más joven que Luis y, dentro de dos años Mary tendrá la edad que Luis tiene ahora. ¿Cuál es la edad de cada uno?

Solución:

1º) Simbolicemos: asignemos M a la edad de Mary;
L a la edad de Luis y
P a la edad de Paty.

2º) La suma de las edades de Mary, Luis y Paty es 53, sumamos las edades y tenemos nuestra primera ecuación: $M + L + P = 53$

3º) Paty es 5 años más joven que Luis, esto quiere decir que P es menor que L por 5 unidades, así que nuestra segunda ecuación es: $P = L - 5$.

4º) Dentro de 2 años Mary tendrá la edad que Luis tiene ahora; dentro de 2 años la edad de Mary será $M + 2$ entonces $M + 2 = L$ es nuestra tercera ecuación.

5º) Resolvamos el sistema formado por estas tres ecuaciones:

$$\begin{array}{lcrcl}
M + L + P = 53 & \longrightarrow & M + L + P = 53 & \longrightarrow & 1 \\
P = L - 5 & \longrightarrow & -L + P = -5 & \longrightarrow & 2 \\
M + 2 = L & \longrightarrow & M - L \quad = -2 & \longrightarrow & 3
\end{array}$$

Si sumamos la ecuación 1 y la ecuación 2 tenemos:

$$\begin{array}{rl} + & M + L + P = 53 \\ & -\quad L + P = -5 \\ \hline & M + 2P = 48 \longrightarrow 4 \end{array}$$

Si sumamos la ecuación 1 con la ecuación 3 tenemos:

$$\begin{array}{rl} + & M + L + P = 53 \\ & M - L \quad = -2 \\ \hline & 2M + P = 51 \longrightarrow 5 \end{array}$$

Resolvemos el sistema de 2x2 formado por las ecuaciones 4 y 5.

$$M + 2P = 48 \longrightarrow 4$$

$$2M + P = 51 \longrightarrow 5$$

Multiplicamos por -2 la ecuación 4 y le sumamos la ecuación 5;

$$\begin{array}{rl} + & -2M - 4P = -96 \\ & 2M + P = 51 \\ \hline & -3P = -45 \end{array}$$

$P = -45/-3$ así $P = 15$

Sustituimos este valor en la ecuación 4:

$$M + 2P = 48 \longrightarrow M + 2(15) = 48$$

$$M = 48 - 30$$

$$M = 18$$

Sustituimos en la ecuación 1 ó en la ecuación 3 para obtener el valor de L;

$$M + L + P = 53 \longrightarrow 18 + L + 15 = 53 \longrightarrow L + 33 = 53$$

$$L = 53 - 33$$

$$L = 20$$

Ahora ya conocemos sus edades que son:

Mary tiene 18 años, Luis tiene 20 años y Paty tiene 15 años

COMPROBACIÓN.- La suma de sus edades es 53: 18 + 20 + 33 = 53

Paty es 5 años más joven que Luis: Luis tiene 20 le lleva 5 años a Paty.

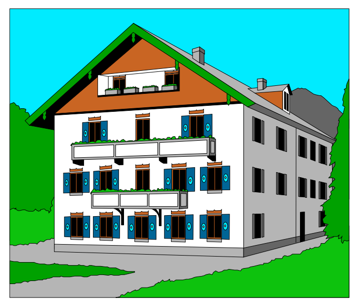
Dentro de 2 años Mary va a tener 18 + 2 = 20 la misma edad que actualmente tiene Luis.

Recuerda que cuando tenemos un problema, primero hay que leerlo detenidamente para entender que es lo que se pide y poder simbolizarlo y no necesariamente con las letras ya conocidas, podemos simbolizarlo con letras que nos recuerden lo que representan en el problema.

Resolvamos el ejercicio de introductorio de esta unidad.

EJEMPLO 2

¿CUÁNTAS VENTANAS TIENE LA CASA QUE QUIERE TOÑO?



Toño dijo: Me gustaría que la casa tuviera un total de 132 ventanas, de tal forma que en la parte de enfrente debe de tener el doble de ventanas que en la parte de atrás, y en los costados el triple de ventanas que en la fachada y la parte trasera juntas. ¿Ya estas listo para ayudar a los papás de Toño y decirles cuántas ventanas deben de ir en cada lado de la casa?

Solución:

1º) Simbolicemos el número de ventanas en cada parte como sigue:

f representará el número de ventanas en la fachada o enfrente.

l el número de ventanas en ambos lados.

t el número de ventanas en la parte de atrás (parte trasera)

2º) La casa tiene enfrente el doble de ventanas que en la parte de atrás al simbolizar esta frase nos queda: $f = 2t$

3º) A los lados hay el triple de ventanas que en la fachada y la parte trasera juntas: $\boldsymbol{l} = 3(f + t)$

4º) En total la casa tiene 132 ventanas, la tercera ecuación es: $f + l + t = 132$

5º) Resolvemos el sistema formado por:

$$f = 2t \longrightarrow \text{Ecuación 1}$$
$$l = 3(f + t) \longrightarrow \text{Ecuación 2}$$
$$f + l + t = 132 \longrightarrow \text{Ecuación 3}$$

Por sustitución es más sencillo:

Sustituimos el valor de f de la ecuación 1, en la ecuación 2.

$$l = 3(f + t) = 3(2t + t) = 3(3t) = 9t$$

Es decir $l = 9t$, este valor y el de la ecuación 1 los sustituimos en la ecuación 3, y tenemos: $2t + 9t + t = 132$

$$12t = 132$$
$$t = 11$$

Si $t = 11$ entonces $f = 2t = 2(11) = 22$ y $l = 9t = 9(11) = 99$

La respuesta es: En la fachada debe de tener 22 ventanas.
A los lados debe de tener 99 ventanas.
Y en la parte de atrás debe de haber 11 ventanas.

COMPROBACIÓN:

Si haces tus cuentas 22 + 99 + 11 = 132

En frente hay el doble de las de atrás y a los lados hay el triple de la suma de las ventanas de la fachada y las de atrás.

EJERCICIOS 1.2

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

1) $x - 3y + z = 4$
$-x + 4y - 4z = 1$
$2x - y + 5z = -3$

2) $2x - 5y + 3z = 17$
$3x + 4y - z = -25$
$2x + y + 2z = 0$

3) $4x - 2y + 3z = 0$
$3x - 5y - 2z = -12$
$2x + 4y - 3z = -4$

4) $\begin{aligned} x + 3y + 5z &= 7 \\ 3x + 2y - 4z &= -4 \\ 2x - 4y + 7z &= 8 \end{aligned}$

5) $\begin{aligned} 2x - 3y - 4z &= 1 \\ x + y - 2z &= 3 \\ 3x - 2y - 6z &= 8 \end{aligned}$

6) $\begin{aligned} 3x + 5y - 2z &= -21 \\ x - y + 2z &= 1 \\ 2x + 2y - 3z &= -1 \end{aligned}$

7) $\begin{aligned} 2x \quad\;\; + z &= 1 \\ y - 3z &= 10 \\ 4x + 2y - z &= 13 \end{aligned}$

8) $\begin{aligned} x + 3y + 5z &= -8 \\ 3x + 2y - 4z &= -22 \\ 2x - 4y + 7z &= 11 \end{aligned}$

9) $\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 1 \\ x + y + 2z &= 4 \\ 2x - 3y + 4z &= -2 \end{aligned}$

10) $\begin{aligned} x + y + 2z &= -2 \\ 2x - 3y - z &= 1 \\ 3x - 2y + z &= 5 \end{aligned}$

11) $\begin{aligned} 3x + 4y + 17z &= 0 \\ 4x + 5y + 22z &= 0 \\ 2x + 4y + 19z &= 0 \end{aligned}$

12) $\begin{aligned} 4x + 6z &= -12 \\ 3y + 3z &= 9 \\ 3x + 2y &= 10 \end{aligned}$

13) $\begin{aligned} 4x - 2y + 5z &= 11 \\ x + 2y - z &= 5 \\ 5x - 8y + 13z &= 7 \end{aligned}$

14) $\begin{aligned} x - 2y + 4z &= 5 \\ 4x + 3y - 2z &= 19 \\ 3x - y + 7z &= 5 \end{aligned}$

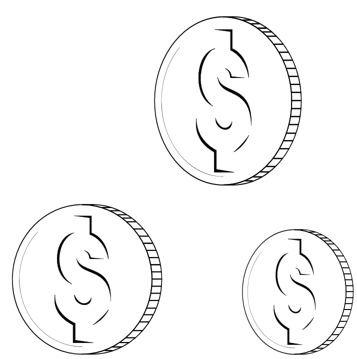
15) $\begin{aligned} x + 2y - 3z + u &= -1 \\ 2x - y + z - 2u &= -3 \\ 2x + 2y - 3z + u &= -28 \\ -x - 3y + 4z + 3u &= 6 \end{aligned}$

16) $\begin{aligned} 2x - y + z - 4u &= -11 \\ 3x + y - z + 5u &= 25 \\ -x - y + 3z &= -5 \\ 4x + 2y + 3u &= 14 \end{aligned}$

17) $\begin{aligned} x - y + z + u - t &= -4 \\ x + y - z - u + t &= 10 \\ x \quad\;\; + z + u \quad\;\; &= 3 \\ y + z - u - t &= -1 \\ x - y \quad\;\; + u \quad\;\; &= 0 \end{aligned}$

RESUELVE LOS SIGUIENTES PROBLEMAS:

18) Una colección de 100 monedas de \$5, \$10 y \$20 tiene un valor de \$1350. Si el número de monedas de \$5 más el número de monedas de \$ 10 es igual al número de monedas de \$ 20 ¿Cuál es el número de monedas de cada valor?



19)

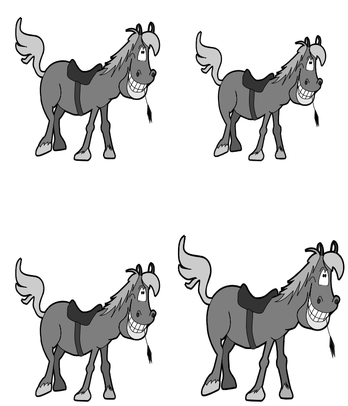
El promedio de tres calificaciones de un alumno es 74. Si la primera es 21 puntos menor que la segunda, y dos veces la tercera es la suma de las dos primeras más 15, ¿cuáles son las tres calificaciones?

20) El ángulo más pequeño de un triángulo mide la tercera parte del ángulo más grande, y el ángulo de tamaño medio es 30° menor que el ángulo más grande. Encontrar la medida de cada ángulo.

21) En un número de tres cifras el dígito de las unidades supera en dos al de las decenas, y la suma de los dígitos es 17. Si se intercambian los dígitos de las unidades y las centenas, el número disminuye en 396. Encontrar el número.

22) La suma de los dígitos de un número de tres cifras es 13 unidades. El dígito de las unidades supera en uno al dígito de las centenas. El cuádruplo del dígito de las centenas es mayor 4 unidades que el doble de la suma de los dígitos de las unidades y las decenas. Hallar el número.

23) LOS CABALLOS



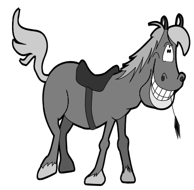
Un amigo mío se compró el otro día cuatro caballos, gastándose $8000. No recuerda cuánto le costo cada uno, pero si se acuerda de unas coincidencias curiosas que estuvo estudiando al repasar sus cuentas.

- ✧ El primer caballo le costó tanto como el segundo más la mitad del tercero.
- ✧ El segundo, en cambio, le costó tanto como el cuarto

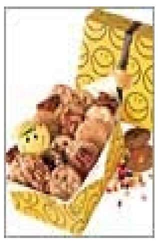
menos el tercero.

- ✧ El tercero costó un tercio del primero.

¿Cuánto le costó cada caballo?

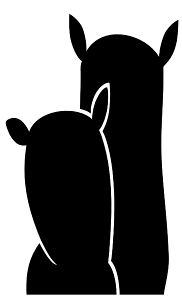


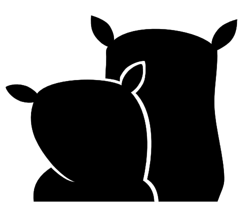
24) LOS BOMBONES

Se han llenado 3 cajas de bombones, cada una de peso diferente. Para darte una pista sobre los tres pesos, te diré que el doble del peso de la 1ª caja menos el triple de la 2ª es 400gr, y que el quíntuplo del peso de la 2ª menos un tercio del peso de la 3ª es igual a 5 kilos.
¿Qué peso tiene cada caja si sabes que entre las tres pesan 27.2 kilos.?

25) CINCO SACOS





Tenemos cinco sacos de diferentes pesos y una balanza que sólo es exacta para pesos mayores que 7.5 kilos. Sabemos que cada uno de nuestros cinco sacos pesan menos y decidimos pesarlos de dos en dos.
Los resultados obtenidos son los siguientes:

- El saco x y el y pesan juntos 12 kilos.
- El saco y y el z pesan juntos 13.5 kilos.
- Los sacos z y w pesan 11.5 kilos.
- Los sacos w y v pesan 8 kilos.
- Los sacos x, z, v, juntos pesan 16 kilos.

¿Cuál es el peso de cada saco?

26) LA FAMILIA

Al contraer matrimonio Paquita y Luis, ambos tenían hijos de un matrimonio anterior. Paquita aportó x hijos, Luis aportó y hijos y juntos procrearon z hijos. La suma total de hijos es cuatro. El doble de los hijos de Paquita menos los de Luis más los comunes es igual a 1. Los hijos de Paquita, más el doble de los de Luis es igual a 3 más el doble de los que procrearon juntos. ¿Cuántos hijos tenía cada una? ¿Cuántos hijos procrearon juntos?

27) Una persona afirma tener $2560 en billetes de $20, $50 y $100. Dice que la cantidad de billetes de $50 es el doble de la cantidad de billetes de $100 y que tiene 44 billetes en total. Determina cuántos billetes tiene de cada tipo.



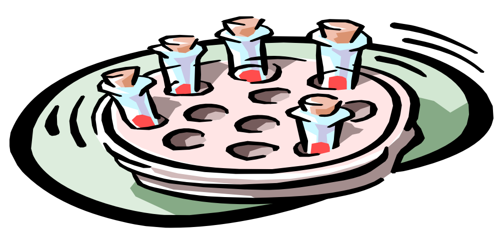
28) Se desean obtener 100 litros de una mezcla que tenga 51% de la sustancia A, 15 % de la sustancia B y 34% de la sustancia C. Se tienen mezclas de tres marcas diferentes X, Y y Z que poseen respectivamente:

X : 60% de A, 10% de B, 30% de C

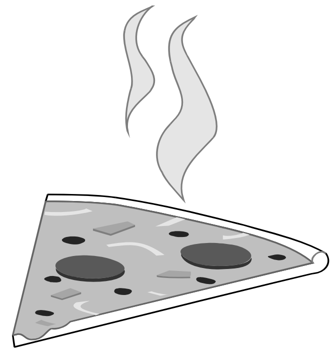
Y: 40% de A, 20% de B, 40% de C

Z: 50% de A, 20% de B, 30% de C

¿Cuántos litros de cada marca se deberán utilizar para formar la mezcla deseada?



29) Luis, Pedro y Ernesto fueron a comer pizza. Entre Luis y Ernesto comieron el doble que Pedro. Pedro comió el doble que Ernesto. Entre los tres se terminaron una pizza. ¿Qué porción de pizza comió cada uno?



30) El monte Everest es el más alto del mundo. Para encontrar su altura en metros, basta con ir a una enciclopedia y buscar el dato o bien resolver el sistema de ecuaciones que definen las siguientes condiciones: Se trata de un número de cuatro cifras. La cifra de las unidades es cero. El doble de la cifra de las decenas, menos la suma de las cifras de las centenas y los millares es igual a la de las unidades. La suma de la cifra de los millares y la cifra de las centenas es igual a la de las decenas más ocho. La suma de la cifra de las centenas y la cifra de las decenas es igual a dieciséis.

1.3 SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

Estudiaremos los sistemas formados por una ecuación lineal y la otra no lineal.

RECUERDA:

Al resolver un sistema de ecuaciones estamos encontrando el punto de intersección de sus gráficas.

Caso 1) Si el sistema es de 2x2 sus gráficas están en el Plano Cartesiano.

Caso 2) Si el sistema es de 3x3 sus gráficas son planos y están en el Plano Tridimensional.

En esta parte aprenderemos a resolver sistemas de 2x2 donde una o las dos ecuaciones no será lineal, y comprobaremos su solución fijándonos que efectivamente sus gráficas se cortan en los puntos solución.

1.3.1 Solución de sistemas formados por una ecuación lineal y otra cuadrática.

Ejemplo 1.- Resolver el sistema $2x + y = 3 \longleftarrow$ Ecuación **1** lineal.

$3x^2 - y = 1 \longleftarrow$ Ecuación **2** no lineal.

Solución:

El método que usaremos es el de sustitución.

1º) Despejamos una variable de la ecuación 1, la más fácil de despejar es y:

$$y = 3 - 2x$$

2º) Este valor de y lo sustituimos en la ecuación 2 y tenemos:

$$3x^2 - (3 - 2x) = 1$$

Quitamos el paréntesis: $3x^2 - 3 + 2x = 1$

Igualamos a cero: $3x^2 + 2x - 3 - 1 = 0$

$3x^2 + 2x - 4 = 0 \longleftarrow$ Ecuación cuadrática.

3º) Resolvemos la ecuación que resulta, observa que es cuadrática y la puedes resolver usando la fórmula general que es:

$$x = \frac{-\mathrm{b} \pm \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}}$$

nos da las soluciones de la ecuación cuadrática $\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c} = 0$.

Sólo tienes que sustituir los valores de a, b y c; te recomendamos que antes de sustituir identifiques estos valores.

En nuestra ecuación que es $3x^2 + 2x - 4 = 0$ los valores de a, b y c son: a = 3, b = 2 y c = – 4, los sustituimos en la fórmula general y tenemos:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(3)(-4)}}{2(3)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+48}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{52}}{6}$$

El signo ± nos da las dos soluciones, una con el signo +, y la otra con el signo – .

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{52}}{6} = \frac{-2 + 7.2111}{6} = 0.8685$$

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{52}}{6} = \frac{-2 - 7.2111}{6} = -1.5351$$

4º) Ya que tenemos los dos valores de x, los sustituimos en $y = 3 - 2x$ para obtener los valores de y como sigue:

Si $x_1 = 0.8685$, $y = 3 - 2(0.8685) = 3 - 1.737 = 1.263 = y_1$

Si $x_2 = -1.5351$, $y = 3 - 2(-1.5351) = 6.0702 = y_2$

Finalmente las soluciones son los puntos (0.8685 , 1.263) y (– 1.5351 , 6.0702) que son los puntos por donde se cortan las gráficas del sistema.

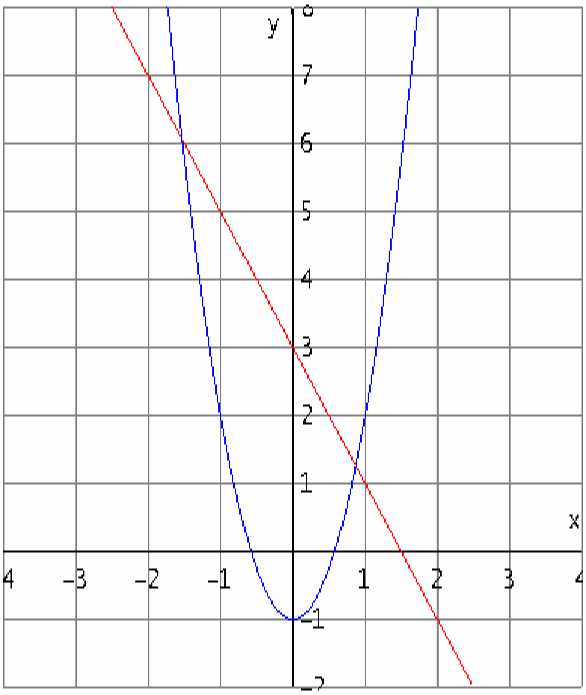
Graficas de cada ecuación:
Para trazarlas puedes hacer una tabulación como la que sigue:

$y = 3 - 2x$

x	y
0	3
2	– 1

$3x^2 - y = 1$ o $y = 3x^2 - 1$

x	y
0	– 1
1	2
– 1	2
2	11
– 2	11



Gráfica 11

Observa que los puntos solución son los puntos por donde se cortan la recta y la parábola.

Ejemplo 2.- Resolver el sistema $x - y = 2$ ← Ecuación **1** lineal.

$4x + y^2 = 9$ ← Ecuación **2** no lineal.

Solución:

Volvemos a usar el método de sustitución.

1º) Despejamos una variable de la ecuación 1, ahora despejemos a x:

$$x = 2 + y$$

2º) Este valor de x lo sustituimos en la ecuación 2 y tenemos:

$$4(2 + y) + y^2 = 9$$

Quitamos el paréntesis: $8 + 4y + y^2 = 9$

Igualamos a cero: $8 + 4y + y^2 - 9 = 0$

Ordenando: $y^2 + 4y - 1 = 0$ ← Ecuación cuadrática.

3º) Resolvemos la ecuación que resulta; observa que es cuadrática y la puedes resolver usando la fórmula general que ya recordamos en el ejercicio anterior.

Para esta ecuación los valores de a, b y c son: a = 1, b = 4 y c = –1, los sustituimos en la fórmula general y tenemos:

$$y = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2}$$

$$y_1 = \frac{-4 + \sqrt{20}}{2} = \frac{-4 + 4.47213}{2} = 0.236$$

$$y_2 = \frac{-4 - \sqrt{20}}{2} = \frac{-4 - 4.47213}{2} = -4.236$$

4º) Ya que tenemos los dos valores de y, los sustituimos en $x = 2 + y$ para obtener los valores de x como sigue:

Si $y_1 = 0.236$, $x = 2 + 0.236 = 2.236 = x_1$

Si $y_2 = -4.236$, $x = 2 + (-4.236) = 2 - 4.236 = -2.236 = x_2$

Finalmente las soluciones son los puntos (2.236 , 0.236) y (– 2.236 , –4.236) que son los puntos por donde se cortan las gráficas del sistema.

Graficas de cada ecuación:

Para trazar las gráficas debes de despejar a y de cada ecuación como sigue:

En la primera $x - y = 2$ tenemos: $x = 2 + y$

$x - 2 = y$ es decir $y = x - 2$

En la segunda $4x + y^2 = 9$ tenemos: $y^2 = 9 - 4x$

$$y = \pm\sqrt{9 - 4x}$$

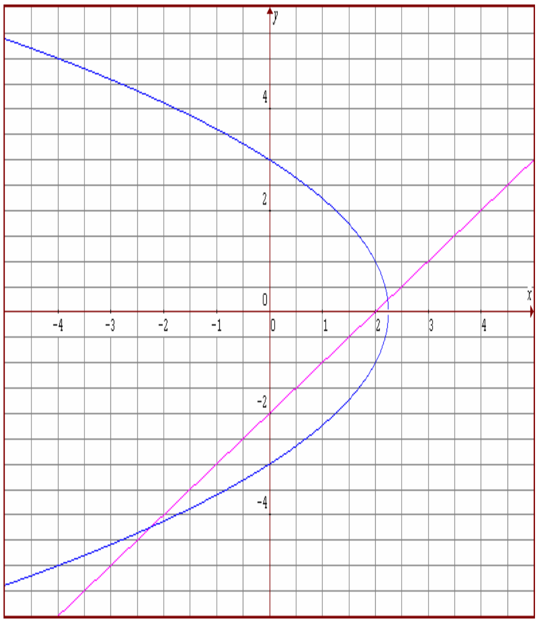
Puedes tabular para trazar sus gráficas como sigue:

$y = x - 2$

x	y
0	– 2
4	2

$y = \pm\sqrt{9 - 4x}$

x	y
0	± 3
1	$\pm\sqrt{5} = \pm 2.236$
– 1	$\pm\sqrt{13} = \pm 3.605$
2	± 1
– 2	$\pm\sqrt{17} = \pm 4.123$
3	No existe
– 3	$\pm\sqrt{21} = \pm 4.582$



Gráfica 12

Y efectivamente los puntos solución son los puntos por donde se cortan la recta y la parábola horizontal.

Ejemplo 3.- Resolver el sistema $x - 3y = 3$ ◄······ Ecuación **1** lineal.

$x^2 + y^2 = 9$ ◄······ Ecuación **2** no lineal.

Solución:

Usando el método de sustitución volvemos a trabajar como en los ejercicios anteriores.

1º) Es mejor despejar a x en la ecuación 1:

$$x = 3y + 3$$

2º) Este valor de x lo sustituimos en la ecuación 2 y tenemos:

$$(3y + 3)^2 + y^2 = 9$$

Desarrollando el Trinomio Cuadrado Perfecto :

$$9y^2 + 18y + 9 + y^2 = 9$$

Sumando las y^2 e igualando a cero:

$$10y^2 + 18y + 9 - 9 = 0$$

$$10y^2 + 18y = 0$$

Dividiendo a toda la ecuación entre 2 resulta: $5y^2 + 9y = 0$

3º) Para resolver esta ecuación cuadrática ya sabemos aplicar la Fórmula General y tenemos que a = 5, b = 9, c = 0; sustituyendo tenemos:

$$y = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4(5)(0)}}{2(5)} = \frac{-9 \pm \sqrt{81+0}}{10} = \frac{-9 \pm 9}{10}$$

$$y_1 = \frac{-9+9}{10} = \frac{0}{10} = 0 \qquad\qquad y_2 = \frac{-9-9}{10} = \frac{-18}{10} = -1.8$$

4º) Ya que tenemos los dos valores de y, los sustituimos en $x = 3y + 3$ para obtener los valores de x como sigue:

Si $y_1 = 0$, $x = 3(0) + 3 = 0 + 3 = 3 = x_1$

Si $y_2 = -1.8$, $x = 3(-1.8) + 3 = -5.4 + 3 = -2.4 = x_2$

Finalmente las soluciones son los puntos (3 , 0) y (– 2.4 , –1.8) que son los puntos por donde se cortan las gráficas del sistema.

Para trazar las gráficas ya sabes que se tiene que despejar a y de cada ecuación como sigue:

En la primera $x - 3y = 3$ tenemos: $x = 3 + 3y$

$x - 3 = 3y$ es decir $\frac{x}{3} - \frac{3}{3} = y$

Que es lo mismo a: $y = \frac{x}{3} - 1$

En la segunda $x^2 + y^2 = 9$ tenemos: $y^2 = 9 - x^2$ así $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$

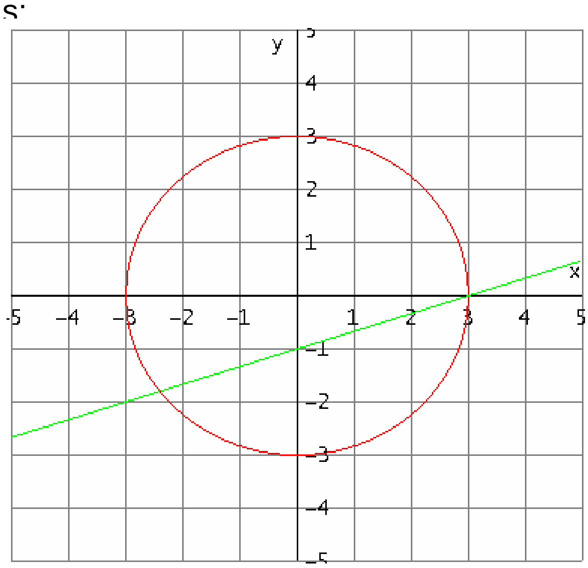
Puedes tabular para trazar sus gráficas:

$y = \frac{x}{3} - 1$

x	y
0	– 1
3	0

$y = \pm\sqrt{9 - x^2}$

x	y
0	± 3
1	$\pm\sqrt{8} = \pm 2.82$
– 1	$\pm\sqrt{8} = \pm 2.82$
2	$\pm\sqrt{5} = \pm 2.23$
– 2	$\pm\sqrt{5} = \pm 2.23$
3	$\pm\sqrt{0} = 0$



Gráfica 13

Y efectivamente los puntos solución son los puntos por donde se cortan la recta y la parábola horizontal.

Ejemplo 4.- Resolver el sistema $x^2 - y = 0$ ← Ecuación **1** no lineal.

$y + 2x - 6 = 0$ ← Ecuación **2** lineal.

Solución:

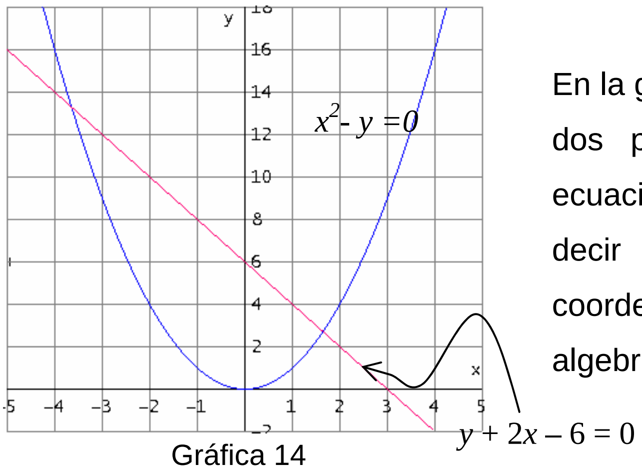
Hagamos el análisis más rápidamente de la siguiente forma:

Si recuerdas de tus cursos anteriores, la primera ecuación se puede escribir como: $y = x^2$ (función cuadrática), cuya gráfica es una parábola con un mínimo en (0,0), este es el vértice y abre hacia arriba.

La segunda ecuación se puede escribir como: $y = -2x + 6$ (función lineal) y representa una línea recta con pendiente -2 y ordenada al origen 6. Así que las podemos graficar en el mismo plano, y ver si es posible encontrar la solución o soluciones de este sistema; para la primera ecuación evaluamos alrededor de $x = 0$ y lo mismo hacemos para la segunda.

X	- 3	-2	-1	0	1	2	3
$y=x^2$	9	4	1	0	1	4	9

x	- 3	-2	-1	0	1	2	3
$y= -2x+6$	12	10	8	6	4	2	0



Gráfica 14

En la gráfica se ve que hay dos soluciones, dos puntos que satisfacen a las dos ecuaciones, pero todavía no se puede decir exactamente cuales son sus coordenadas, así que usaremos un método algebraico, el de **sustitución**.

De las ecuaciones originales tenemos que $y = x^2$, si sustituimos en la segunda ecuación tenemos:

$x^2 + 2x - 6 = 0$ una ecuación de segundo grado donde: $a = 1$, $b = 2$ y $c = -6$ encontramos su solución utilizando la fórmula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 24}}{2}$$

Al hacer las operaciones se tiene que $x_1 = 1.646$ y $x_2 = -3.646$

Ahora encontramos los respectivos valores de y:

Sustituyendo en la ecuación $y = x^2$;

Si $x = 1.646$; $y = (1.646)^2 = 2.708$ entonces una solución es $(1.646 , 2.708)$

Si $x = -3.646$; $y = (-3.646)^2 = 13.292$; la otra solución es $(-3.646 , 13.292)$.

Si nos regresamos a la gráfica se puede verificar que las soluciones coinciden, recordando que también en este caso son una aproximación.

Ejemplo 5. Encuentra las soluciones del siguiente sistema:

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$x - 2y = 4$$

Solución:

Podemos empezar por tratar de graficar para que te des cuenta que es lo que representa la primera ecuación, ya que ahora las dos variables están elevadas al cuadrado. Despejamos a y y de la primera ecuación: $y^2 = 9 - x^2$, sacamos raíz cuadrada de ambos lados y de lado izquierdo se cancela así tenemos:

$$y = \pm\sqrt{9 - x^2}$$

Ahora démosle valores a x y obtengamos el valor de y:

Si $x = -2$; $y = \pm\sqrt{9 - (-2)^2} = \pm\sqrt{9 - 4} = \pm 2.236$

Si $x = 1$; $y = \pm\sqrt{9 - (1)^2} = \pm\sqrt{9 - 1} = \pm 2.828$

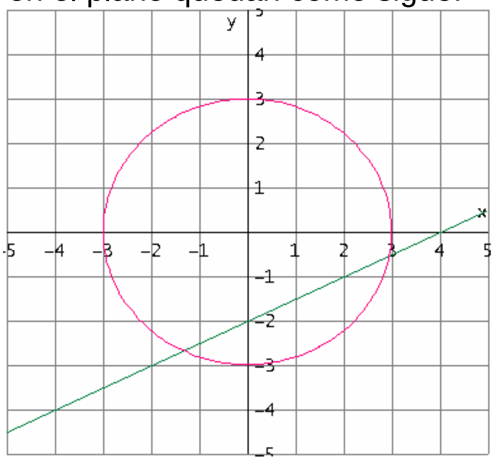
El doble signo, significa que para cada valor de x tienes dos valores de y uno con signo + y otro con signo –, de forma similar dando varios valores a x tenemos la siguiente tabla:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	0	± 2.236	±2.828	±3	±2.828	±2.236	0

La segunda ecuación nuevamente es una línea recta, y si despejas a y te darás cuenta que tiene pendiente ½ y ordenada al origen es –2; $y = (x - 4)/2$, si le damos valores a x obtenemos los de y, por ejemplo: si $x = 0$, $y = -2$; si $x = 4$, $y = 0$; con estos valores ya puedes graficar, claro tu le puedes dar más si lo deseas pero como es una línea recta es suficiente con dos valores de x.

Las dos ecuaciones representadas en el plano quedan como sigue:

Como puedes observar el sistema tiene dos soluciones que podemos encontrar utilizando un método algebraico, para tener una mejor aproximación de estas, así que como en el caso anterior utilicemos el método de sustitución:



Gráfica 15

Despejemos a y de la segunda ecuación: $y = (x - 4)/2$ y sustituyamos este valor en la primera ecuación: $x^2 + \left(\dfrac{x-4}{2}\right)^2 = 9$ resolviendo el binomio

$$x^2 + \frac{x^2 - 8x + 16}{4} = 9,$$ multiplicamos por 4

$$4x^2 + x^2 - 8x + 16 = 36,$$

arreglando términos tenemos $5x^2 - 8x - 20 = 0$

que es una ecuación de segundo grado que podemos resolver usando la fórmula general donde $a = 5$, $b = -8$ y $c = -20$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(5)(-20}}{2(5)}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 + 400}}{10} = \frac{8 \pm \sqrt{464}}{10}$$

$$x_1 = 2.954 \quad \text{y} \quad x_2 = -1.354$$

Ahora encontremos los valores de y, sustituyendo los valores de x en la ecuación lineal: $y = (x - 4)/2$

Si $x = 2.954$, $y = (2.954 - 4)/2 = -0.523$; así una solución es (2.954, – 0.523)

Si $x = -1.354$, $y = (-1.354 - 4)/2 = -2.677$, otra solución es $(-1.354, -2.677)$
Estas dos soluciones coinciden con la gráfica que ya trazamos.

Es conveniente que observes que la primera ecuación de este sistema que es la misma que la segunda ecuación del ejemplo 3 tienen una forma muy especial, ya que las dos variables están elevadas al cuadrado y además sus coeficientes son iguales en este caso es 1, pero podría ser un número diferente, así que siempre que tengas una ecuación de este tipo su gráfica va a ser una circunferencia con centro en el origen y radio la raíz cuadrada del término independiente.

Ahora resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales que involucran una ecuación no lineal y una recta, ve anotando tus observaciones de acuerdo al número de soluciones que pueden tener.

EJERCICIOS1.3.1

Resolver los siguientes sistemas y trazar sus gráficas:

1) $x = 2y$ $x = y^2 - 2y$	2) $y = x - 1$ $y = x^2 - 6x - 9$	3) $2x + y = 3$ $y^2 = 6 - x$	4) $x + y = -8$ $x^2 - y^2 = 16$
5) $y = 3x - 5$ $x^2 + y^2 = 5$	6) $y = 6x - 13$ $y = x^2 - 4$	7) $x + y = 1$ $x y = -6$	8) $y = \sqrt{x}$ $y = 6 - x$
9) $x^2 + y = 4$ $3x - 2y = -5$	10) $x^2 - y = 4$ $3x - 2y = -10$	11) $x^2 + y = 4$ $2x + y = 5$	12) $x^2 + y = 4$ $2x - y = -8$
13) $x^2 + 2y = 9$ $5x - 2y = -5$	14) $x^2 + 4x - y = 2$ $x + 2y = 5$	15) $y = 2x$ $y^2 = -8x - 4$	16) $3y - x = 2$ $x = y^2$
17) $x^2 + y^2 = 25$ $x + y = -5$	18) $x^2 + y^2 = 16$ $x - 3y = 9$	19) $4y = x$ $x^2 + y^2 = 12$	20) $4x + y = -8$ $x^2 + y^2 = 4$

1.3.2 Solución de sistemas formados por dos ecuaciones cuadráticas.

Ejemplo 1.- Resolver el sistema $2x^2 - 16 = 4y$ ← Ecuación **1.**

$3x^2 + y = 3$ ← Ecuación **2.**

Solución:

Volvemos a usar el método de sustitución.

1º) Despejamos la variable al cuadrado de la ecuación **1**:

$$2x^2 = 16 + 4y$$

$$\boxed{x^2 = 8 + 2y}$$

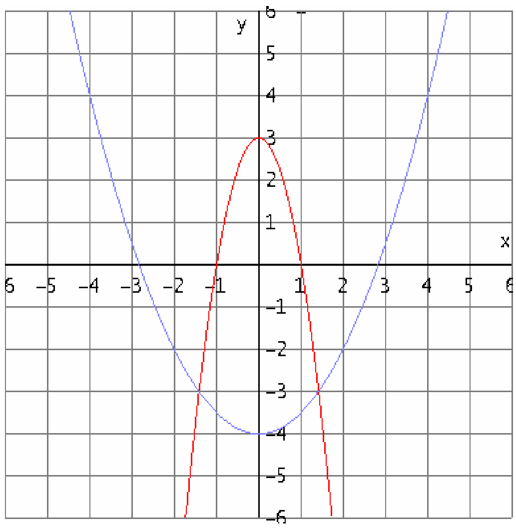
2º) Este valor de x^2 lo sustituimos en la ecuación **2** y tenemos:

$$3(8 + 2y) + y = 3$$

Quitamos el paréntesis: $24 + 6y + y = 3$

Despejamos a y: $7y = 3 - 24$

$$\boxed{y = -3}$$



Gráfica 16

3º) Este valor lo sustituimos en $x^2 = 8 + 2y$

y tenemos: $x^2 = 8 + 2(-3)$

$$x^2 = 8 - 6 = 2$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2} = \pm 1.4142$$

entonces $x_1 = 1.4142$ y $x_2 = -1.4142$.

Finalmente tenemos que las dos soluciones del sistema es decir donde las dos parábolas se cortan son los puntos $(-1.4142 , -3)$ y $(1.4142 , -3)$ como se ve en la gráfica 20.

Ejemplo 2.- Resolver el sistema $x^2 + y^2 = 16$ ← Ecuación **1.**

$2x^2 + 3y = 15$ ← Ecuación **2.**

Solución:

Volvemos a usar el método de sustitución.

1º) Como en la ecuación **2** tenemos x^2, esta variable al cuadrado la despejamos de la ecuación **1**: $x^2 + y^2 = 16$

$$\boxed{x^2 = 16 - y^2}$$

2º) Este valor de x^2 lo sustituimos en la ecuación **2** y tenemos:

$$2(16 - y^2) + 3y = 15$$

Quitando el paréntesis: $32 - 2y^2 + 3y = 15$

Ordenamos: $\boxed{-2y^2 + 3y + 17 = 0}$

Nos queda una ecuación cuadrática que tenemos que resolver.

3º) Para resolver esta ecuación cuadrática ya sabemos aplicar la Fórmula General y tenemos que en esta ecuación $a = -2$, $b = 3$, $c = 17$; sustituyendo tenemos:

$$y = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-2)(17)}}{2(-2)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+136}}{-4} = \frac{-3 \pm \sqrt{145}}{-4} = \frac{-3 \pm 12.04}{-4}$$

$$y_1 = \frac{-3+12.04}{-4} = \frac{9.04}{-4} = -2.26 \qquad y_2 = \frac{-3-12.04}{-4} = \frac{-15.04}{-4} = 3.76$$

4º) Ya que tenemos los dos valores de y, los sustituimos en $x^2 = 16 - y^2$ para obtener los valores de x como sigue:

Si $y_1 = -2.26$, $x^2 = 16 - (-2.26)^2 = 16 - 5.1076 = 10.8934$,
entonces $x^2 = 10.8934$ sacando raíz cuadrada de ambos lados
tenemos $x = \pm 3.3$; separando signos $\boxed{x_1 = 3.3 \quad \text{y} \quad x_2 = -3.3}$

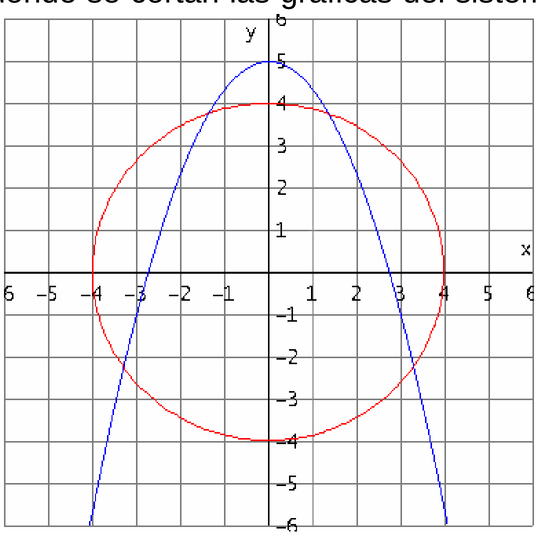
Si $y_2 = 3.76$, $x^2 = 16 - (3.76)^2 = 16 - 14.1376 = 1.8624$,
entonces $x^2 = 1.8624$ sacando raíz cuadrada de ambos lados
tenemos $x = \pm 1.3646$; entonces $\boxed{x_3 = 1.3646 \quad \text{y} \quad x_4 = -1.3646}$

Finalmente las soluciones del sistema son los 4 puntos:

$$\boxed{(-2.26\,,\,3.3),\ (-2.26\,,\,-3.3),\ (3.76\,,\,1.3646)\ \text{y}\ (3.76\,,\,-1.3646)}$$

que efectivamente son los puntos por donde se cortan las gráficas del sistema como lo puedes aprecia en la gráfica 20.

Las graficas de cada ecuación se trazan similarmente a las de los ejercicios anteriores haciendo una pequeña tabulación y tomando en cuenta lo que ya has aprendido hasta el momento de graficación.



Gráfica 17

EJERCICIOS1.3.2

Resolver los siguientes sistemas ya sea por sustitución o eliminación y trazar sus gráficas:

1) $x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0$
   $y + 3 = 2x$

2) $y = x^2 - 4$
   $x^2 + y^2 = 16$

3) $y = x^2 + 2$
   $y = -2x^2 + 5$

4) $y^2 + x = 5$
   $x = y^2 - 2$

5) $x^2 + y^2 = 9$
   $x^2 + y = 8$

6) $9x^2 + 5y^2 = 1$
   $3x - 2y = 1$

7) $x^2 + xy + 4x = -4$
   $3x^2 - 2xy + x = 4$

8) $x^2 + 4xy - 7x = 10$
   $x^2 + 3xy - 6x = 7$

9) $x^2 + y^2 = 29$
   $x^2 + y = 27$

10) $xy - x - y = 0$
   $3xy - 2x - 2y = 4$

11) $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 6$
   $2x^2 + 2y^2 + 3x + 3y = 10$

12) $2x^2 + y^2 = 8$
   $x^2 + y^2 = 4$

1.3.3 APLICACIONES DE SISTEMAS NO LINEALES DE 2x2.

Existen muchos problemas en nuestra vida cotidiana que para resolverlos se necesita plantear un sistema no lineal de 2x2, y cuya solución nos da la respuesta al problema que se nos presente. A continuación veamos algunos ejemplos.

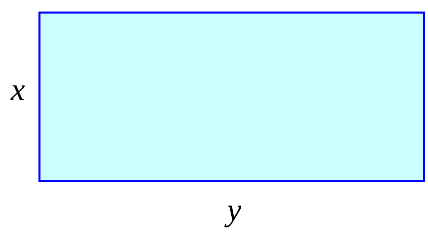
EJEMPLO 1

Se desea cercar un terreno rectangular de área 345 m^2, para esto se necesitan 76 m de alambre. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

Solución:

1º) Traza el rectángulo para que tengas una mejor idea de lo que se te pide en el problema, asígnale al ancho x y al largo y.

2º) Nos dicen que el área es 345m^2, es decir si el área = (largo)(ancho) entonces



se simboliza como $345 = y\,x$ será nuestra primer ecuación.

3º) Por otro lado se necesitan 76 m de alambre para cercar el terreno, en lenguaje algebraico se escribe como $2x + 2y = 76$, que es lo mismo que: $x + y = 38$ (al dividir entre dos) y es nuestra segunda ecuación.

4º) Resolvemos el sistema formado por

$$yx = 345$$
$$x + y = 38$$

Y las soluciones son dos valores para x : $x_1 = 23$ y $x_2 = 15$

5º) Si $x_1 = 23$ fuera el ancho, al sustituir en $x + y = 38$ resulta que $y = 15$, es decir el largo mide 15 m.

Pero si $x_2 = 15$ fuera el ancho, entonces el largo $y = 23$ m.

La respuesta es: **las dimensiones del terreno son de 15 m de ancho y 23 m de largo**.

COMPROBACIÓN:

Cerca = 15 + 23 + 15 + 23 = 76 m.

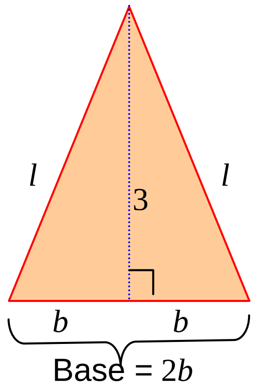
Área = 15(23) = 345 m^2

EJEMPLO 2

La altura de un triángulo isósceles trazada hasta su base es de 3 centímetros, y su perímetro es de 18 centímetros. Determinar la longitud de su base.

Solución:

1º) Trazamos un dibujo con los datos del problema.



2º) Nos dicen que la altura del triángulo isósceles es de 3 cm, y como se ve en la figura la altura divide en dos triángulos rectángulos congruentes al triángulo isósceles, aplicando el Teorema de Pitágoras se cumple $l^2 = 3^2 + b^2$ y es nuestra primer ecuación.

3º) Por otro lado si el perímetro del triángulo isósceles es de 18 cm, usando las variables de la figura tenemos: $2\boldsymbol{l} + 2\boldsymbol{b} = 18$

que es lo mismo que $\boldsymbol{l} + \boldsymbol{b} = 9$ al dividir entre dos, y tenemos nuestra segunda ecuación.

4º) Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} l^2 &= 3^2 + b^2 \\ l + b &= 9 \end{aligned}$$

al resolverlo resulta que $\boldsymbol{b} = 4$ y en consecuencia $\boldsymbol{l} = 5$.

La respuesta al problema es: **la base mide 8 cm.**

COMPROBACIÓN:

Veamos si se cumple el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo, es decir $l^2 = 3^2 + b^2$

$$5^2 = 9 + 4^2$$

$25 = 9 + 16$ lo cual es cierto.

Ahora el perímetro del triángulo isósceles es $2l + 2b = 2(5) + 2(4) = 10 + 8 = 18$

Que también es cierto.

EJEMPLO 3

Un grupo de pescadores alquiló una lancha por $3000. Dos miembros del grupo no pudieron tomar parte en la expedición y, por lo tanto, cada uno de los demás pescadores tuvo que pagar $125 más. ¿Cuántos pescadores había en el grupo original?

Solución:

1º) Supongamos que hay x pescadores al principio.

2º) Si el alquiler costó $3000, cada uno pagaría: $\$\frac{3000}{x}$

3º) Dos miembros se retiraron, entonces quedan y pescadores y cada uno pagará $\$\frac{3000}{y}$.

4º) Si al principio había x pescadores y se retiraron dos, quedan $x-2$ pescadores, esto quiere decir que $y = x - 2 \longrightarrow$ Ecuación 1

5º) Cada uno de los y pescadores pagará $125 más, esto se representa como: El pago actual = El pago anterior + $125

$$\frac{3000}{y} = \frac{3000}{x} + 125 \longrightarrow \text{Ecuación 2}$$

6º) Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones 1 y 2, sustituyendo el valor de y en la ecuación 2 nos queda: $\frac{3000}{x-2} = \frac{3000}{x} + 125$

para resolverla multiplica toda la ecuación por $x(x-2)$ y tendrás

$$x(x-2)\left(\frac{3000}{x-2} = \frac{3000}{x} + 125\right)$$

al hacer el producto y simplificando se tiene: $3000x = 3000(x-2) + x(x-2)$ haciendo los productos y sumando términos semejantes nos queda la ecuación cuadrática $125x^2 - 250x - 6000 = 0$ dividiéndola toda entre 125 se reduce a

$$x^2 - 2x - 48 = 0$$

cuyas soluciones son: -6 y 8

6º) Para dar respuesta al problema nos sirve la solución positiva ya que no puede haber -6 pescadores

La solución del problema es: **en el grupo original había 8 pescadores.**

COMPROBACIÓN:

Al principio: 8 pescadores pagan $3000, cada uno paga $375.

Se retiran 2: quedan 6 pescadores y cada uno paga $\$\frac{3000}{6} = \$500$

Que efectivamente son $125 más.

EJEMPLO 4

Dos tuberías juntas pueden llenar un tanque en 6 horas. La tubería más pequeña sola necesita 3½ horas más que la más grande para llenarlo. ¿Cuánto tiempo tardaría cada una de las tuberías sola para llenar el tanque?

Solución:

1º) Supongamos que la tubería más grande ella sola llena el tanque en x hrs, y la tubería pequeña también ella sola en y horas.

2º) En una hora la porción del tanque que ha llenado la tubería mayor es $\frac{1}{x}$, y en 6 horas será de $6(\frac{1}{x}) = \frac{6}{x}$

3º) Mientras que la tubería pequeña en una hora ha llenado $\frac{1}{y}$ porción del tanque, entonces en 6 horas llevará $6(\frac{1}{y}) = \frac{6}{y}$

4º) Ambas porciones juntas llenarán un tanque, en símbolos: $\frac{6}{x} + \frac{6}{y} = 1$

Es la primer ecuación.

5º) Que la tubería pequeña necesite 3½ horas más que la grande para llenarlo se simboliza como: $y = x + 3.5$ será nuestra ecuación 2.

6º) Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones 1 y 2: $\frac{6}{x} + \frac{6}{y} = 1$

$y = x + 3.5$

Para resolver este sistema sustituyes el valor de y en la primera y tendrás:

$$\frac{6}{x} + \frac{6}{x+3.5} = 1$$

multiplicando toda la ecuación por $x(x + 3.5)$ y simplificando llegarás a:

$$6(x + 3.5) + 6x = 1(x(x + 3.5))$$

al realizar los productos y sumar los términos semejantes tendremos la ecuación cuadrática: $x^2 - 8.5x - 21 = 0$

cuyas soluciones son: 10.5 y –2

7º) La solución que nos sirve es 10.5 ya que un tanque **no** se puede llenar en – 2 horas.

Resultado: La **tubería** más **grande**, sola tardará en llenar el tanque en **10½ hrs** y la **tubería pequeña** que tarda 3½ hrs más, sola llenará el tanque en **14 hrs**.

COMPROBACIÓN:

Tubería mayor en 1 hora la porción del tanque que ha llenado es $\frac{1}{10.5}$.

Mientras que la pequeña en 1 hora ha llenado $\frac{1}{14}$.

En 6 horas juntas llevan $\frac{6}{10.5} + \frac{6}{14} = \frac{6(14)+6(10.5)}{10.5(14)} = 1$

Efectivamente llenan el tanque.

De forma similar, paso por paso plantea y resuelve los siguientes ejercicios.

EJERCICIOS 1.3.3

Resolver los siguientes problemas:

14) El área de un campo rectangular es de 216 m^2, su perímetro es de 60 m. Calcular las dimensiones del campo.

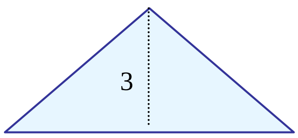
15) La superficie de un terreno rectangular es de 779m^2. Por un lado del terreno pasa un río, y en consecuencia no necesita barda. Encuentra las dimensiones del terreno si la longitud de la barda es de 79 metros.

16) El área de un terreno rectangular es de 1131 m^2. Encontrar sus dimensiones sabiendo que sus lados difieren en 10 metros.

17) La esquina de un lote tiene la forma de un triángulo rectángulo, tal que la suma de los catetos es 47 m., y la hipotenusa mide 37m. Hállese la longitud de los catetos.

18) La diferencia entre los catetos de un triángulo rectángulo es 8 cm., y la hipotenusa mide 40 cm. Calcular la longitud de los catetos.

6) La altura de un triángulo isósceles trazada hasta su base es de 3 centímetros, y el perímetro del triángulo es de 18 centímetros. Determinar la longitud de su base.



7) El área impresa de un desplegado rectangular es de 704 cm^2. El área impresa más los márgenes dan un área total de 1200 cm^2 Encuentra las dimensiones del desplegado se cada uno de los cuatro márgenes tiene 4 cm de ancho.

8) Un grupo de niños rentó una pista de patinaje por $2400. Más tarde se unen a estos niños otros 10 y con esto se reduce el costo en $20 para cada niño. Encuentra el costo para cada niño y el número total de niños.
9) Un cocinero de un famoso restaurante tiene el cargo de preparar una cena para un grupo de amigos, cuyo costo total es de $1080. Justo unos momentos antes del banquete, se añaden 6 personas más, lo que hace que se tienen que repartir la comida entre más personas, eso si, también hace que cada uno del grupo pague $6 menos. ¿Cuántas personas asistieron a la cena y cuánto les costó a cada una?
10) Una alberca se llena por medio de dos tuberías que tardan en hacerlo 8 hrs. La tubería más grande puede llenar la alberca en 12 hrs menos que la más pequeña. Encuentra el tiempo requerido por cada una de las tuberías para llenar la alberca.
11) Una mecanógrafa necesitará 45 horas para escribir un determinado documento. Una segunda mecanógrafa, que tardaría 2 minutos más en cada página, necesitaría 60 horas. ¿Cuántas páginas tiene el documento y en cuánto tiempo escribe una página cada una de las mecanógrafas?
12) Una lancha hizo un viaje de 9 millas a favor de la corriente y de regreso en contra de la corriente en 3 horas. Si la corriente hubiera sido la mitad de fuerte, el viaje se hubiera hecho en 36 minutos menos. Dar la velocidad de la lancha en aguas tranquilas y la velocidad de la corriente más fuerte.
13) Jorge compro varias acciones en $ 3000. Un mes después las vendió todas, excepto 10, con una utilidad de $ 50 por acción y recuperó su inversión de $ 3000. ¿Cuántas acciones compró originalmente y a que precio?
14) El área impresa de una página debe de ser de 90 cm^2. Los márgenes superior e inferior son cada uno de 3.75 cm y los laterales de 2.5 cm. Encuentra las dimensiones de la página si el área es de 200 cm^2.
15) Un alambre con longitud de 60 cm, se corta en dos partes. ¿Es posible doblar una parte para formar un cuadrado y doblar la otra parte para formar un círculo, de modo que el área encerrada por las dos partes sea de 100 centímetros cuadrados? En caso de que así sea, determine la longitud de un lado del cuadrado y el radio del círculo.

A U T O E V A L U A C I O N

Con esta evaluación verificarás si realmente has adquirido los conocimientos básicos necesarios para probar esta unidad y si has logrado los objetivos propuestos al principio de ésta. Para hacer esta evaluación, y los resultados que obtengas sean verdaderamente lo que aprendiste, es necesario que la resuelvas sin consultar el texto durante la solución, pero sí te recomendamos que tengas tu formulario que puedes consultar.

Esperamos que esta autoevaluación la termines en 2 horas como máximo.

RESOLVER LOS SIGUIENTES SISTEMAS:

1) $$\begin{aligned} 3x + 2y - 2z &= 14 \\ x \qquad - 6z &= 16 \\ 2x \qquad + 5z &= -2 \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} 2x - y + z &= 0 \\ 3x - 2y + 4z &= 11 \\ 5x + y - 6z &= -32 \end{aligned}$$

RESUELVE Y TRAZAR LAS GRÁFICAS DE LOS SIGUIENTES SISTEMAS:

3) $$\begin{aligned} x^2 - y &= 0 \\ y - 2x &= 3 \end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned} 3x + y &= 0 \\ 3x^2 + y^2 &= 9 \end{aligned}$$

AHORA TIENES QUE RESOLVER LOS SIGUIENTES PROBLEMAS:

5) La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180º. El ángulo mayor es el doble del menor. La suma del menor y el mayor es el doble del otro ángulo. Encuentre la medida de cada ángulo.

6) El viaje a una práctica de campo salió en \$4480. Si hubieran ido 4 estudiantes más el costo por estudiante hubiera sido de \$20 menos. ¿Cuántos estudiantes fueron a la práctica de campo y cuánto pagó cada uno?

ESCALA:

Para considerar si has aprendido el principal propósito de esta unidad, es necesario que resuelvas correctamente las preguntas 1, 2, 3 y 4 pero no has logrado todos los objetivos, SÓLO LOS BÁSICOS. Si resuelves también la 5 entonces vas avanzando muy bien, pero si también resuelves la 6, ¡FELICIDADES!, lograste todos los objetivos de la unidad y estas listo para continuar con la siguiente. Si resuelves menos de 4 preguntas, tienes que volver a estudiar con mayor conciencia esta unidad y hacer todos los ejercicios propuestos.

TE RECOMENDAMOS RESOLVER LOS REACTIVOS CORRESPONDIENTES A ESTA UNIDAD PARA QUE REPASES Y COMPLETES MUCHO MEJOR TU ESTUDIO.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS.

EJERCICIOS 1.1

1) $x = 0$, $y = 1$ 2) $x = –2$, $y = 1$ 3) $x = ½$, $y = ½$ 4) $x = 1$, $y = –1$

5) $x = 20/31$, $y = –26/31$ 6) no tiene solución las rectas son paralelas.

7) $x = 1$, $y = -2$ 8) $x = -3$, $y = 5$ 9) $x = 4$, $y = -2$

10) Tiene muchas soluciones. 11) No tiene solución, rectas paralelas.

12) El primer número es el 5 y el segundo número es el 2.

13) El kilo de limón a $ 6 y el kilo de naranja a $ 3.

14) Laura tiene 42 anillos y Marta tiene 18 anillos.

15) Alberto tiene 20 años y Sergio tiene 6 año.

16) El número es el 88.

17) El kilo de huevo es a $ 11 y el kilo de jitomate a $ 9.

18) Llevaba 12 ramos y el costo de la plancha es de $ 196.

19)

EJERCICIOS 1.2

1) $x = 3$, $y = –1$, $z = –2$ 2) $x = –4$, $y = –2$, $z = 5$ 3) $x = –1$, $y = 1$, $z = 2$

4) $x = 2/13$, $y = 3/13$, $z = 16/13$ 5) no tiene solución 6) $x = 1$, $y = –6$, $z = –3$

7) $x = 2$, $y = 1$, $z = –3$ 8) $x = -4$, $y = -3$, $z = 1$ 9) $x = 8/5$, $y = 2$, $z = 1/5$

10) No tiene solución 11) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ 12) $x = 0$, $y = 5$, $z = -2$

13) Tiene muchas soluciones 14) $x = 7$, $y = -5$, $z = -3$

15) $x = -1$, $y = -2$, $z = -1$, $u = 1$ 16) $x = 2$, $y = -3$, $z = -2$, $u = 4$

17) $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$, $u = -1$, $t = 5$

18) 30 monedas de $ 5, 20 monedas de $ 10 y 50 monedas de $20.

19) La primera calificación es 61 la segunda es 82 y la tercera es 79.

20) Medidas: ángulo menor = 30º, ángulo medio = 60º y ángulo mayor = 90º.

21) El número es 935.

22) El número es 526.

23) El 1er caballo costó $2400, el 2º $2000, el 3º $800 y el 4º $2800.

24) La primer caja pesa 3.8 kg, la segunda 2.4 kg y la tercera 21 kilos.

25) El 1er. saco pesa 5.5 kg, el 2º 6.5 kg, el 3º 7kg, el 4º 4.5 kg y el 5º 3.5 kg.

26) Paquita tuvo 1 hijo en su primer matrimonio y Luis tuvo 2, juntos tuvieron 1.

27) 8 billetes de $ 20, 24 billetes de $ 50 y 12 billetes de $ 100.

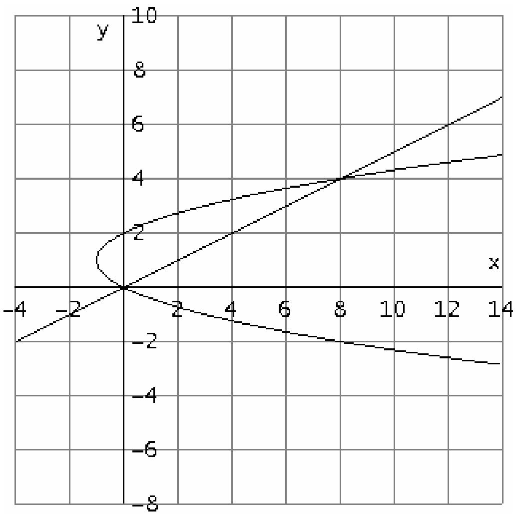
28) 50 litros de la marca X, 40 litros de la marca Y y 10 litros de la marca Z.

29) Luis se comió la mitad de la pizza, Pedro se comió una tercera parte y
Ernesto se comió la sexta parte.

30) La altura del Everest es de 8880 m.

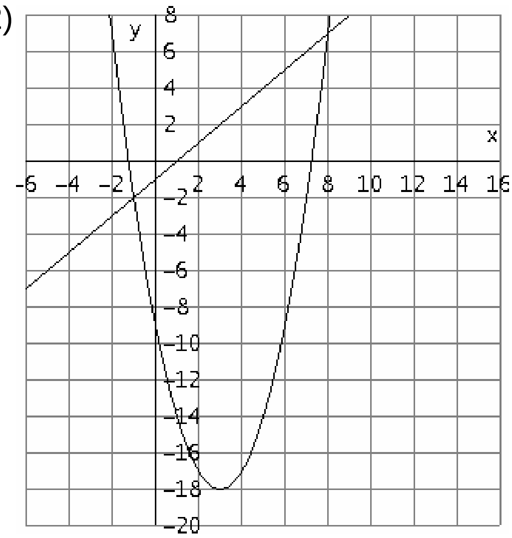
EJERCICIO 1.3.1

1)



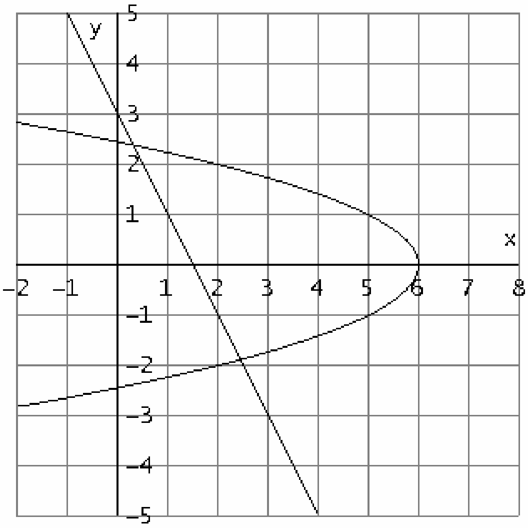
(0 , 0) y (8 , 4)

2)



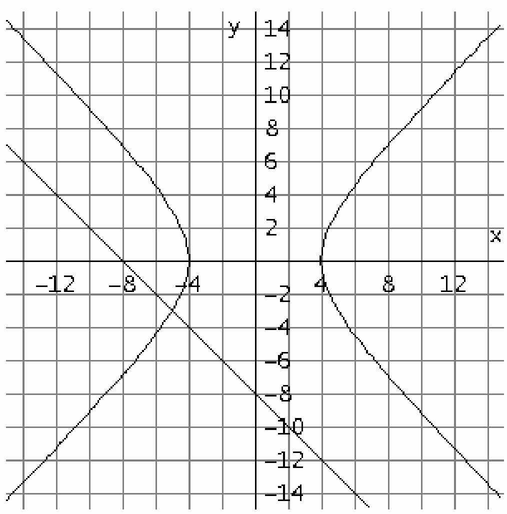
(–1 , –2) y (8 , 7)

3)



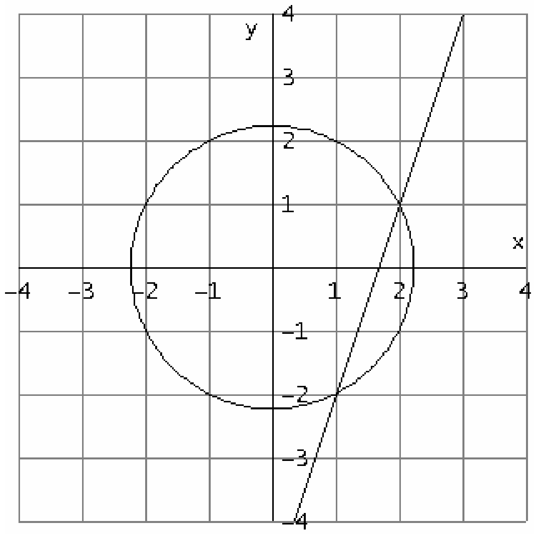
(0.306 , 2.38) y (2.44 , –1.88)

4)



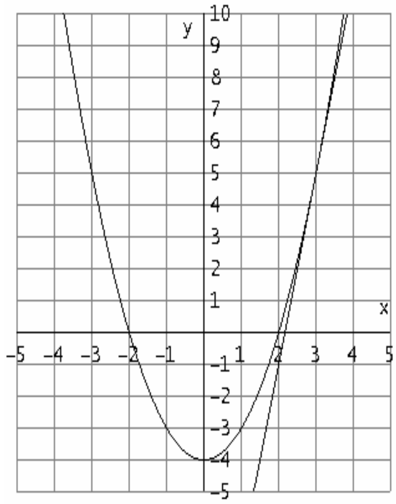
(–5 , –3)

5)



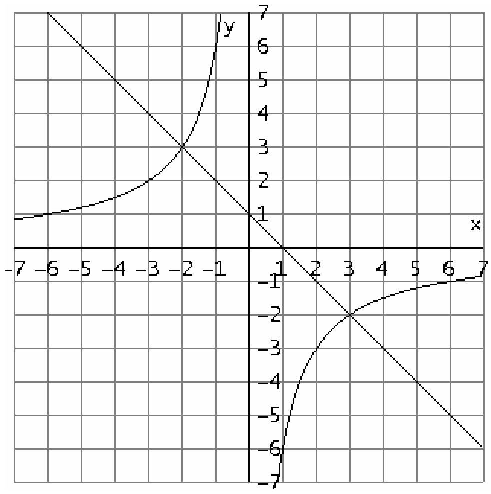
(1 , –2) y (2 , 1)

6)



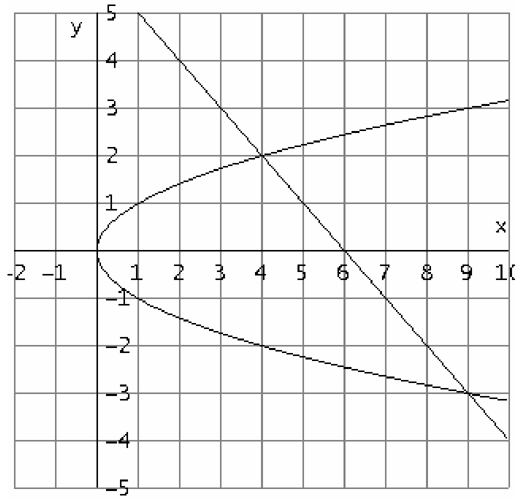
(3 , 5)

7)



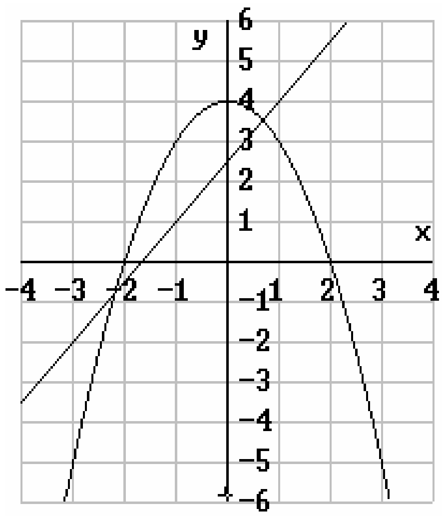
(–2 , 39 y (3 , –2)

8)

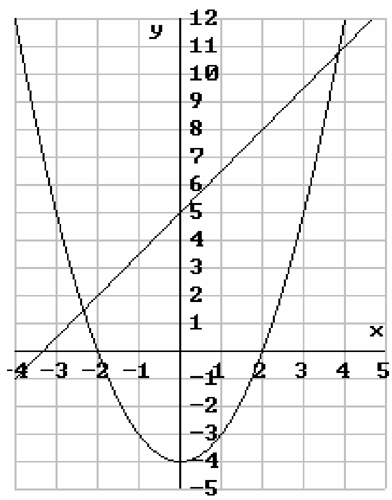


(4 , 2) y (9 , –3)

9)

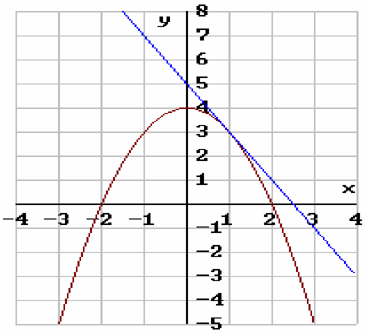


10)



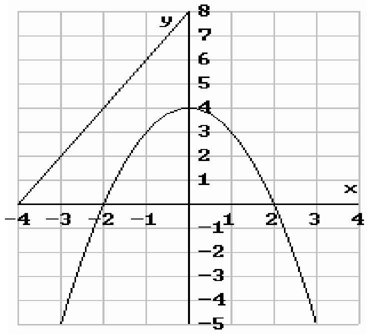
9) (0.686 , 3.529) y (–2.186, –0.779)   10) (3.84 , 10.76) y (–2.34 , 1.486)

11)



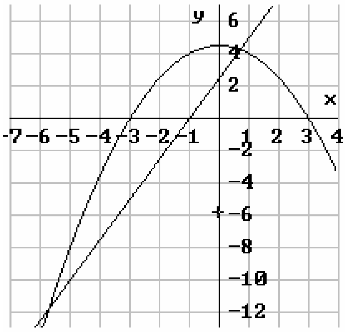
(1 , 3)

12)



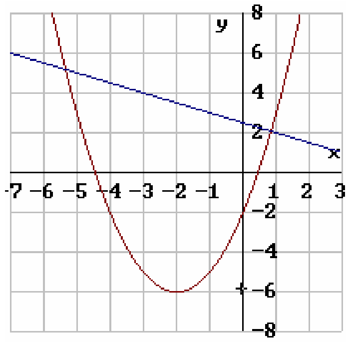
No tiene solución, porque no se cortan

13)



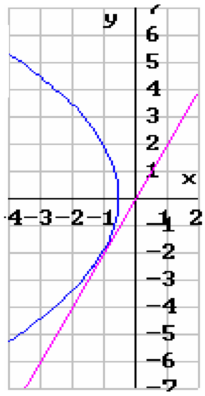
(–5.702 , –11.75) y (0.702 , 4.25)

14)



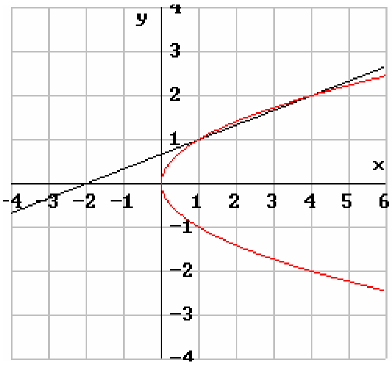
(–5.342 , 5.171) y (0.842 , 2.079)

15)



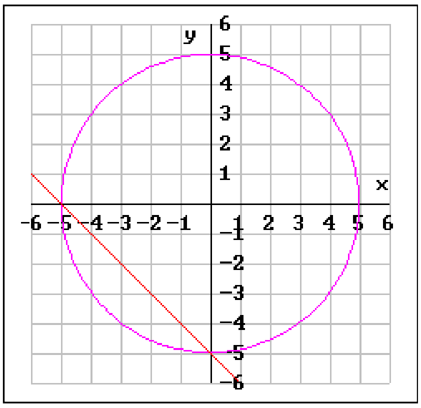
(– 1 , – 2)

16)



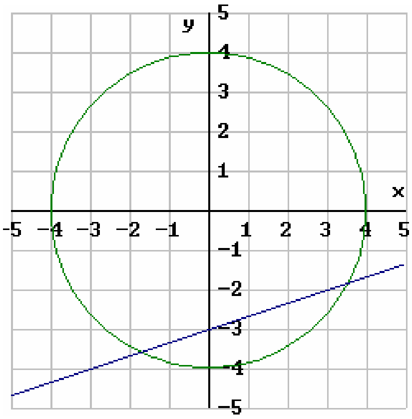
(1 , 1) y (4 , 2)

17)



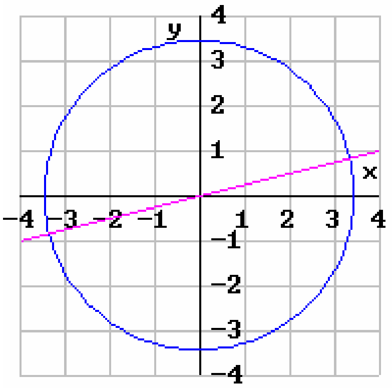
(0 , –5) y (– 5 , 0)

18)

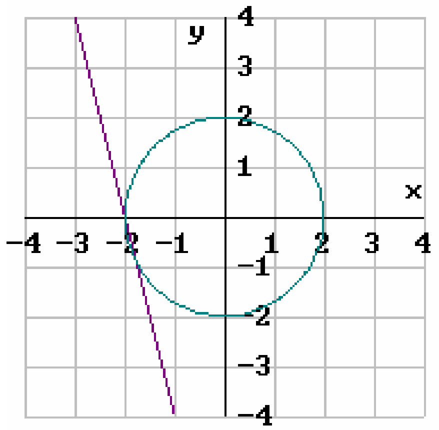


(–1.766 , –3.589) y (3.566 , –1.811)

19)



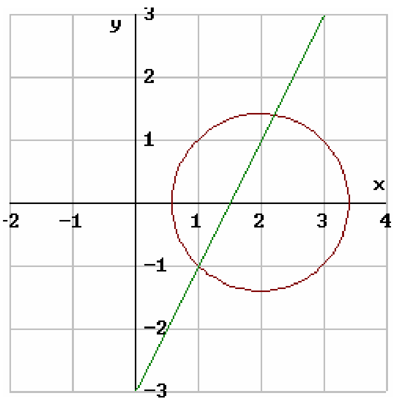
20)



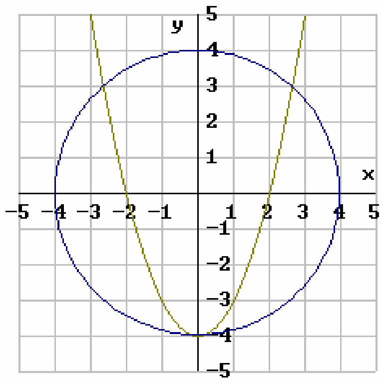
(3.361 , 0.840) y (–3.361 , –0.840)

(–2 , 0) y (–1.765 , –0.941)

EJERCICIO 1.3.2

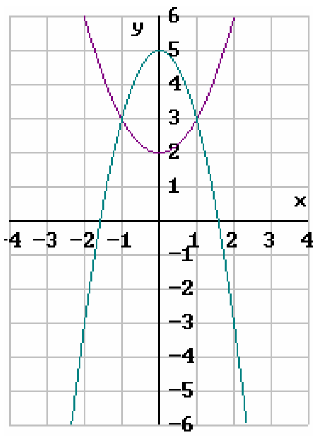


1) (1 , – 1) y (2.2 , 1.4)

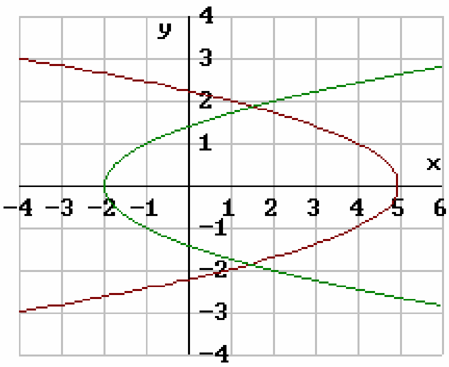


2) (0 , –4) , ($\sqrt{7}$, 3) y (–$\sqrt{7}$, 3)

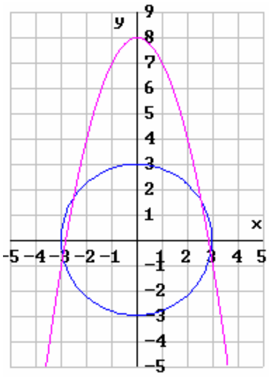
3) (1 , 3) y (– 1 , 3)



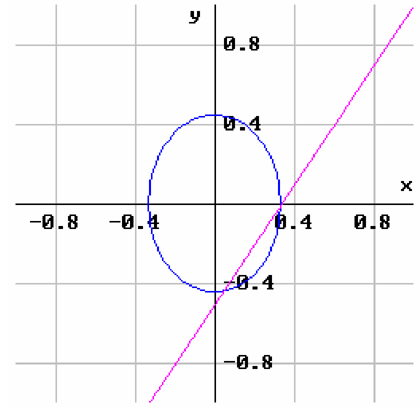
4) (1.5 , 1.87) y (1.5 , –1.87)



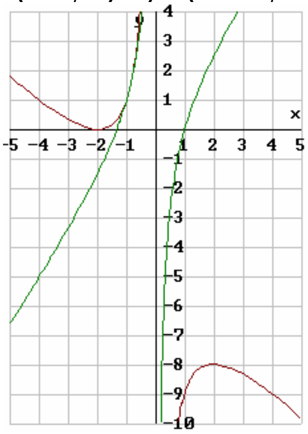
5) (2.526 , 1.618), (–2.526 , 1.618)
(2.936 , –0.618) y (-2.936 , –0.618)



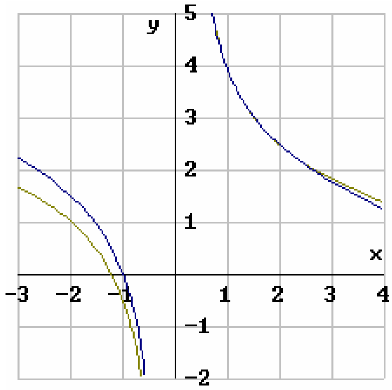
6) (0.33 , 0) y (0.037 , –0.44)



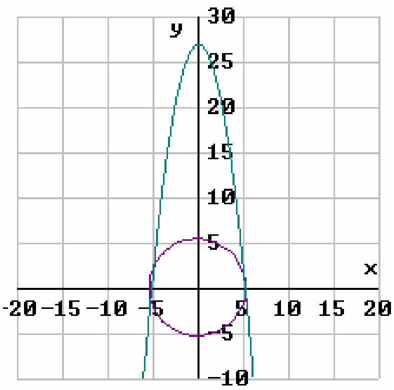
7) (–1 , 1) y (–0.8 ,1.8)



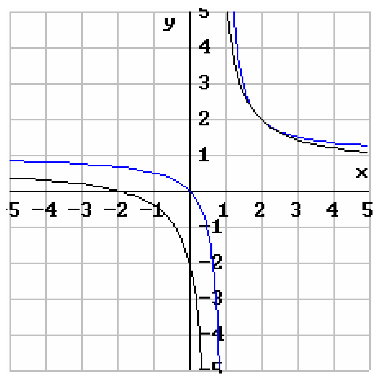
8) (2 , 2.5) y (1 , 4)



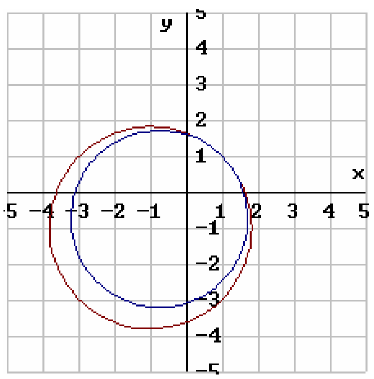
9) (5 , 2), (–5 , 2), (5.29 , –1), (–5.29 , –1)



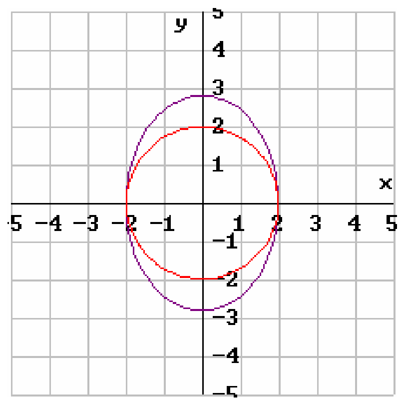
10) (2 , 2)



11) (1 , 1)



12) (2 , 0) y (–2 , 0)



EJERCICIO 1.3.3

1) 12 m de ancho y 18 m de largo
2) 19 m de ancho y 41 m de largo
3) 29 m de ancho y 39 m de largo
4) Sus catetos miden 12 m y 35 m.
5) Sus catetos miden 24 y 32 cm.
6) La base mide 4 cm.
7) 30 cm de ancho y 40 cm de largo
8) Cada uno pagó $60 y son 40 niños.
9) Asistieron 36 amigos y cada uno pagó $30.
10) La tubería pequeña tarda 24 hrs y la grande 12 hrs.
11) El documento tiene 450 hojas y tardan por hoja 6 y 8 minutos respectivamente

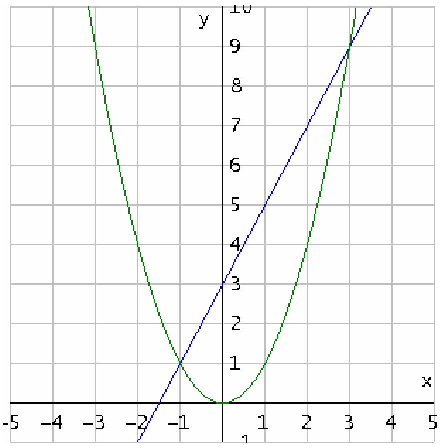
SOLUCIÓN A LA AUTOEVALUACIÓN

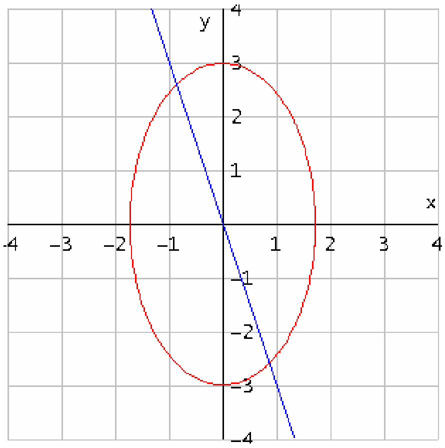
1) $x = 4$, $y = -2$, $z = -2$

2) $x = -1$, $y = 3$, $z = 5$

3) $(-1, 1)$ y $(3, 9)$

4) $(0.866, -2.598)$ y $(-0.866, 2.598)$





5) Ángulo menor = 40º , ángulo medio = 60º y ángulo mayor = 80º.

6) A la práctica de campo fueron 28 estudiantes y cada uno pagó $160.

B I B L I O G R A F I A

1.- Swokowski E. W. Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica, 2da. ed. Grupo Editorial Iberoamérica. México, 1986.

2.- Johnson. Álgebra y Trigonometría con aplicaciones. Edit. Trillas.

3.- Larson R. E:, Hostetler R. P. Älgebra, Publicaciones Cultural, México, 1997.

4.-Gordon Fuller, Álgebra Elemental, CECSA, 3ª Edición, México.

5.- Rees P., Sparks F., et, al. Älgebra, McGraw-Hill. México. 1991.

6.- Sobel M. A., Lerner N. Álgebra, 4ª Edición, Prentice-Hall Hispanoamericana. México, 1997.

7.- Rider Paul R., Algebra, Editorial Herrero, 4ª Edición. México.

REACTIVOS DE LA UNIDAD 1: SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

Para complementar tu estudio sobre esta unidad debes de resolver los siguientes reactivos ya que tu examen extraordinario puede estar formado con preguntas muy parecidas a las que te presentamos a continuación.
Cada reactivo tiene asignada una letra que corresponde a su clasificación según el grado de dificultad, F: fácil, R: regular y D: difícil.
Te recomendamos que los clasificados como D los dejes al final y si es necesario pide ayuda a algún profesor, esperamos no tengas mayor problema con los ejercicios marcados con R y menos con los F.

1(F).- ¿Cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones 2 × 2 es lineal?.

a) $x + y = 5$, $x^2 - y^2 = 8$ b) $x - y = 4$, $x^2 + 2x + y = 16$ c) $x^2 + y^2 = 10$, $x + y = 5$ d) $x - 2y = 2$, $x + y = 4$ e) $x + y = 4$, $x^2 + 2y = 11$

2(R).- ¿Cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones 2 × 2 es lineal?.

a) $2(x + y)^2 = 5$, $x - y = 8$ b) $x - y = 4$, $(x + y)x = 16$ c) $x + y = 10$, $x^2 + y = 5$ d) $x^2 - y = x^2 + x$, $x + y = 4$ e) $x + y = 4$, $x^2 + 2y = 11$

3(F).- ¿Cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones 2 × 2 no es lineal?.

a) $x + y = 4$, $2x + y = 4$ b) $x + y = 0$, $2x - y = 0$ c) $x + y = 3$, $x - y = 5$ d) $2x - y = 0$, $x + y = 5$ e) $2x + y = 4$, $x^2 - y^2 = -1$

4(R).- ¿Cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones 2 × 2 no es lineal?.

a) $2(x + 4) = 4y$, $2x + y = 4$ b) $(x + 1)^2 = x^2 + x + y$, $2x - y = 0$ c) $2x^2 + y = 2x^2 + 5$, $x - y = 5$ d) $x - y = 0$, $x + y = 5$ e) $2x^2 + y = 4$, $x - y = -1$

5(F).- ¿Cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones es triangular?.

a) $x + y = 1$, $2x + y = 4$ b) $x - y = 5$, $x + y = 8$ c) $2x + 3y = -4$, $x + y = 6$ d) $x + 2y = 7$, $y = 5$ e) $5x - 3y = 4$, $3x - y = 8$

6(F).- ¿Cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones no es triangular?.

a) $x + y = 6$, $2y = 1$ b) $x - y = -4$, $x = 5$ c) $5x - y = 0$, $2x + y = 5$ d) $2x - y = 3$, $y = 5$ e) $3x + 2y = 6$, $4x = 1$

7(F).- ¿Cuál es la ecuación que se obtiene al despejar la variable "x "en la primera ecuación del siguiente sistema, y sustituir este valor en la segunda?.

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x - 3y &= 4 \end{aligned}$$

a) $-4y = 2$ b) $-5y = 2$ c) $-5y = 6$ d) $4y = 2$ e) $5y = 2$

8(F).- ¿Cuál es la ecuación que se obtiene al despejar la variable "x "en la primera ecuación del siguiente sistema, y sustituir este valor en la segunda?.

$$\begin{aligned} 2x - 4y &= 6 \\ x - 3y &= 4 \end{aligned}$$

a) $-y = 1$ b) $y = 1$ c) $y = 2$ d) $y = -2$ e) $2y = 0$

9(F).- ¿Cuál es la ecuación que se obtiene al despejar la variable "y "en la primera ecuación del siguiente sistema, y sustituir este valor en la segunda?.

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x - 3y &= 4 \end{aligned}$$

a) $-x = 7$ b) $-5x = 7$ c) $5x = 7$ d) $x = 7$ e) $-x = 1$

10(R).- ¿Cuál es la ecuación que se obtiene al despejar la variable "y "en la segunda ecuación del siguiente sistema, y sustituir este valor en la primera?.

$$\begin{aligned} 3(x + y) &= 6 \\ 2x - y &= 4 \end{aligned}$$

a) $x = -2$ b) $3x = 2$ c) $3x = 18$ d) $x = 1$ e) $9x = 18$

11(F).- La ecuación que se obtiene al sumar las ecuaciones del siguiente sistema es:

$$\begin{aligned} x + y &= -4 \\ 2x - 3y &= -2 \end{aligned}$$

a) $3x - 2y = 6$ b) $3x + 2y = -6$ c) $x - 2y = -6$ d) $3x - 2y = -6$ e) $3x + 2y = 6$

12(F).- La ecuación que se obtiene al sumar las ecuaciones del siguiente sistema es:

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$$

a) $2x + 2y = 3$ b) $2x = 3$ c) $2y = 3$ d) $2x - 2y = 3$ e) $-2y = 3$

13(D).- ¿Cuál de los sistemas triangulares de ecuaciones es equivalente al sistema que a continuación se escribe?.

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 2x - y &= 1 \end{aligned}$$

a) $\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 3x &= 1 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 3x &= 3 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} x - y &= 2 \\ y &= 2 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ -3y &= 3 \end{aligned}$ e) $\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ 3y &= -3 \end{aligned}$

14(D).- ¿Cuál de los sistemas triangulares de ecuaciones es equivalente al sistema que a continuación se escribe?.

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 2x - y &= -1 \end{aligned}$$

a) $\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 3x &= 1 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 3x &= 3 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} x - y &= 2 \\ y &= 2 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} 2x - y &= -2 \\ 3y &= 6 \end{aligned}$ e) $\begin{aligned} 2x - y &= -2 \\ 3y &= -6 \end{aligned}$

15(F).- $x = 3$, $y = 2$ es la solución del sistema de ecuaciones:

a) $\begin{aligned} x + y &= 5 \\ y &= 3 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ x &= 2 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} x - y &= 1 \\ y &= 2 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} x + 2y &= 7 \\ x &= 4 \end{aligned}$ e) $\begin{aligned} 3x + 2y &= 16 \\ y &= 2 \end{aligned}$

16(F).- $x = 1$, $y = 5$ es la solución del sistema de ecuaciones:

a) $\begin{aligned} x + y &= 6 \\ y &= 1 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x - y &= -4 \\ x &= 5 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 5x - y &= 0 \\ y &= 5 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ y &= 5 \end{aligned}$ e) $\begin{aligned} 3x + 2y &= 6 \\ x &= 1 \end{aligned}$

17(F).- El sistemas de ecuaciones que tiene como solución $x = 1$ y $y = 2$ es:

a) $x + y = 4$, $2x + y = 4$

b) $x + y = 0$, $2x - y = 0$

c) $x + y = 3$, $x - y = 5$

d) $2x - y = 0$, $x + y = 5$

e) $2x + y = 4$, $x - y = -1$

18(F).- El siguiente sistema de ecuaciones tiene:

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= 2 \\ -4x + 10y &= 2 \end{aligned}$$

a) solución única   b) muchas soluciones   c) no tiene solución

d) dos soluciones   e) soluciones complejas

19(F).- Al resolver por eliminación el siguiente sistema la solución es:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 3 \\ -x + 5y &= 16 \end{aligned}$$

a) (–3, 3)   b) (–3, 6)   c) (1, 3)   d) (–1, 3)   e) (3, –1)

20(R).- La solución del siguiente sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned} 5x - 4y &= -3 \\ 2x - 3y &= 7 \end{aligned}$$

a) $x = -\frac{19}{7}, \quad y = -\frac{41}{7}$ b) $x = -\frac{37}{7}, \quad y = -\frac{41}{7}$ c) $x = -\frac{19}{23}, \quad y = -\frac{41}{23}$

d) $x = -\frac{19}{7}, \quad y = -\frac{4}{7}$ e) no tiene solución

21(F).- ¿Cuál es el valor para "y" que se obtiene al resolver el siguiente sistema de ecuaciones?:

$$\begin{aligned} x + y &= 10 \\ x - 2 &= 5 \end{aligned}$$

a) $y = 1$ b) $y = 2$ c) $y = 3$ d) $y = 4$ e) $y = 5$

22(F).- Cuál es el valor para "x" que se obtiene al resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = 3$ d) $x = 4$ e) $x = -4$

23(R).- ¿Cuál es el valor para "x" que se obtiene al resolver el siguiente sistema de ecuaciones?:

$$x + y = 0$$
$$3x - 5y = 16$$

a) $x = -2$ b) $x = 2$ c) $x = 0$ d) $x = -1$ e) $x = 1$

24(R).- ¿Cuál es el valor para "y" que se obtiene al resolver el siguiente sistema de ecuaciones?:

$$x - y = 1$$
$$2x + 7y = 2$$

a) $y = 0$ b) $y = 1$ c) $y = -1$ d) $y = 2$ e) $y = 3$

25(R).- Rodrigo vendió dos automóviles recibiendo un total de $130 000. Si recibió $14 000 más por uno que por otro, ¿cuál fue el precio de venta de cada uno?

a) $51 000 uno y $ 65 000 el otro
b) $58 000 uno y $72 000 el otro
c) $65 000 uno y $79 000 el otro
d) $ 14 000 uno y $116 000 el otro
e) $72 000 uno y $86 000 el otro

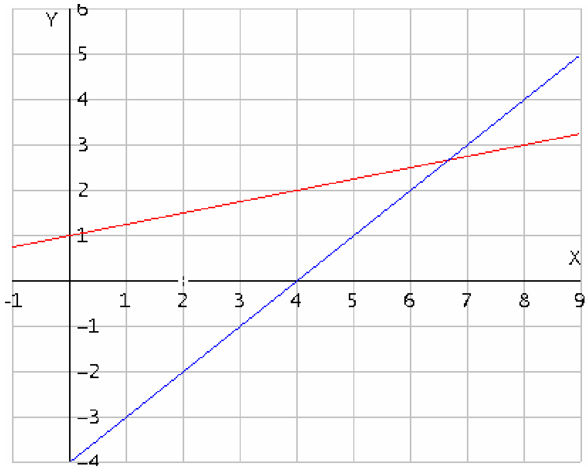
26(R).- Un fabricante de dulces tiene dos clases de dulces que se venden a $75 y $90 el kilo, respectivamente. ¿Cuántos kilos de cada clase de dulce deberá emplear para tener una mezcla de 150 kilos que se venda a $78 el kilo?

a) 30 kilos de $75 y 120 kilos de $90
b) 50 kilos de $75 y 100 kilos de $90
c) 20 kilos de $75 y 130 kilos de $90
d) 130 kilos de $75 y 20 kilos de $90
e) 120 kilos de $75 y 30 kilos de $90

27(R).- Un ángulo de un triángulo mide el doble de otro de los ángulos y tiene 25 grados más que el tercer ángulo. ¿Cuáles son las medidas de los tres ángulos?

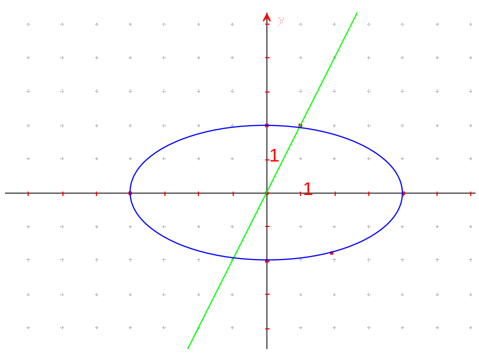
a) 82° 41° y 57°
b) 62°, 31° y 87°
c) 51°, 102° y 76°
d) 41°, 82° y 66°
e) 82°, 41° y 107°

28(F).- ¿Cuántas soluciones tiene el sistema de ecuaciones cuyas gráficas se representan a continuación?



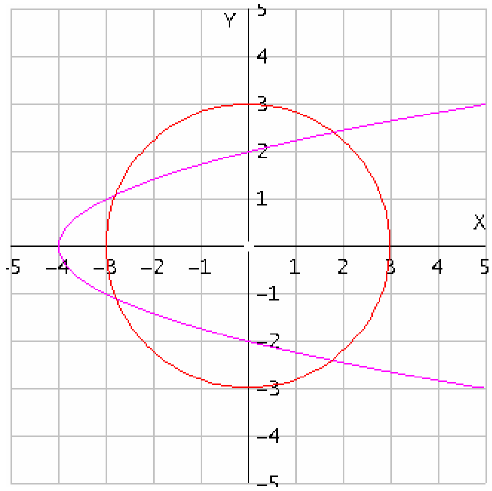
a) una
b) dos
c) tres
d) cuatro
e) ninguna

29(F) .- ¿Cuántas soluciones tiene el sistema de ecuaciones cuyas gráficas se representan a continuación?



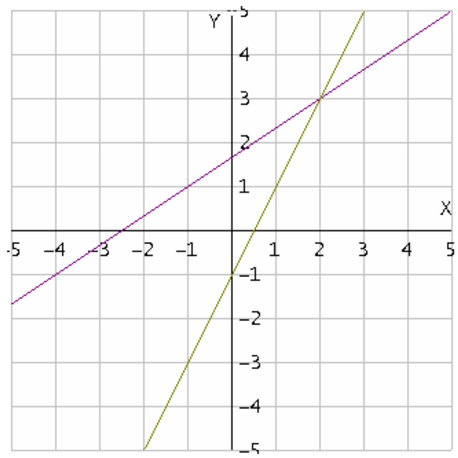
a) una
b) dos
c) tres
d) cuatro
e) ninguna

30(F).- ¿Cuántas soluciones tiene el sistema de ecuaciones cuyas gráficas se representan a continuación?



a) una
b) dos
c) tres
d) cuatro
e) ninguna

31(F).- ¿Cual es la solución del sistema de ecuaciones cuyas gráficas son las siguientes?

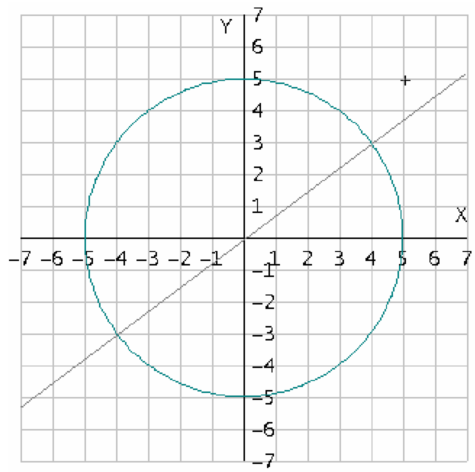


a) (3 , 2)　　b) (0.5 , 0.6)

c) (– 1 , –2.5)　　d) (2 , 3)

e) (0 , 0)

32(F).- Una solución del sistema de ecuaciones que corresponde a la siguiente gráfica es:

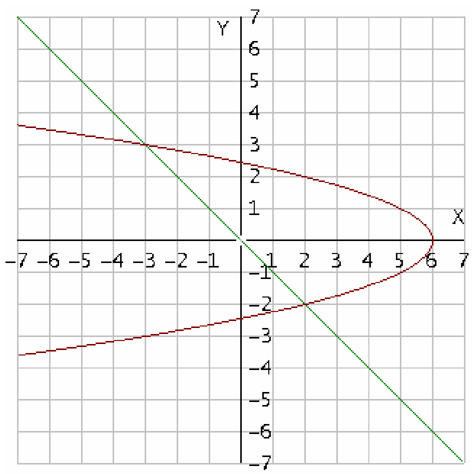


a) (3 , 4)　　b) (–3 , –4)

c) (4 , 3)　　d) (0 , 0)

e) (5 , 0)

33(F).- Una solución del sistema de ecuaciones que corresponde a la siguiente gráfica es:

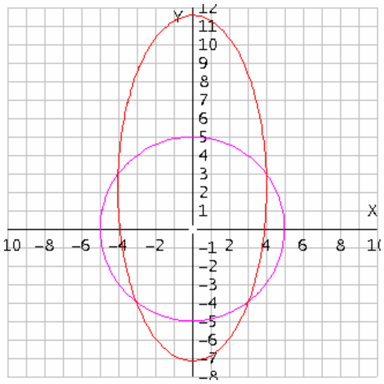


a) (2 , –2)　　b) (3 , –3)

c) (0 , 0)　　d) (–2 , 2)

e) (6 , 0)

34(F).- Una solución del sistema de ecuaciones que corresponde a la siguiente gráfica es:



a) (–4 , 4)   b) (3 , 4)

c) (–4 , 3)   d) (3 , 4)

e) (–5 , 0)

35(F).- ¿Cuántas soluciones tiene un sistema de ecuaciones 2×2 formado por las ecuaciones de dos rectas que son paralelas?.

a) ninguna   b) una   c) dos   d) tres   e) infinidad

36(F).- ¿Cuántas soluciones tiene un sistema de ecuaciones 2×2 formado por las ecuaciones de dos rectas que son perpendiculares?.

a) ninguna   b) una   c) dos   d) tres   e) infinidad

37(F).- ¿Cuántas soluciones tiene un sistema de ecuaciones 2×2 formado por las ecuaciones de dos circunferencias que son tangentes una a la otra?.

a) ninguna   b) una   c) dos   d) tres   e) infinidad

38(F).- ¿Cuántas soluciones tiene un sistema de ecuaciones 2×2 formado por las ecuaciones de dos circunferencias que son secantes una a la otra?.

a) ninguna   b) una   c) dos   d) tres   e) infinidad

39(F).- ¿Cuántas soluciones tiene un sistema de ecuaciones 2×2 formado por las ecuaciones de dos circunferencias que son concéntricas y de diferente radio?.

a) ninguna   b) una   c) dos   d) tres   e) infinidad

40(F).- ¿Cuántas soluciones tiene un sistema de ecuaciones de 2×2 formado por la ecuación de una circunferencia y la de una recta tangente a esta circunferencia?.

a) ninguna   b) una   c) dos   d) tres   e) infinidad

41(D).- ¿Cuál es la ecuación que se obtiene al despejar la variable "x "en la primera ecuación del siguiente sistema, y sustituir este valor en la otra?.

$$x + y = 4$$
$$x^2 + 2x - y = 1$$

a) $y^2 - 11y + 23 = 0$ b) $-y^2 - 3y + 23 = 0$ c) $y^2 - 3y + 23 = 0$
d) $-2y + 23 = 0$ e) $-4y + 23 = 6$

42(F).- Di cual es la ecuación que se obtiene al sumar las ecuaciones del sistema:

$$2x - y = 5$$
$$x^2 + x - y = 3$$

a) $4x - 2y = 8$ b) $x^2 + 3x - 2y = 8$ c) $x^2 + 3x = 8$ d) $4x = 8$ e) $-2y = 8$

43(F).- $x = 3$, $y = 1$ es una de las soluciones del sistema de ecuaciones:

a) $x - y = 4$, $x^2 - y^2 = 8$ b) $x + y = 4$, $x^2 - 2x + y = 16$ c) $x^2 + y^2 = 10$, $x + y = 5$ d) $x + y^2 - 2y = 2$, $x + y = 4$ e) $x + y = 4$, $x^2 + 2y = 10$

44(R).- $x_1 = 3$, $y_1 = 4$; $x_2 = -4$,$y_2 = -3$ son las dos soluciones del sistema:

a) $x^2 + y^2 = 25$, $x - y = -1$ b) $x + y = 7$, $x - y = -1$ c) $x - y = -1$, $x^2 + 2x + y = 19$ d) $x^2 + 2y = 17$, $x + y = 7$ e) $x^2 - y^2 = -7$, $2x^2 + y = 22$

45(R).- $x_1 = 2$, $y_1 = 4$; $x_2 = -1$, $y_2 = 1$ son las dos soluciones del sistema de ecuaciones:

a) $x - y = -2$, $x + y = 0$ b) $x - y = -2$, $x^2 - y = 0$ c) $x + y = 6$, $x - y = -2$ d) $2x + y = 8$, $x - 3y = -4$ e) $x + y = 6$, $2x - y = 0$

46(R).- Si resuelves el siguiente sistema de ecuaciones por eliminación, las soluciones son:

$$x^2 + y = 8$$
$$x + 2y = 4$$

a) (–2.212, 3.107) y (2.712, 0.644)   b) (– 2.712, 3.356) y (2.212, 0.894)

c) (3.107, –2.212) y (0.645, 2.712)   d) (–2.212, 2.712) y (3.107, 0.645)

e) (2, 4) y (2, 1)

47(R).- Si resuelves o trazas la gráfica de las ecuaciones que forman el siguiente sistema puedes decir que:

$$y = -x^2 + 1$$
$$x - y = -5$$

a) tiene dos soluciones   b) tiene una solución   c) no tiene solución
d) tiene muchas soluciones   e) tiene tres soluciones

48(R).- Al resolver el siguiente sistema de ecuaciones por sustitución, las soluciones son:

$$x^2 + y^2 = 9$$
$$x - 2y = 3$$

a) (3, 0) y (–1.8, –2.4)   b) (0, 3) y (–2.4, –1.8)   c) (0, 3) y (2.4, 1.8)

d) (–1, 2) y (2, 0.5)   e) (1, –1) y (–2, –2.5)

49(R).- Si los perímetros de dos círculos suman 12π centímetros y sus áreas suman 20π centímetros cuadrados. Los radios de los círculos son:

a) 2.828 y 3.172 cm   b) 4 y 2 cm   c) 1.33 y 4.67 cm

d) 12 y 8 cm   e) 8 y 4 cm

50(R).- La suma de los cuadrados de dos números positivos es igual a 193 y la diferencia de sus cuadrados es igual a 95; los números son:

a) –12 y – 7   b) –12 y 7   c) 12 y 7   d) 9 y 13   e) 14 y 3

51(R).- La altura de un triángulo isósceles trazada hasta su base es de 3 centímetros, y su perímetro es de 18 cm. La longitud de su base es:

a) 5 cm   b) 12 cm   c) 8 cm   d) 6 cm   e) 13.2 cm

52(D).- El perímetro de un rectángulo es de 70 cm de longitud y la longitud de su diagonal es de 25. Las medidas de su ancho y su longitud son:

a) 20 cm de ancho y 50 cm de largo   b) 30 cm de ancho y 40 cm de largo

c) 35 cm de ancho y 35 cm de largo   d) 1 cm de ancho y 34 cm de largo

e) 15 cm de ancho y 20cm de largo

53(D).- Las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones son:

$$y = x^2 + 2$$
$$y = -2x^2 + 5$$

a) (–1, –3) y (1, –3) b) (1, 3) y (–1, 3) c) (3, 1) y (3, –1)
d) (–1, 1) y (3, 3) e) (1.732, 5) y (–1.732, 1.536)

54(D).- Una de las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones es:

$$x^2 + y^2 = 9$$
$$x^2 - y^2 = 1$$

a) ($\sqrt{5}$, 2) b) (2, $\sqrt{5}$) c) ($\sqrt{8}$, 1) d) (3, 0) e) (1, 0)

55(D).- Al resolver el siguiente sistema de ecuaciones por eliminación las soluciones son:

$$7x^2 - 2y^2 = 27$$
$$3x^2 + 4y^2 = 31$$

a) (5, 2) y (5, –2) b) (–5, 2) y (–5, –2) c) ($\sqrt{5}$, 2), ($\sqrt{5}$,–2), (–$\sqrt{5}$, 2) y (–$\sqrt{5}$,–2)
d) (2, $\sqrt{5}$), (2, –$\sqrt{5}$), (–2, $\sqrt{5}$) y (–2, –$\sqrt{5}$) e) Las soluciones no son reales

56(R).- Al resolver el siguiente sistema de ecuaciones formado por $x^2 + 2xy = 17$
y $xy = 4$ por el método de sustitución las soluciones son:

a) No son reales b) (3, –4/3) y (–3, 4/3) c) (3/4, 3) y (–3/4, –3)
d) (3, 4/3) y (–3, –4/3) e) (5, 4/5) y (–5, –4/5)

57(D).- La suma de los perímetros de dos cuadrados es de 52 m y la suma de sus áreas es 89 m^2. Las dimensiones de cada cuadrado son:

a) 16 y 3 cm b) 11.22 y 3.57 cm c) 8 y 5 cm d) no hay solución e) 13 y 10

58(R).- Un rectángulo tiene 40 cm de perímetro y 96 cm^2 de área. Hallar sus dimensiones.

a) 16 y 4 cm b) 20 y 20 cm c) 10 y 10 cm d) no hay solución e) 12 y 8 cm

59(D).- La solución del siguiente sistema de ecuaciones no lineales es:

$$25x^2 - 4y^2 = 100$$
$$x + y = 7$$

a) (2.65, 4.35) y (–5.32, 12.32) b) (4.35, 2.65) y (12.32, –5.32)

c) (–2.65, 9.65) y (5.32, 1.68) d) (2.65, –5.32) y (4.35, 12.32)

e) No tiene solución real

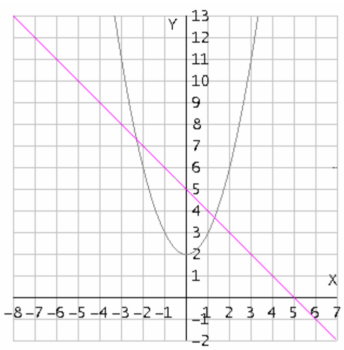
60(D).- Los socios de un club juvenil se comprometieron a contribuir para juntar un fondo de \$1080. Si hubieran sido tres socios más, a cada uno le hubiera correspondido pagar \$4 menos de lo que dieron. El número de socios del club es:

a) 40 b) 27 c) 30 d)36 e) 54

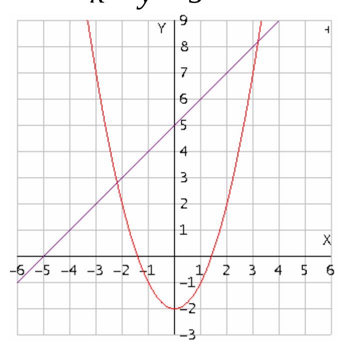
61(R).- Las graficas que corresponden al sistema $y = x^2 - 2$ son:

$x + y = 5$

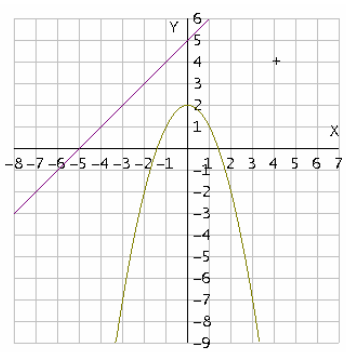
a)



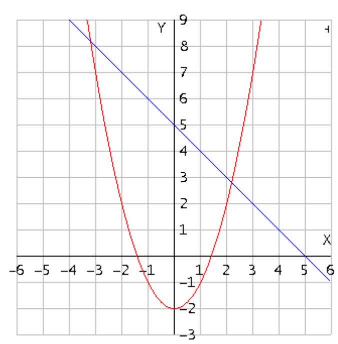
b)



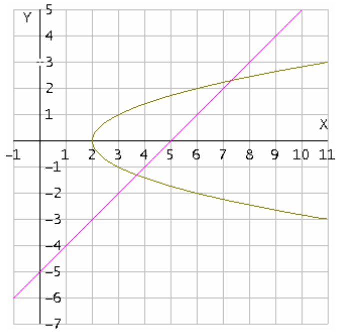
c)



d)



e)



62(R).- Las soluciones del sistema anterior son:

a) No tiene solución el sistema.

b) (3.19 , 8.19) y (– 2.19 , 2.81)

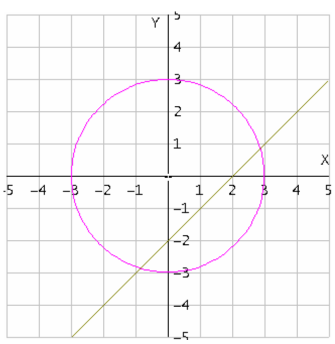
c) (–3.19 , 8.19) y (2.19 , 2.81)

d) (–2.4 , 7.3) y (1.4 , 3.6)

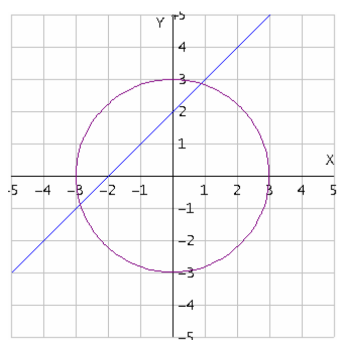
e) (3.7 , 1.3) y (7.3 , –2.3)

63(R).- Las graficas que corresponden al sistema $\begin{matrix} x = y - 2 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{matrix}$ son:

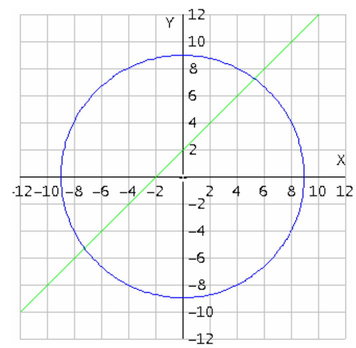
a)



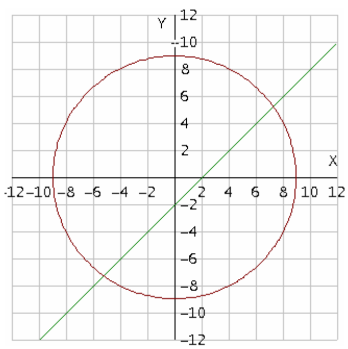
b)



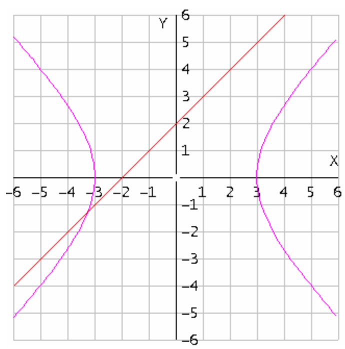
c)



d)



e)



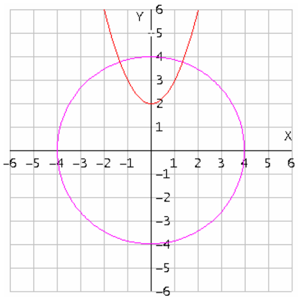
64(R).- Las soluciones del sistema anterior son:

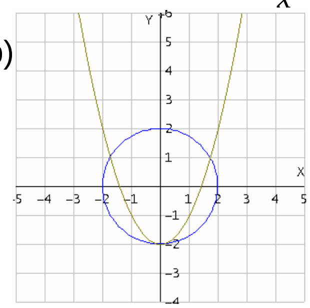
a) (0.87 , 2.87) y (–2.87 , – 0.87) b) (–3 , –1.19)

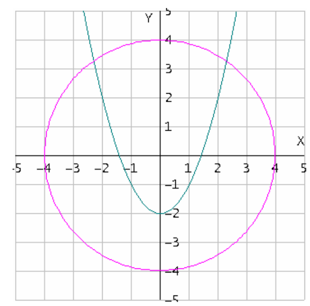
c) (–0.87 , –2.87) y (2.87 , 0.87) d) (–5.28 , –7.28) y (7.28 , 5.28)

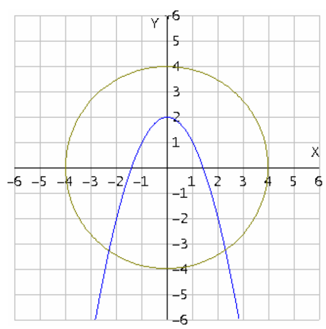
e) (5.28 , 7.28) y (–7.28 , –5.28)

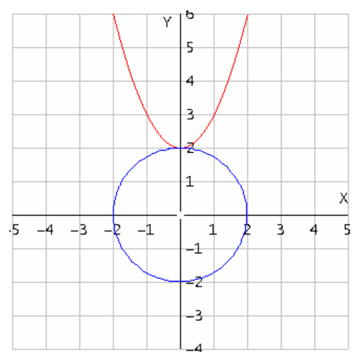
65(R).- Las graficas que corresponden al sistema $\begin{array}{l} x^2 + 2 = y \\ x^2 + y^2 = 4 \end{array}$ son:

a)


b)


c)


d)


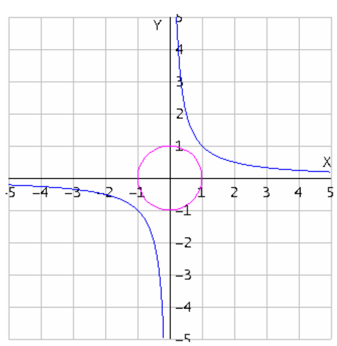
e)


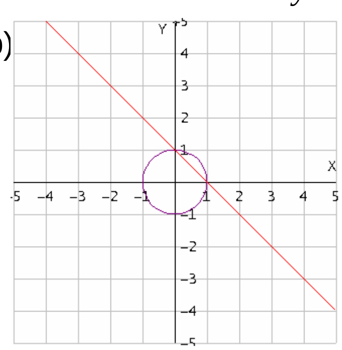
66(R).- Las soluciones del sistema anterior son:

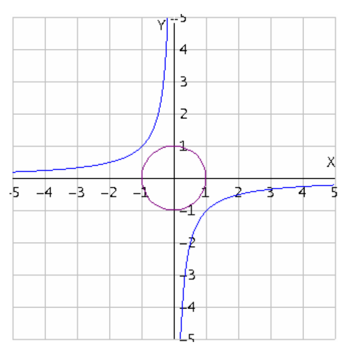
a) (0 , 2) b) (–3 , –1.19) c) (0 , –2), (1.73 , 1) y (–1.73 , 1)

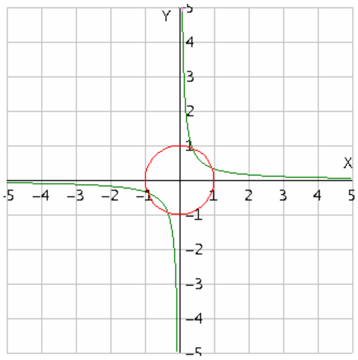
d) (–1.33 , 3.77) y (1.33 , 3.77) e) (–2.29 , –3.27) y (2.29 , –3.27)

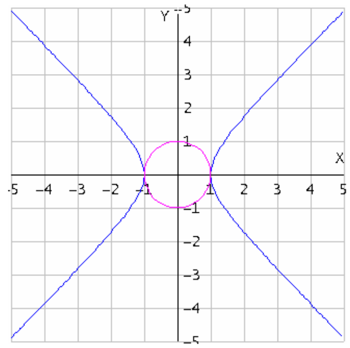
67(R).- Las graficas que corresponden al sistema $\begin{array}{l} x\ y = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}$ son:

a)


b)


c)


d) 

e) 

68(R).- Las soluciones del sistema anterior son:

a) (0 , 2) b) (–3 , –1.19) c) (0 , –2), (1.73 , 1) y (–1.73 , 1)

d) No tiene solución real. e) (–2.29 , –3.27) y (2.29 , –3.27)

69(F).- ¿Cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones 3×3 es lineal?.

a) $\begin{aligned} x^2 + y + z &= 1 \\ x - y + 2z &= 2 \\ 3x - 5y + z^2 &= 1 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ 2x + y + z^2 &= 2 \\ x + 2y^2 + 3z &= 3 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} x + y - z &= -1 \\ x^2 - y + 3z &= 5 \\ 2x + y + z &= 1 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 3 \\ x + y - z^2 &= 1 \\ 3x + 2y + z &= 1 \end{aligned}$ e) $\begin{aligned} x - y + 5z &= 5 \\ x + y + z &= 1 \\ 5x + y - z &= 1 \end{aligned}$

70(F).- ¿Cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones 3×3 **no** es lineal?.

a) $\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y + 2z &= 2 \\ x - y + 3z &= 6 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x - y^2 + z &= 1 \\ y + z^2 &= 2 \\ x + 2y + 3z &= 3 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} x + y - z &= -1 \\ x - y + 3z &= 5 \\ 2x + y + z &= 1 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ x + y - z &= 1 \\ 3x + z &= 1 \end{aligned}$ e) $\begin{aligned} x - 2y + 5z &= 5 \\ x + y + z &= 1 \\ y - z &= 1 \end{aligned}$

71(F).- ¿Cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones 3×3 es triangular?.

a) $\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x - y + z &= 4 \\ 5x + 3y + z &= 2 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x - y + z &= 3 \\ x + 3z &= 7 \\ y + z &= 3 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 2x + y + z &= 4 \\ x - y + z &= 3 \\ x - z &= 1 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} x - 2y + z &= 3 \\ y - z &= -1 \\ 2z &= -1 \end{aligned}$ e) $\begin{aligned} 3x - y - z &= 1 \\ x + 2y + z &= 3 \\ x + y &= 4 \end{aligned}$

72(F).- Cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones 3×3 **no** es triangular

a) $\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2y + z &= 3 \\ 3z &= -1 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x - y + z &= -2 \\ y + z &= 2 \\ 2y &= 1 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 2x + y + z &= 0 \\ y - z &= 2 \\ z &= -1 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ y - z &= 0 \\ y &= 1 \end{aligned}$ e) $\begin{aligned} x - y - z &= 0 \\ 4x + y - z &= 2 \\ z &= -1 \end{aligned}$

73(D).- ¿Cuál de los siguientes sistemas triangulares de ecuaciones es equivalente al sistema que a continuación se escribe?.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ x - y + 2z &= 0 \\ x + 2y - 3z &= 3 \end{aligned}$$

a) $\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ y - z &= 1 \\ 2z &= 4 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 2y - z &= 2 \\ 7z &= 0 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} x - y + 2z &= 0 \\ y + z &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} x - y + 2z &= 0 \\ y - z &= 1 \\ z &= 2 \end{aligned}$ e) $\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 3 \\ y + z &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$

74(F).- $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$ es la solución del sistema de ecuaciones:

a) $\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ -y + z &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x - y + 2z &= 5 \\ 3y - z &= 3 \\ z &= 2 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 13 \\ 4y + 2z &= 14 \\ z &= 3 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} 3x - y - z &= -2 \\ 2y + 3z &= 13 \\ z &= 4 \end{aligned}$ e) $\begin{aligned} 5x - 3y + z &= 2 \\ y + 2z &= 8 \\ z &= 5 \end{aligned}$

75(F).- $x = 0,\ y = 1,\ z = -1$ es la solución del sistema de ecuaciones:

a) $\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2y + z &= 3 \\ z &= -1 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x - y + z &= -2 \\ y + z &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 2x + y + z &= 0 \\ y - z &= 2 \\ z &= -1 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ y - z &= 0 \\ y &= 1 \end{aligned}$ e) $\begin{aligned} x - y - z &= 0 \\ 3y - z &= 2 \\ z &= -1 \end{aligned}$

76(F).- $x = 1,\ y = 0,\ z = 2$ es la solución del sistema de ecuaciones:

a) $\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x - y + z &= 4 \\ 3y + z &= 2 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x - y + z &= 3 \\ x + y + 3z &= 7 \\ y + z &= 3 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 2x + y + z &= 4 \\ x - y + z &= 3 \\ x - z &= -1 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} x - 2y + z &= 3 \\ x + y - z &= -1 \\ x - y &= -1 \end{aligned}$ e) $\begin{aligned} 3x - y - z &= 1 \\ x + 2y + z &= 3 \\ x + y &= 4 \end{aligned}$

77(F).- $x = 0, y = 0, z = 1$ es la solución del sistema de ecuaciones:

a) $\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y + 2z &= 2 \\ 3x - 5y + z &= 1 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ 2x + y + z &= 2 \\ x + 2y + 3z &= 3 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} x + y - z &= -1 \\ x - y + 3z &= 5 \\ 2x + y + z &= 1 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 3 \\ x + y - z &= 1 \\ 3x + 2y + z &= 1 \end{aligned}$ e) $\begin{aligned} x - 2y + 5z &= 5 \\ x + y + z &= 1 \\ 5x + y - z &= 1 \end{aligned}$

78(F).- ¿Cuál es el valor de “z” que se obtiene al resolver el sistema?

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2y - z &= -2 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

a) $z = 2$ b) $z = 1$ c) $z = -1$ d) $z = 0$ e) $z = 3$

79(R).- ¿Cuál es el valor de "y" que se obtiene al resolver el siguiente sistema?.

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 10 \\ y + 2z &= -1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

a) $y = 0$ b) $y = 1$ c) $y = -1$ d) $y = -3$ e) $y = 3$

80(R).- ¿Cuál es el valor de "x" que se obtiene al resolver el sistema?

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= -5 \\ y - 2z &= 4 \\ z &= -1 \end{aligned}$$

a) $x = 0$ b) $x = -1$ c) $x = 4$ d) $x = -5$ e) $x = 1$

81(D).- ¿Cuál es el valor de "x" que se obtiene al resolver el siguiente sistema?.

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 10 \\ x + y + 2z &= 1 \\ 5x - 2y + z &= 17 \end{aligned}$$

a) $x = 0$ b) $x = 1$ c) $x = 2$ d) $x = -3$ e) $x = 10$

82(F).- La solución del siguiente sistema triangular es:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 8 \\ y + 2z &= -4 \\ -2z &= 6 \end{aligned}$$

a) $x = 2$, $y = 2$, $z = 3$; b) $x = 21$, $y = 2$, $z = -3$ c) $x = -5$, $y = 2$, $z = -3$

d) $x = 6$, $y = -10$, $z = 3$ e) $x = -6$, $y = 2$, $z = 3$

83(R).- La solución del siguiente sistema es:

$$\begin{aligned} 2x + y &= -3 \\ -3y &= -9 \\ x - y + z &= -4 \end{aligned}$$

a) $x = 1$, $y = -5$, $z = 3$ b) $x = 2$, $y = 3$, $z = -3$ c) $x = -3$, $y = 3$, $z = -4$

d) $x = 0$, $y = -3$, $z = -7$ e) $x = -3$, $y = 3$, $z = 2$

84(R).-La solución del siguiente sistema es:

$$\begin{aligned} 2x + y &= -2 \\ x - 3z &= -9 \\ x - y + z &= 5 \end{aligned}$$

a) $x = -1$, $y = 0$, $z = 3$ b) $x = 0$, $y = -2$, $z = 3$ c) $x = -3$, $y = 4$, $z = 2$

d) $x = 1$, $y = -5$, $z = 12$ e) $x = -9$, $y = 16$, $z = 0$

85(R).- La solución del siguiente sistema es:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 2 \\ x - y + z &= -1 \\ x + y + z &= -1 \end{aligned}$$

a) $x = 1$, $y = 0$, $z = -2$ b) $x = 2$, $y = -2$, $z = -5$ c) tiene muchas soluciones

d) $x = 0$, $y = 2$, $z = 1$ e) no tiene solución

86(R).- La solución del siguiente sistema es:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 0 \\ x - 2y - 2z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

a) $x = 2$, $y = 2$, $z = -6$ b) tiene muchas soluciones c) $x = 2$, $y = 2$, $z = -4$

d) no tiene solución e) $x = 1$, $y = -2$, $z = 0$

87(R).- La solución del siguiente sistema es:

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 0 \\ x - y - 2z &= 0 \\ 2x - 3y - z &= 0 \end{aligned}$$

a) tiene muchas soluciones b) no tiene solución c) $x = 2$, $y = 0$, $z = -4$

d) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e) $x = 0$, $y = 2$, $z = 2$

88(R).- La solución del siguiente sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned} x + 5y - 2z &= 22 \\ 2x + y + z &= 18 \\ 3x - 2y - z &= 8 \end{aligned}$$

a) $x = 6$, $y = 4$ y $z = 2$ b) $x = 4$, $y = -4$ y $z = -12$ c) $x = 2.5$, $y = 6.5$ y $z = 6.5$

d) $x = -6$, $y = -4$ y $z = -2$ e) $x = 25.1$, $y = 10.5$ y $z = 13.7$

89(D).- La solución del siguiente sistema es:

$$\begin{aligned} 4x - 2y + z &= -1 \\ x + 3y - 2z &= 38 \\ 10x - y + z &= 50 \end{aligned}$$

a) $x = \frac{29}{5}$, $y = \frac{81}{5}$ y $z = \frac{41}{5}$ b) $x = \frac{29}{5}$, $y = \frac{81}{5}$ y $z = -\frac{41}{5}$

c) $x = -\frac{29}{5}$, $y = \frac{441}{5}$ y $z = \frac{41}{5}$ d) $x = \frac{29}{5}$, $y = -\frac{81}{5}$ y $z = \frac{41}{5}$

e) tiene muchas soluciones

90(F).-De los siguientes sistemas el que es homogéneo es:

a) $x + 3y - 2z = 38$
$3y - 2z = 8$
$-2z = 3$

b) $x + 3y - 2z = 0$
$2x + y - 3z = 0$
$x - y + z = 1$

c) $x + 3y - 2z = 8$
$x + 3y - 2z = 3$
$x + 3y - 2z = 1$

d) $x + 3y - 2z = 1$
$2x + y - 3z = 2$
$-x + 2y - 3z = 3$

e) $x + 3y - 2z = 0$
$2x - 3y + z = 0$
$x + 2y + 3z = 0$

91(D).- Un número de tres dígitos es igual a 19 veces la suma de sus dígitos. Si se invierte el orden de los dígitos el número resultante es mayor que el número dado por 297. El dígito de las decenas excede al dígito de las unidades en 3. ¿El número es? (Sugerencia: escribe el número en su forma desarrollada)

a) 582 b) 825 c) 285 d) 258 e) 852

92(D).- Una escuela pequeña tiene 100 alumnos que ocupan tres salones de clase: A, B, y C. Después del primer periodo del día escolar, la mitad de los alumnos del salón A van al B, la quinta parte de los alumnos del B pasan al C, y la tercera parte de los alumnos del C pasan al A. Sin embargo, la cantidad total de alumnos de cada salón es igual en cada periodo de clases. ¿Cuántos alumnos hay en cada salón?

a) 30 alumnos en el salón A
30 alumnos en el salón B
40 alumnos en el salón C

b) 50 alumnos en el salón A
20 alumnos en el salón B
30 alumnos en el salón C

c) 20 alumnos en el salón A
30 alumnos en el salón B
50 alumnos en el salón C

d) 20 alumnos en el salón A
50 alumnos en el salón B
30 alumnos en el salón C.

e) 40 alumnos en el salón A
50 alumnos en el salón B
20 alumnos en el salón C

93(D).- La suma de tres números es 40. El tercer número es 10 menos que la suma de los dos primeros. El segundo número es 1 más que el primero. Los números buscados son:

a) 8, 7 y 25 b) 9.5, 10.5 y 20 c) 12, 13 y 15

d) 11, 12 y 17 e) 15 , 16 y 9

94(R).-Al contraer matrimonio Paquita y Luis, ambos tenían hijos de un matrimonio anterior. Paquita aportó x hijos, Luis aportó y hijos y juntos procrearon z hijos. La suma total de hijos es cuatro. El doble de los hijos de Paquita menos los de Luis más los comunes es igual a 1. Los hijos de Paquita, más el doble de los de Luis es igual a 3 más el doble de los que procrearon juntos. ¿Cuántos hijos tenía cada una? ¿Cuántos hijos procrearon juntos?

a) Paquita 2, Luis 1 y juntos 1 b) Paquita 1, Luis 1 y juntos 2

c) Paquita 2, Luis 0 y juntos 2 d) Paquita 1, Luis 2 y juntos 1

e) Paquita 0, Luis 2 y juntos 1

95(R).- ¿Cuáles son las coordenadas del punto donde se intersectan las rectas cuyas ecuaciones son $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$, $3x - 2y + 6 = 0$?.

a) (2 , 0) b) (–2 , 0) c) (0 , 2) d) (2 , 3) e) (0 , 3)

96(D).- ¿Cuáles son las coordenadas de los dos puntos donde se intersectan la recta cuya ecuación es $8x - 6y = 0$, y la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 25$?.

a) (– 3 , – 4) y (3 , 4) b) (– 3 , 4) y (3 , –4)

c) (–3 , –4) y (–3 , 4) d) (–3 , 4) y (–3, – 4)

e) (3 , 4) y (–3 , 4)

97(D).- ¿Cuáles son las coordenadas de los dos puntos donde se intersectan la recta cuya ecuación es $x - 3y + 2 = 0$ y la circunferencia que tiene por ecuación $x^2 - 8x + y^2 - 4y + 10 = 0$?.

a) (7 , 1) y (1 , 3)
b) (1 , 1) y (7 , 3)
c) (3 , 7) y (1 , 1)
d) (1 , 1) y (7 , – 3)
e) (– 1 , 1) y (7 , 3)

98(D).- ¿Cuáles son las coordenadas de los dos puntos donde se intersectan la recta cuya ecuación es $x - y = 0$, y la parábola cuya ecuación $y = x^2$?.

a) (0 , 0) y (–1 , 1)
b) (1 , 1) y (–1 , 1)
c) (0 , 0) y (1 , 1)
d) (1 , 1) y (1 , –1)
e) (0 , 0) y (1 , –1)

99(D).- ¿Cuáles son las coordenadas de los dos puntos donde se intersectan la recta cuya ecuación es $x + y = 2$, y la parábola cuya ecuación $y = x^2$?.

a) (1 , 1) y (–2 , 4)
b) (1 , 1) y (2 , 4)
c) (1 , –1) y (–2 , 4)
d) (1 , 1) y (–2 , –4)
e) (–1 , –1) y (2 , 4)

100(D).- ¿Cuáles son las coordenadas de los dos puntos donde se intersectan la recta cuya ecuación es $3x - 2y - 6 = 0$ y la elipse que tiene por ecuación $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$?.

a) (–2 , 0) y (0 , –3)
b) (–2 , 0) y (0 , 3)
c) (2 , 0) y (0 , 3)
d) (2 , 0) y (0 , –3)
e) (2 , 0) y (0 , 2)

SOLUCIÓN DE LOS REACTIVOS UNIDAD 1

1	d	26	e	51	c	76	a
2	d	27	a	52	e	77	a
3	e	28	a	53	b	78	d
4	e	29	b	54	a	79	d
5	d	30	d	55	c	80	e
6	c	31	d	56	d	81	c
7	b	32	c	57	c	82	c
8	a	33	a	58	e	83	e
9	c	34	c	59	a	84	b
10	e	35	a	60	b	85	a
11	d	36	b	61	d	86	b
12	b	37	b	62	c	87	d
13	b	38	c	63	b	88	a
14	a	39	a	64	a	89	a
15	c	40	b	65	e	90	e
16	c	41	a	66	a	91	c
17	e	42	b	67	a	92	d
18	c	43	d	68	d	93	c
19	d	44	a	69	e	94	d
20	b	45	b	70	b	95	e
21	c	46	a	71	d	96	e
22	d	47	c	72	e	97	b
23	b	48	a	73	b	98	c
24	a	49	b	74	c	99	a
25	b	50	c	75	c	100	d