

UNIDAD 3

LA RECTA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA

OBJETIVOS DE ESTA UNIDAD

- Reafirmar el conocimiento del Método de la Geometría Analítica.
- Identificar la ecuación de una recta.
- Encontrar la ecuación de una recta dados distintos elementos que la definen.
- Reconocer las distintas formas de representación algebraica de la recta.
- Dadas las ecuaciones de dos rectas decidirás si son paralelas o perpendiculares.
- Sabrás encontrar rectas paralelas y perpendiculares a una recta dada.
- Avanzar en la solución analítica de problemas de corte Euclidiano.

INTRODUCCIÓN

Una parte importante de nuestro estudio en este semestre lo constituye la relación entre las gráficas y ciertas ecuaciones matemáticas, como son las ecuaciones lineales.

En esta unidad estudiaremos la ecuación cartesiana de la Línea Recta, avanzarás en su estudio ya que se estudiará desde otra perspectiva diferente a la que ya conoces. Se retomarán los conocimientos que ya adquiriste sobre ésta para ampliarlos o para darles un nuevo tratamiento.

Con el estudio de la Línea Recta te introducirás al método analítico que te permitirá representar y analizar a través del álgebra sus elementos que la caracterizan así también como su importante aplicación. Aprenderás las diferentes representaciones algebraicas de una recta y podrás transitar de una forma a otra y sobre todo sabrás cuales son los datos mínimos para que quede bien determinada.

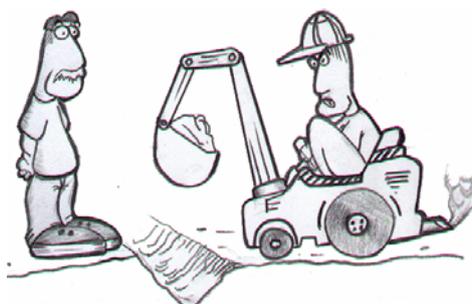
Valorarás al álgebra, no sólo como una herramienta para obtener resultados numéricos, sino también, para establecer relaciones que proporcionan información acerca de la problemática que se estudia, esto es a través de:

- Obtener a partir de una de las representaciones de la recta, sus otras formas.
- Calcular los elementos que definen una recta a partir de su ecuación dada en la forma general.

En cada tema se resuelven ejemplos detalladamente y se proponen ejercicios para que los resuelvas y refuerces lo estudiado, y al final de la unidad se dan las respuestas a estos ejercicios. También se te propone resolver un examen de autoevaluación que servirá para que tu mismo evalúes en que medida has aprendido el tema.

ACTIVIDAD DE INTRODUCCIÓN.

UN BUEN DRENAJE



Se quieren construir cuatro zanjas para el drenaje de una pista polideportiva de 40×30 m. El maestro de obras ha llamado a sus dos ayudantes Juan Topete y Andrés Hurgador, encargados de las máquinas excavadoras, para darles las órdenes pertinentes. Tras el saludo diario, el maestro de obras dice:

- Topete, tienes que comenzar excavando la zanja que pasa por el centro del terreno.
 —Por el centro del terreno puedo trazar por lo menos cien zanjas —contesta rápidamente Topete—; con un punto, no es suficiente.

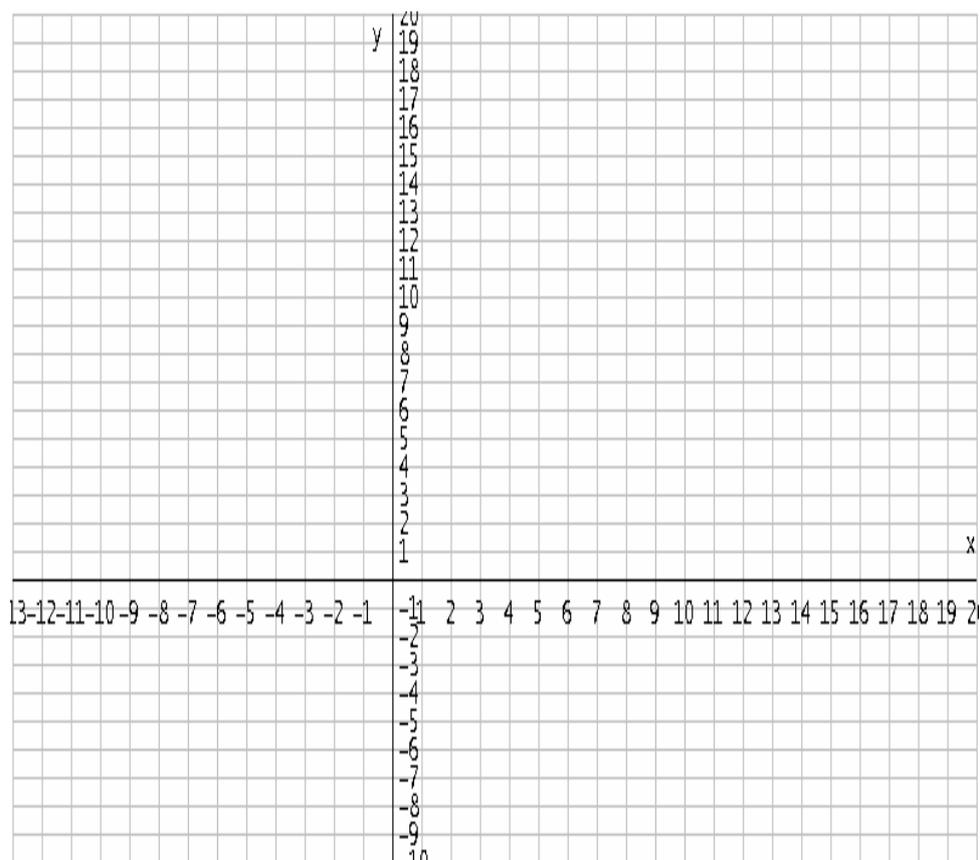
- a) Ayuda al maestro de obras. ¿Qué otro dato necesitas para identificar la zanja?
 b) Conociendo dos puntos por los que ha de pasar la zanja, ¿queda ésta determinada? ¿Por qué?

A Hurgador, el maestro de obras le dice:

- Tú vas a excavar la zanja paralela a los vestuarios.
 —Se pueden hacer cuarenta zanjas paralelas a los vestuarios—contesta él.

- c) ¿Qué dato falta para determinar la zanja?

El maestro de obras dispuesto a enmendar sus errores, consigue un cuaderno de hojas cuadrículadas y hace un trazo parecido a:



—Topete, vas a comenzar en este punto – y señala en el dibujo el punto $(20,15)$ –. Son las ocho, a las diez y media tienes que estar aquí – y señala el $(0, 0)$.

- d) ¿Cuántos metros de zanja excava la máquina de Topete en una hora?
- e) Señala en el plano el punto donde se encuentra, cuando lleva tres horas trabajando.
- f) ¿A qué hora pasa Topete por los puntos $(12, 9)$, $(8,6)$ y $(-12, -9)$?
Calcular las pendientes.

El maestro de obras ordena a Hurgador comenzar en el punto $(20, 0)$. Este, después de una hora ha llegado al punto $(12, 0)$.

- g) Si los dos han comenzado al mismo tiempo, escribe las coordenadas de los puntos donde se encuentra cada uno:

Si Topete está en :	$(16, 12)$	$(-4, -3)$		$(8, 6)$	
---------------------	------------	------------	--	----------	--

Hurgador estará en:			(12 , 0)		(0 , 0)
---------------------	--	--	----------	--	---------

Después de comer, continúa con las dos zanjas restantes.

- h) Si Topete parte del punto $(0, 15)$ y al cabo de una hora se encuentra en $(0, 9)$. ¿Qué zanja le corresponde hacer?, ¿Cuál es su pendiente?
- i) ¿Dónde estará a las cinco de la tarde, si ha comenzado el trabajo a las tres?
- j) ¿Cuánto tardará en terminar la zanja?
- k) Hurgador tiene más prisa, quiere terminar el trabajo a las siete de la tarde. Si sale a las tres del punto $(20, -15)$ en dirección al $(-20, 15)$. Señala y calcula las coordenadas de los puntos donde se encuentra, al cabo de una hora, dos horas, tres horas y tres horas y media. ¿Cuál es la pendiente de la zanja en cada hora?
- l) Resultó que las pendientes de varios puntos que están situados en la misma zanja (que es recta) son iguales. ¿Por qué?. Para reafirmarlo calcula las pendientes de algunos puntos situados en cada una de las zanjas excavadas.

El maestro de obras, conociendo la hora, el punto de partida y la dirección, sabe, (sin necesidad de ver) la zanja en la que está excavando cada máquina y los metros que llevan hechos en cada momento.

Esas zanjas rectas, prolongadas indefinidamente, nos proporcionan la idea de recta en el plano.

CONCLUSIÓN:

Conociendo un punto de la recta y otro punto contenida en ella se puede llegar a cualquier otro punto de la misma.

3.1 LA RECTA UBICADA EN EL PLANO CARTESIANO

Creemos que a este nivel de estudios ya tienes idea de lo que es una línea recta y al resolver la actividad de introducción te diste cuenta de que

efectivamente ya tienes bastantes nociones. Así que si te dicen dibuja una línea recta estamos seguros de que la sabes trazar, además en las unidades anteriores aprendiste a graficar algunas funciones y trazaste gráficas de líneas rectas. Pero ahora la vamos a estudiar con mayor detalle, la estudiaremos analizando mejor cada uno de los puntos que la forman, y al hablar de puntos es inevitable el hecho de que tenemos que usar el plano cartesiano.

La línea recta es un lugar geométrico, y hay varias formas con que se define a la línea recta como lugar geométrico, pero todas significan lo mismo, quizá tu tengas la idea intuitiva de que es “un conjunto infinito de puntos que tienen una misma dirección o que son colineales” y esta idea es gracias a todo lo que has estudiado con anterioridad, que es bastante buena; ya que efectivamente una línea recta tiene una infinidad de puntos colineales que podemos representar en un plano cartesiano y por lo mismo esta se puede representar con una ecuación cartesiana de primer grado con dos variables que puede ser escrita en diferentes formas.

Por ejemplo: $2y - 4x + 6 = 0$

$$y = 4x - 2$$

$$y + 3 = 5(x - 2)$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{7} = 1$$

Estas ecuaciones no te son del todo desconocidas, ¿verdad?. Y sobre todo ya has trabajado la forma $y = mx + b$ cuando estudiaste a la Función Lineal, a esta forma se le llama “*pendiente ordenada al origen*” que nos es muy útil para trazar la gráfica de la recta.

Con la actividad introductoria te diste cuenta que una línea recta queda perfectamente determinada si se conocen dos de sus puntos, ya que debes de recordar una importante afirmación de la geometría euclidiana que es “por dos puntos pasa una y sólo una línea recta”. Y como toda línea recta tiene una posición entonces tiene un ángulo de inclinación y de este surge la llamada pendiente de una recta, si tu conoces su pendiente y un punto por donde pasa la recta también quedará bien determinada.

Como veras existen varias características de la línea recta que nos servirán para encontrar su ecuación y poder graficarla.

3.2 ECUACIÓN DE LA LÍNEA RECTA, CONOCIENDO UN PUNTO Y SU PENDIENTE.

Encontraremos la ecuación de la recta l_1 que pasa por el punto conocido $P(x_1, y_1)$ y tiene pendiente conocida m . En la unidad anterior aprendiste que:

Si una línea recta no vertical, pasa por dos puntos diferentes $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, entonces su **pendiente** m se define por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

si la recta es vertical, su pendiente no está definida.

Si tomas un punto cualquiera $Q(x, y)$ sobre la recta l_1 de pendiente m , (el punto Q diferente de P), entonces la pendiente de PQ debe de ser también m .

Usando la definición de pendiente, la pendiente de la recta que pasa por el punto $P(x_1, y_1)$ y por el punto cualquiera $Q(x, y)$, es:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \quad \text{despejando } y - y_1, \text{ tenemos}$$

$$(x - x_1) m = y - y_1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \longrightarrow \text{Ecuación 1}$$

Que es la **ecuación de la recta** l_1 si conocemos **un punto** P sobre ella y su **pendiente**, su gráfica quedaría de la siguiente forma:

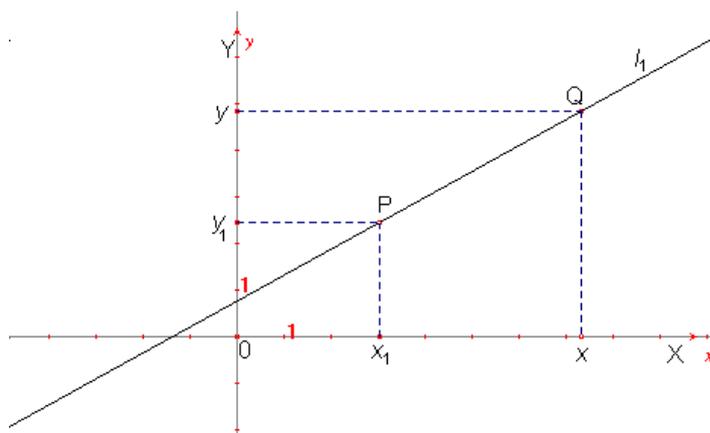


figura 1

EJEMPLOS:

- 1) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2, 1)$ y tiene pendiente $m = 5$.

Solución:

Sustituyendo en la ecuación 1, hacemos $x_1 = -2$, $y_1 = 1$, $m = 5$, y tenemos:

$$y - 1 = 5(x - (-2))$$

$$y - 1 = 5(x + 2)$$

$$y = 5x + 10 + 1$$

$$\boxed{y = 5x + 11} \leftarrow \text{Forma pendiente-ordenada}$$

Igualando a cero, tenemos

$$\boxed{5x - y + 11 = 0} \leftarrow \text{Forma General}$$

Te recomiendo que traces su gráfica y luego verifiques si te queda como en la figura 2.

Recuerda que para graficarla hay varias formas:

- 1) Dar dos valores a x y encontrar sus respectivas y 's localizar los puntos en un plano cartesiano y luego unirlos con tu regla.
- 2) Usar el punto conocido $(-2, 1)$ y su pendiente 5: En el plano cartesiano trazamos el punto $(-2, 1)$, a partir de ahí avanzamos una unidad a la derecha y 5 hacia arriba ya que $m = 5 = \frac{5}{1}$ y donde quedemos marcamos un segundo punto, con nuestra regla los unimos y nos queda la gráfica de la línea recta.
- 3) Usando la forma "pendiente ordenada al origen" que en este caso es $y = 5x + 11$ Se marca sobre el eje Y el punto 11 y a partir de este los avances según la pendiente como en el punto anterior.

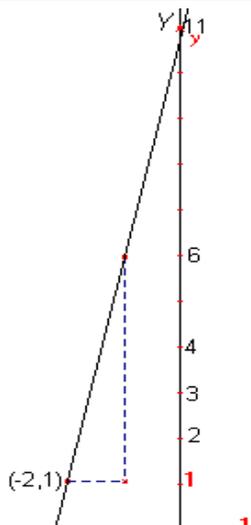


figura 2

2) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, -2)$ y tiene pendiente $\frac{2}{3}$.

Solución:

Sustituyendo en la ecuación 1 el punto $(1, -2) = (x_1, y_1)$ y $m = \frac{2}{3}$ tenemos:

$$y - (-2) = \frac{2}{3} (x - 1)$$

$$y + 2 = \frac{2}{3} (x - 1) \longleftarrow \text{☺}$$

$$y = \frac{2}{3} (x - 1) - 2$$

$$y = \frac{2}{3} x - \frac{2}{3} - 2$$

$$\boxed{y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}} \longleftarrow \text{Forma pendiente-ordenada}$$

Para obtener la ecuación en forma general, continuamos desde ☺ y tenemos

$$3(y + 2) = 2(x - 1)$$

$$3y + 6 = 2x - 2$$

igualamos a cero y tenemos $-2x + 3y + 6 + 2 = 0$

$$\boxed{-2x + 3y + 8 = 0} \longleftarrow \text{Forma General}$$

Te recomiendo que hagas la gráfica y luego verifiques si te queda de la siguiente forma:

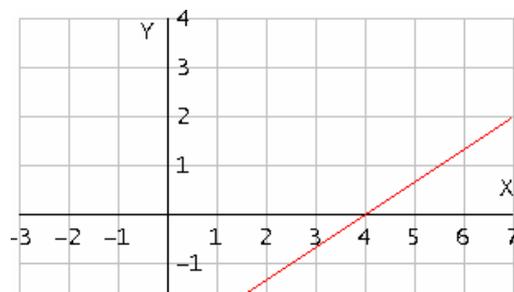


figura 3

- Podrías decir si ¿el punto (4 , 0) está sobre esta línea recta? _____.
¿Cómo le harías?, trata de hacerlo y si lo lograste ¡Felicidades!

Hay varias formas de hacerlo, pero la más sencilla es sustituyendo el punto (4 , 0) en la ecuación $-2x + 3y + 8 = 0$ donde $x = 4$ y $y = 0$, si el resultado es una igualdad cierta quiere decir que el punto pertenece o está sobre la línea recta, si el resultado es una igualdad falsa quiere decir que el punto no está sobre la línea recta.

$$\begin{aligned} \text{Hagámoslo:} \quad & -2(4) + 3(0) + 8 = 0 \\ & -8 + 0 + 8 = 0 \\ & 0 = 0 \end{aligned}$$

Entonces el punto (4 , 0) está sobre la línea recta $-2x + 3y + 8 = 0$.

- ¿El punto (-3 , -4) está sobre la recta $-2x + 3y + 8 = 0$?

Para saberlo tenemos que sustituir, haciendo $x = -3$ y $y = -4$ y tenemos:

$$\begin{aligned} & -2(-3) + 3(-4) + 8 = 0 \\ & 6 - 12 + 8 = 0 \\ & 2 = 0 \quad \text{que es falso.} \end{aligned}$$

Es decir el punto (-3 , -4) no está sobre la línea recta $-2x + 3y + 8 = 0$.

EJERCICIOS 3.2

- 1) Encuentra la ecuación de las siguientes rectas y trazar su gráfica si:
 - a) Pasa por el punto $(2, -3)$ y tiene pendiente -2 .
 - b) Pasa por el punto $(-1, 3)$ y tiene pendiente 3 .
 - c) Pasa por el punto $(-2, -1)$ y tiene pendiente $3/2$.
 - d) Pasa por el punto $(0, 1)$ y tiene pendiente $-3/4$.
 - e) Pasa por el punto $(0, -2)$ y tiene pendiente $1/3$.

- 2) Una recta de pendiente $m = 3$ pasa por el punto $(1, -3)$
 - a) ¿Cuál es la abscisa del punto de la recta que tiene por ordenada 0 ?
 - b) ¿Cuál es la ordenada del punto de la recta que tiene por abscisa 2 ?
 - c) Dibuja la gráfica de esta recta.

- 3) ¿El punto $(3, -4)$ está sobre la recta $2x - y - 8 = 0$?

- 4) ¿El punto $(-1, 3)$ está sobre la recta $5x + y + 2 = 0$?

3.3 ECUACIÓN DE LA RECTA CONOCIENDO DOS DE SUS PUNTOS

Si conoces las coordenadas de dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ por donde pasa una línea recta, lo primero que tienes que hacer es encontrar su pendiente m , y con cualquiera de los puntos P o Q sustituyes en la ecuación:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Pero como ya sabes que $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ entonces en si, estas calculando

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)} \longrightarrow \text{Ecuación 2}$$

Es la ecuación de la recta que pasa por dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, la gráfica que se obtiene es

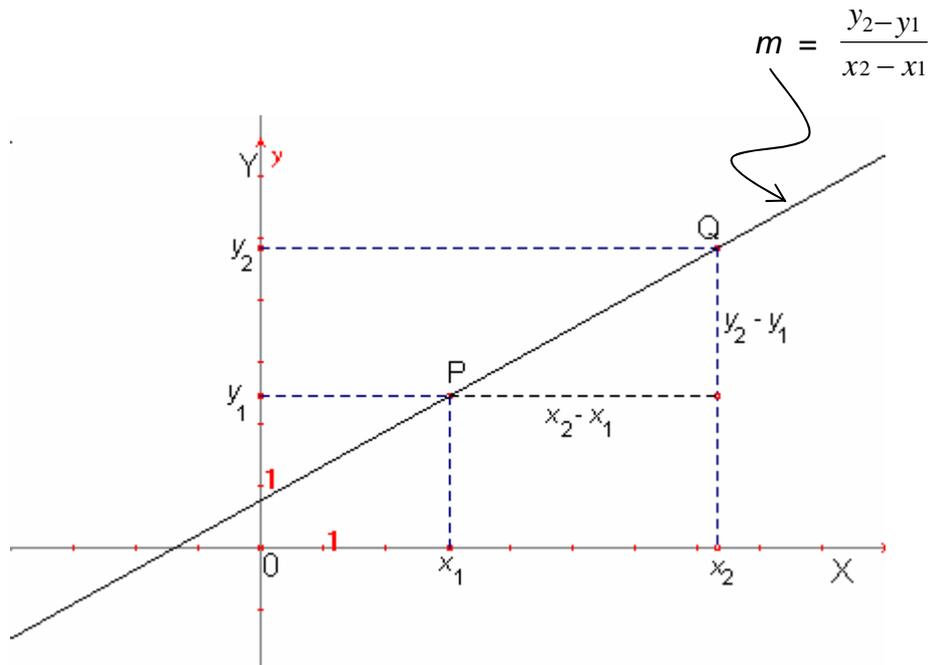


figura 4

Si la recta es **paralela al eje de las X**, su pendiente es cero, es decir $y_2 = y_1$ y la ecuación de la recta es $y = y_1$, así la gráfica que se obtiene es:

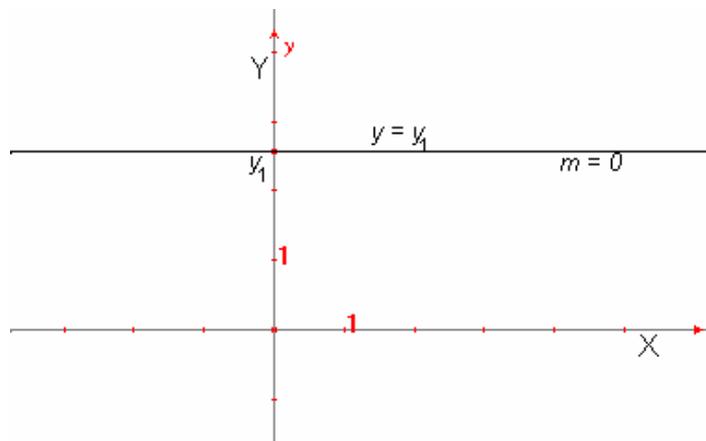
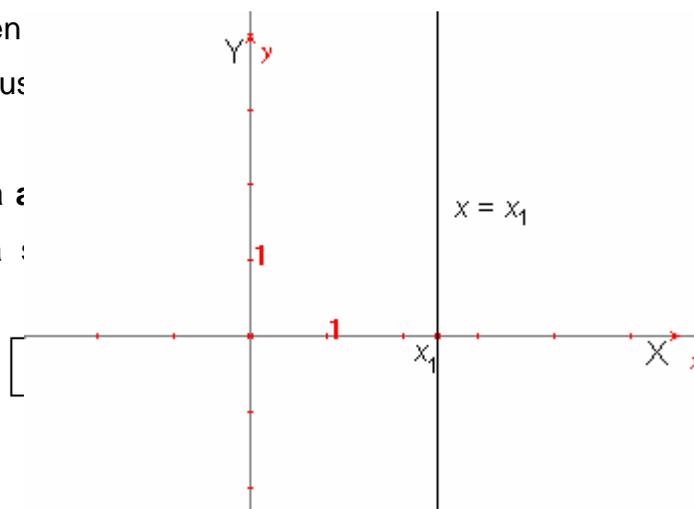


figura 5

Como ves su gráfica es una recta horizontal y observa que su pendiente es cero, ya que su ángulo de inclinación es cero. Otras observaciones que puedes hacer es que en cualquier punto sobre la recta sus coordenadas son (x, y_1) .

Si la recta es **paralela al eje de las Y**, su pendiente es indefinida, es decir $x_2 = x_1$ y la ecuación de la recta es $x = x_1$, así la gráfica que se obtiene es:



denominador se hace cero, es decir la pendiente no está definida, entonces la ecuación de la recta es $x = x_1$, y la gráfica que se obtiene es la siguiente:

figura 6

Esta recta es vertical y su pendiente no está definida ya que su ángulo de inclinación es de 90° . Otras observaciones que puedes hacer es que en esta ecuación “no aparece la variable y ”, y que las abscisas de los puntos dados son iguales, es decir $x_1 = x_2$.

EJEMPLOS:

1) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos

P(2, -3) y Q(5, 6).

Solución:

Sustituimos en la ecuación 2 tomando en cuenta que

$$x_1 = 2, \quad y_1 = -3, \quad x_2 = 5 \quad \text{y} \quad y_2 = 6$$

También puedes hacer $x_1 = 5, \quad y_1 = 6, \quad x_2 = 2 \quad \text{y} \quad y_2 = -3$

y obtendrás el mismo resultado.

Al hacer la sustitución obtenemos:

$$y - (-3) = \frac{6 - (-3)}{5 - 2} (x - 2)$$

realizando las operaciones $y + 3 = \frac{9}{3} (x - 2)$

$$y + 3 = 3(x - 2)$$

$$y + 3 = 3x - 6$$

$$0 = 3x - y - 6 - 3$$

es decir $3x - y - 9 = 0$ es la ecuación en forma general de la recta que pasa por los puntos P(2, -3) y Q(5, 6).

La gráfica de esta ecuación es la figura 7.

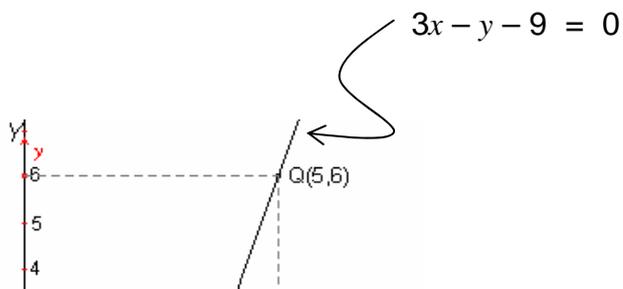


figura 7

- 2) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(-8, 5)$ y $Q(10, 5)$

Solución:

Observa que las ordenadas son iguales es decir $y_1 = y_2$ entonces es una recta horizontal y su ecuación es $y = 5$, y su gráfica es:

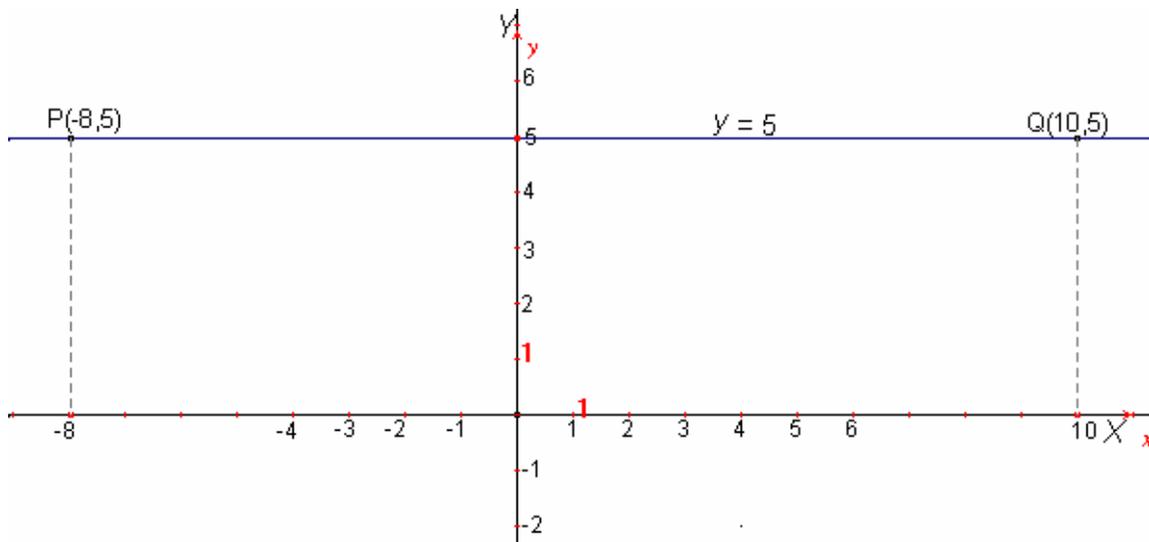


figura 8

- 3) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(-4, 5)$ y $Q(-4, -1)$

Solución:

Observa que las abscisas son iguales es decir $x_1 = x_2$ entonces es una recta vertical y su ecuación es $x = -4$, su gráfica es:

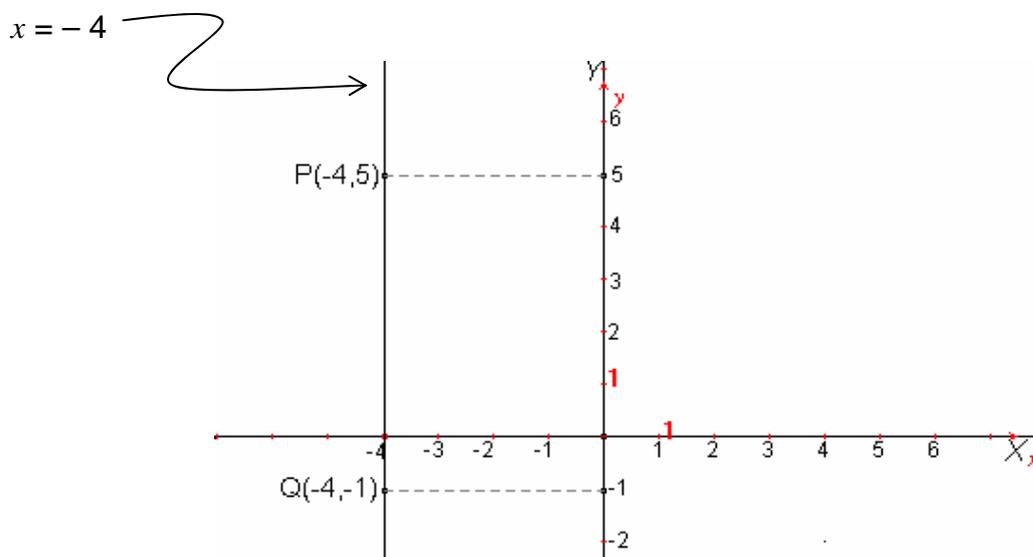


figura 9

4) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos

$$P(-5, 6) \text{ y } Q(3, -2)$$

Solución:

Sustituimos en la ecuación 3 haciendo $x_1 = -5$, $y_1 = 6$, $x_2 = 3$ y $y_2 = -2$ (recuerda que es lo mismo si $x_1 = 3$, $y_1 = -2$, $x_2 = -5$ y $y_2 = 6$ ya que obtendrás el mismo resultado), al hacer la sustitución obtenemos:

$$y - 6 = \frac{-2-6}{3-(-5)} (x - -5) \quad \text{realizando las}$$

operaciones

$$y - 6 = \frac{-8}{8} (x + 5)$$

$$y - 6 = -1(x + 5)$$

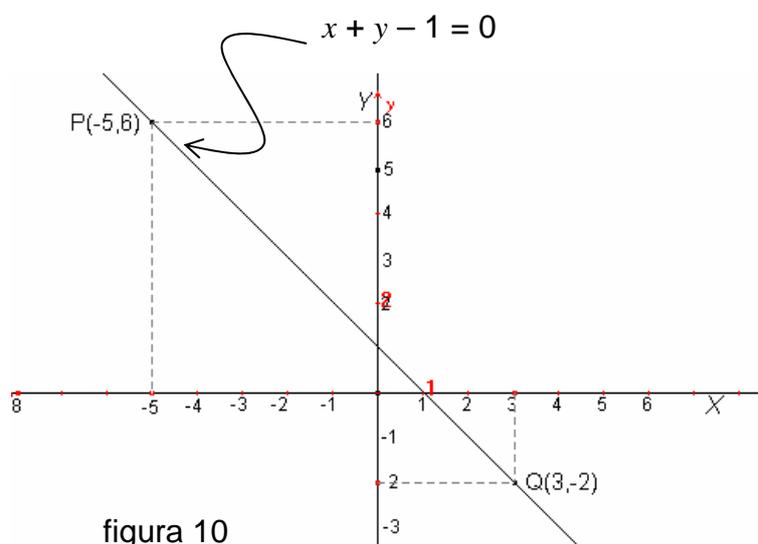
$$y = -x - 5 + 6$$

$$y = -x + 1 \quad \leftarrow \text{forma pendiente-ordenada}$$

observa que $m = -1$ y $b = 1$

$$x + y - 1 = 0 \quad \leftarrow \text{ecuación en forma general de la recta que pasa por los puntos } P(-5, 6) \text{ y } Q(3, -2).$$

La gráfica de ésta ecuación es:



EJERCICIOS 3.3

- 1) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos indicados, en forma general y en forma pendiente-ordenada al origen.

a) $P(2, 5)$ y $Q(-1, 1)$	b) $R(4, -1)$ y $S(-2, 5)$
c) $A(1, 9)$ y $B(5, 9)$	d) $C(-7, 8)$ y $D(-2, -5)$
e) $M(-3, -2)$ y $N(-3, 7)$	f) $T(2/3, 2)$ y $U(3, 1/2)$
g) $F(-4, -2)$ y $G(1, -2)$	h) $H(3/4, 6)$ y $J(3/4, -7)$

- 2) Traza un par de ejes rectangulares y en él localiza los puntos $P(2, 1)$, $Q(6, 7)$, $R(4, 4)$, $S(-2, -5)$, y $T(1, -1/2)$.
 - a) Encuentra la ecuación de la recta sobre la que están todos esos puntos.
 - b) En general, ¿cómo es la ordenada de los puntos que pertenecen a la recta?

- 3) Traza otro par de ejes rectangulares y en él localiza los puntos $A(3, 1)$, $B(7, -1)$, $C(5, 0)$, $D(-3, 4)$ y $E(-7, 6)$.
 - a) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por estos puntos.
 - b) ¿Cómo es la abscisa de cualquier punto perteneciente a la recta dada?

3.4 FORMA GENERAL DE LA ECUACIÓN DE UNA LÍNEA RECTA.

Con los ejercicios anteriores te diste cuenta que la ecuación general de la línea recta es de la forma

$$\boxed{Ax + By + C = 0} \longrightarrow \text{Ecuación 3}$$

Es una ecuación de primer grado en dos variables, donde x y y son las variables, A , B y C son cualesquiera números reales con la condición de que A y B no sean simultáneamente cero.

3.4.1 ANALISIS DE QUE TODA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON DOS VARIABLES REPRESENTA UNA LINEA RECTA.

Observa que si $A = 0$ y $B \neq 0$ la ecuación 3 se convierte en:

$$By + C = 0$$

Si despejamos y tenemos $y = -\frac{C}{B}$

Es la ecuación de una recta horizontal que corta al eje Y en $-\frac{C}{B}$.

Por otro lado, si $A \neq 0$ y $B = 0$ la ecuación 3 se convierte en:

$$Ax + C = 0$$

Despejando x se tiene que $x = -\frac{C}{A}$

Es la ecuación de una recta vertical cuya intersección con el eje X es $-\frac{C}{A}$.

Por último, si $C = 0$ la ecuación 3 se convierte de la forma $Ax + By = 0$ que al despejar a la variable y se tiene:

$$y = -\frac{A}{B}x$$

Si observas en este caso es también de la forma $y = mx + b$ donde $m = -\frac{A}{B}$ y aquí no aparece la b , esto quiere decir que la **ordenada al origen es cero**, es decir la recta pasa por el origen de los ejes rectangulares cuando $C = 0$.

Así que podemos decir que toda ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$ tiene como representación gráfica una recta; de la misma forma, toda recta en el plano puede representarse analíticamente por medio de esta ecuación.

¿Observaste como son los exponentes de las variables en toda ecuación de primer grado?

Sigamos analizando la ecuación general de primer grado:

Si $B \neq 0$, despejamos y de la ecuación 3 y obtenemos:

$$By = -Ax - C$$

De donde
$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Comparando esta ecuación con la ecuación $y = mx + b$ podemos deducir que:

En la ecuación general de la recta $Ax + By + C = 0$, la pendiente

$$\text{es } m = -\frac{A}{B}, \text{ y la ordenada al origen } b = -\frac{C}{B}.$$

→(4)

EJEMPLOS:

1) ¿Cuál es la pendiente y la ordenada al origen de la recta $3x - 8y + 5 = 0$?

Solución:

En esta ecuación se tiene que $A = 3$, $B = -8$ y $C = 5$, sustituyendo estos valores en las igualdades de la ecuación 4 se tiene:

La pendiente
$$m = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{-8} = \frac{3}{8}$$

Y la ordenada al origen es $b = -\frac{C}{B} = -\frac{5}{-8} = \frac{5}{8}$

Tu ya sabes que es lo mismo si despejas la variable y de la ecuación, y obtenemos la forma $y = mx + b$ (pendiente-ordenada al origen), que se haría de la siguiente forma:

$$3x - 8y + 5 = 0$$

$$-8y = -3x - 5$$

$$y = \frac{-3x - 5}{-8}$$

$$y = \frac{-3}{-8}x + \frac{-5}{-8}$$

$$y = \frac{3}{8}x + \frac{5}{8}$$

$$\text{Donde } m = \frac{3}{8} \text{ y } b = \frac{5}{8}$$

¿Cómo quedaría su gráfica?; creo que ya la puedes trazar, pero por si todavía tienes dudas hagamos un ejercicio.

2) Trazar la gráfica de la ecuación $5x - 2y + 4 = 0$.

1º) Se despeja a y : $5x + 4 = 2y$

$$\frac{5}{2}x + 2 = y$$

resulta que su pendiente es $m = \frac{5}{2}$ y su ordenada al origen es 2.

2º) Ahora tracemos su gráfica:

Su ordenada al origen nos dice que sobre el eje Y marcamos un punto en el 2, y a partir de ahí nos movemos según el valor de la pendiente, en este caso avanzamos 2 unidades a la derecha y 5 hacia arriba y quedamos en el punto $(2, 7)$, marcamos otro punto para después con una regla unir los puntos marcados y así obtenemos la siguiente figura.

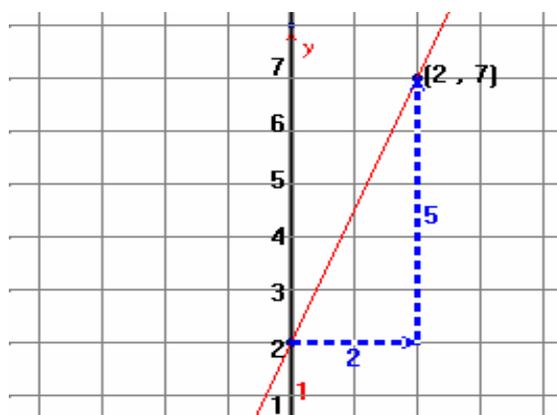


figura 11

3) Encuentra la pendiente y la ordenada al origen de la recta $x + 5y = 15$ y trazar su gráfica.

Solución:

Lo haremos despejando a y : $5y = -x + 15$

$$y = \frac{-x + 15}{5}$$

$$y = -\frac{x}{5} + 3$$

Donde $m = -\frac{1}{5}$ y $b = 3$

Gráfica:

Su ordenada al origen nos dice que sobre el eje Y marcamos un punto en el 3, y a partir de ahí avanzamos 5 unidades a la derecha y 1 hacia abajo por el signo negativo y quedamos en el punto $(5, 2)$, marcamos el segundo punto y con una regla lo unimos con el primero y así obtenemos la siguiente recta.

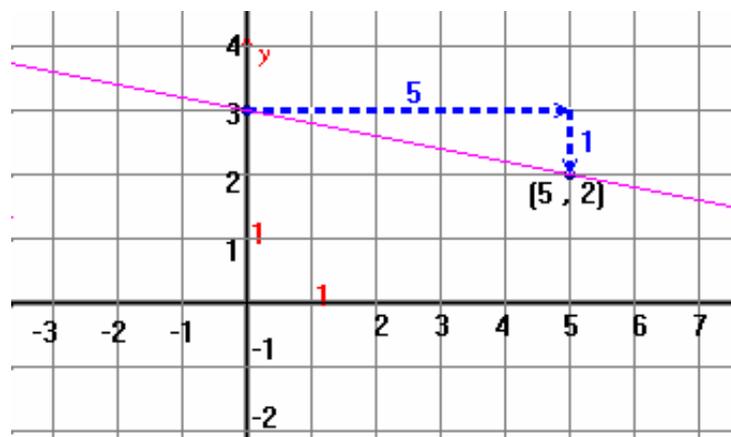


figura 12

Con los ejemplos y los ejercicios que has hecho creo que ya dedujiste que toda recta es la gráfica de una ecuación de la forma,

$$Ax + By + C = 0$$

Donde A , B y C son números reales siempre que A y B no sean ambos cero.

A esta forma se le llama ECUACIÓN LINEAL en dos variables que son x y y .

EJERCICIOS 3.4

1) Trazar las gráficas de cada una de las siguientes ecuaciones y escribir cuál es la pendiente y la ordenada al origen de cada una.

- a) $x - y = 0$ b) $x - 2y = 0$ c) $x + y + 2 = 0$ d) $x + y - 1 = 0$
 e) $y = -3$ f) $3x - 2y = 12$ g) $2x - 3 = 0$ h) $5 + 3y = 0$

2) Para la recta $4x - 3y + 1 = 0$

a) Completar la siguiente tabla:

x	0	-1		2		-3	
y			0		3		-1

b) Dibujar la gráfica.

c) Encuentra la pendiente de la recta utilizando dos puntos de los encontrados en la tabla anterior.

3) Para la recta $7x + 2y = 3$

- a) ¿Cuál de los siguientes puntos están sobre ella?: $(1, -2)$, $(2, 17)$, $(0, 3)$ y $(3, -9)$.
- b) ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos por donde la recta corta al eje X y al eje Y ?
- 4) Si dos rectas son paralelas ¿cómo serán sus pendientes?

3.5 TRANSFORMACIÓN DE LA ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA A FORMAS PARTICULARES

Consideremos dos líneas rectas, cuyas ecuaciones en su forma general son:

$$2x - 5y + 10 = 0 \text{ ----- (1)}$$

$$4x - 10y - 5 = 0 \text{ -----(2)}$$

Si obtenemos la pendiente y la ordenada en el origen para cada una de ellas a partir de sus ecuaciones tenemos lo siguiente.

Para la ecuación (1) $m_1 = -2/-5 = 2/5$ y $b = -10/-5 = 2$

Para la ecuación (2) $m_2 = -4/-10 = 2/5$ y $b = 5/-10 = -1/2$

Sus gráficas quedarían de la siguiente forma:

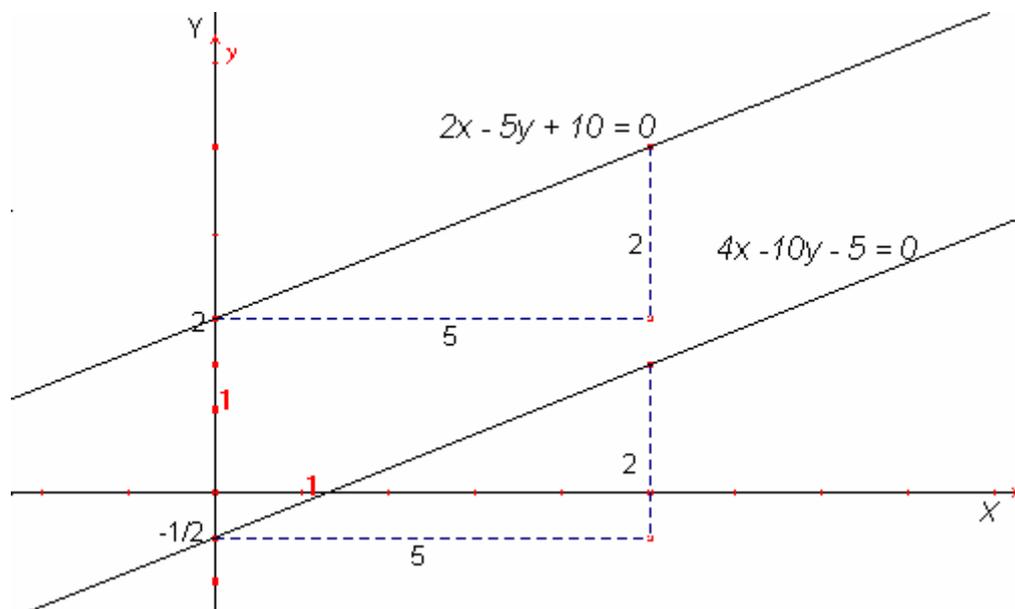


figura 13

¿Cómo son las rectas?, ¿Cómo son sus pendientes?, ¿Porqué?

3.5.1 RECTAS PARALELAS

Recuerda que las rectas paralelas en un plano euclidiano son aquellas que por más que las prolongues en ambas direcciones, nunca se cortan. En un plano cartesiano sucede lo mismo, es decir ambas tendrán la misma inclinación y en consecuencia tendrán pendientes iguales.

Las rectas paralelas son aquellas rectas que tienen la misma pendiente, y si dos o más rectas tienen pendientes iguales entonces son rectas paralelas.

EJEMPLOS:

1) Determina si la recta $5x + y - 3 = 0$ es paralela a la recta $15x + 3y + 6 = 0$.

Solución:

Obtendremos la pendiente para cada una de ellas a partir de sus ecuaciones:

Para la recta con ecuación $5x + y - 3 = 0$ su pendiente es $m_1 = -\frac{A}{B} = -5$

Y para $15x + 3y + 6 = 0$ su pendiente es $m_2 = -\frac{A}{B} = -15/3 = -5$

Como las pendientes son iguales, podemos afirmar que las rectas son paralelas.

Observación:

Creo que te diste cuenta que los coeficientes de x y de y son proporcionales, ya que si multiplicas por 3 a los coeficientes de x y de y en la ecuación $5x + y - 3 = 0$ obtienes los coeficientes de x y de y de la ecuación $15x + 3y + 6 = 0$, pero sus términos independientes quedan diferentes.

2) Encuentra la ecuación en forma general de la recta que pasa por el punto $(-2, 5)$ y que sea paralela a la recta $3x - 7y - 1 = 0$.

Solución: Como se quiere que las rectas sean paralelas, sus pendientes deben ser iguales, así que calculamos la pendiente de la recta dada

$$3x - 7y - 1 = 0, \text{ es } m = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{-7} = \frac{3}{7}$$

Utilizando esta pendiente y el punto $(-2, 5)$ sustituimos en la forma punto-pendiente que es $y - y_1 = m(x - x_1)$ y tenemos:

$$y - 5 = \frac{3}{7}(x - -2)$$

$$7(y - 5) = 3(x + 2)$$

$$7y - 35 = 3x + 6$$

$$0 = 3x - 7y + 6 + 35$$

$3x - 7y + 41 = 0$ es la ecuación buscada

Observa que los coeficientes de x y de y son iguales en las dos ecuaciones, es porque sus pendientes son iguales, es decir las rectas son paralelas.

¿Cómo serían las rectas si los términos independientes fueran también iguales?

Así es, sería la misma ecuación y por lo tanto representarían a la misma línea recta, por lo que podemos decir que:

Dos o más ecuaciones representan la misma línea recta si sus coeficientes correspondientes son iguales o tienen la misma proporción, y el término independiente también será igual.

EJEMPLO:

Determina si la recta cuya ecuación es $2x + 5y - 1 = 0$ coincide con la recta cuya ecuación es $6x + 15y - 3 = 0$.

Solución:

Observa que los coeficientes y el término independiente en la ecuación $6x + 15y - 3 = 0$ son el triple de los coeficientes y el término independiente en la ecuación $2x + 5y - 1 = 0$, es decir, tanto los coeficientes como el término independiente tienen la misma proporción por lo que podemos afirmar que las dos ecuaciones representan la misma línea recta.

3.5.2 RECTAS PERPENDICULARES

Dos líneas rectas son perpendiculares cuando la pendiente de una, es igual a la recíproca de la pendiente de la otra con signo contrario, es decir $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

EJEMPLOS

1) Determina si la recta $3x + y - 6 = 0$ es perpendicular a la recta $2x - 6y - 3 = 0$.

Solución:

Obtendremos la pendiente de cada una de ellas a partir de sus ecuaciones:

Para la recta $3x + y - 6 = 0$ su pendiente es $m_1 = -\frac{A}{B} = -3$

Para la recta $2x - 6y - 3 = 0$ su pendiente es $m_2 = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{-6} = \frac{1}{3}$

Como las pendientes son recíprocas y de signo contrario, es decir $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

ya que sustituyendo sus valores vemos que $-\frac{1}{m_2} = -\frac{1}{\frac{1}{3}} = -\frac{3}{1} = -3 = m_1$ así

que podemos afirmar que las rectas son perpendiculares.

Observación:

Al trabajar las ecuaciones $3x + y - 6 = 0$ (1)

$2x - 6y - 3 = 0$ (2)

Creemos que te diste cuenta que si divides la ecuación (2) entre 2 tenemos $x - 3y - \frac{3}{2} = 0$ donde el coeficiente de x es el de y en la ecuación (1) y el coeficientes de y es el de x con signo contrario en la ecuación (1).

- 2) Encuentra la ecuación en forma general de la recta que pasa por el punto $(-1, 3)$ y que sea perpendicular a la recta $2x - 5y + 1 = 0$.

Solución:

Como se quiere que las rectas sean perpendiculares, sus pendientes deben ser recíprocas y de signo contrario, así que calculamos la pendiente de la recta dada $2x - 5y + 1 = 0$, que es $m_1 = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{-5} = \frac{2}{5}$ luego su recíproco y de

signo contrario es $m_2 = -\frac{5}{2}$

Utilizando la pendiente m_2 y el punto $(-1, 3)$ sustituimos en la forma punto-pendiente que es $y - y_1 = m(x - x_1)$ y tenemos:

$$y - 3 = -\frac{5}{2}(x - (-1))$$

$$2(y - 3) = -5(x + 1)$$

$$2y - 6 = -5x - 5$$

$$5x + 2y - 6 + 5 = 0$$

$$\boxed{5x + 2y - 1 = 0} \text{ es la ecuación buscada}$$

3.5.3 RECTAS QUE SE CORTAN

Si dos rectas no son paralelas ni la misma recta quiere decir que se cortan en uno y solo un punto, y sus pendientes son diferentes es decir $m_1 \neq m_2$.

EJEMPLO:

Determina si las rectas cuyas ecuaciones son

$$x - 3y + 2 = 0 \dots\dots (1)$$

$$3x - y + 4 = 0 \dots\dots (2)$$

representan la misma línea recta, o son paralelas o si se cortan en un punto y si se cortan encontrar el punto de intersección.

Solución:

Como ni los coeficientes ni el término independiente en las dos ecuaciones son iguales ni tampoco proporcionales las rectas no son paralelas ni representan la misma recta. Otra forma de verlo es calculando sus pendientes:

La pendiente de la ecuación (1) es $m_1 = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$

La pendiente de la ecuación (2) es $m_2 = -\frac{3}{-1} = 3$

Entonces $m_1 \neq m_2$, por lo que se deben de cortar en un punto, y para encontrar las coordenadas del punto de intersección, tenemos que resolver el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2) que es:

$$x - 3y + 2 = 0 \quad \dots\dots (1)$$

$$3x - y + 4 = 0 \quad \dots\dots (2)$$

Lo resolveremos por eliminación (lo puedes resolver por otro método y el resultado es el mismo).

1) Multiplicamos por -3 a la ecuación (1) y tenemos: $-3x + 9y - 6 = 0$

2) Sumamos esta nueva ecuación con la ecuación (2):

$$\begin{array}{r} -3x + 9y - 6 = 0 \\ \underline{3x - y + 4 = 0} \quad \dots\dots\dots(2) \\ 0 + 8y - 2 = 0 \end{array}$$

3) Despejamos y en $8y - 2 = 0$ y tenemos: $y = 2/8 = 1/4$, así $y = 1/4$.

4) Sustituimos el valor de y en la ecuación (1) y obtendremos el valor de x :

$$x - 3(1/4) + 2 = 0$$

$$x - 3/4 + 2 = 0$$

$$x + 5/4 = 0$$

$$x = -5/4$$

Entonces el punto de intersección de las dos rectas es $(-5/4, 1/4)$.

Para comprobar que este punto está sobre las dos rectas solo tienes que sustituirlo en cada una de sus ecuaciones y te deben de quedar igualdades verdaderas.

3.5.4 ECUACION SIMETRICA DE LA RECTA.

Para obtener la ecuación simétrica de la línea recta, partimos de que toda **recta inclinada** corta a ambos ejes del plano cartesiano, al eje "Y" en un punto de la forma $(0, b)$ y al eje "X" en otro punto de la forma $(a, 0)$, en donde b es la ordenada al origen y a es la abscisa al origen de la línea recta, ver las figuras 14 y 15 ya sea se incline a la izquierda o a la derecha.

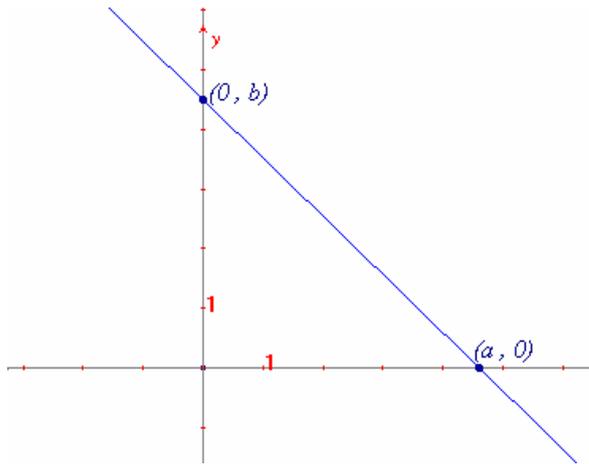


figura 14

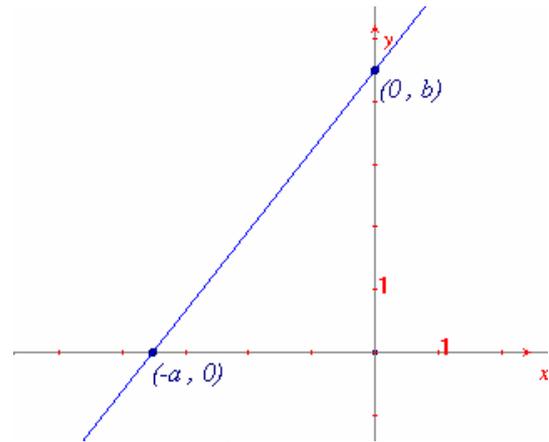


figura 15

Encontraremos su ecuación:

Conocemos dos puntos por los que pasa la recta que son $(a, 0)$ y $(0, b)$ aplicaremos la forma dos puntos que es:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

Hacemos $x_1 = a$, $y_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = b$ y sustituyendo tenemos:

$$y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a} (x - a) \quad \text{simplificando tenemos}$$

$$y = \frac{b}{-a} (x - a)$$

$$y = -\frac{b}{a} (x - a)$$

$$ay = -bx + ba$$

$$bx + ay = ba$$

dividiendo la igualdad entre ba

tenemos

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

A la ecuación en esta forma se le llama ecuación simétrica o de las intersecciones de la línea recta, donde $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

EJEMPLO 1:

Encuentra la ecuación en forma general de la recta que pasa por los puntos $A(-3, 0)$ y $B(0, 5)$.

Solución:

Cómo los puntos $A(-3, 0)$ y $B(0, 5)$ están sobre los ejes y también son de la línea recta, quiere decir que tenemos los puntos de intersección de la recta con los ejes coordenados, y su gráfica quedaría así:

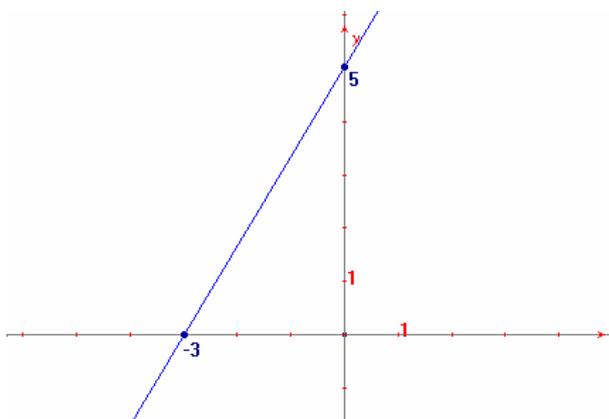


Figura 16

Usando la fórmula $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, sustituimos los valores $a = -3$ y $b = 5$

y tenemos $\frac{x}{-3} + \frac{y}{5} = 1$ ----- Ecuación en forma simétrica.

Ecuación en Forma General:

Si queremos llevarla a la forma general, realizamos la suma de fracciones y

tenemos: $\frac{5x-3y}{-15} = 1$

$$5x - 3y = -15$$

$5x - 3y + 15 = 0$ esta ecuación es equivalente a pero en su forma general.

EJEMPLO 2:

Encontrar la abscisa y la ordenada al origen de la recta $7x - 3y + 8 = 0$.

Solución:

1º) El término independiente lo pasamos al lado derecho: $7x - 3y = -8$

2º) Dividimos toda la ecuación entre -8 : $\frac{7x}{-8} - \frac{3y}{-8} = \frac{-8}{-8}$ ----- ♣

3º) Como $7x$ y $3y$ no son divisibles entre -8 , a cada variable la dividimos

entre el recíproco de cada fracción es decir tenemos: $\frac{x}{-\frac{8}{7}} + \frac{y}{\frac{8}{3}} = 1$ y

esta ecuación es equivalente a ♣.

4º) Las intersecciones con los ejes son: $a = -\frac{8}{7}$ y $b = \frac{8}{3}$

EJERCICIOS 3.5

1) En cada una de las siguientes ecuaciones encuentra la pendiente y la ordenada al origen de la recta que determinan.

a) $2x - 6y + 18 = 0$

b) $3y - 5 = x$

c) $5x - 2y = 0$

d) $5y - 2x = 3$

e) $7 = 2x - y$

f) $3y = -9$

g) $8 - 3x = 6y$

h) $5x - 15 = 0$

2) En cada caso determina si las rectas son paralelas o perpendiculares.

a) $3x + y - 9 = 0$ y $x - 3y + 1 = 0$

b) $4x + 7y + 3 = 0$ y $7x - 4y - 8 = 0$

c) $6x - 3y = 0$ y $3x - y = 0$

d) $2x - 5y + 9 = 0$ y $5x + 2y + 1 = 0$

e) $9x + 15y - 7 = 0$ y $3x + 5y + 9 = 0$

3) Encuentra la ecuación en forma general de la recta que pasa por el punto $(-3, 7)$ y es paralela a la recta $5x + 9y - 2 = 0$.

4) Encuentra la ecuación en forma general de la recta que pasa por el punto $(7, -2)$ y es paralela a la recta $3x - 4y + 7 = 0$.

5) Encuentra la ecuación en forma general de la recta que es perpendicular a la recta con ecuación $3y = 5x + 7$ en el punto $(1, 4)$.

- 6) Encuentra la ecuación en forma general de la recta que es perpendicular a la recta $3 + 4x = y + 7$ en el punto $(-1, -8)$.
- 7) Dadas las siguientes ecuaciones: $4x - 3y + 14 = 0$
 $x + 2y - 6 = 0$
- En un mismo plano cartesiano dibuja la gráfica de cada ecuación .
 - Al punto de intersección de las dos rectas llámale P , ¿cuáles son sus coordenadas?
 - Ahora resuelve el sistema algebraicamente para encontrar las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas, ¿son iguales estas coordenadas con las que encontraste en el inciso b)?
- 8) En cada uno de los siguientes casos encuentra el punto de intersección (si es que existe) del par de rectas dadas.
- | | | | |
|-----------------|------------------|-----------------|---------------------|
| a) $2x - y = 5$ | b) $7x = 42 - y$ | c) $3x + y = 4$ | d) $5x + 7 - y = 0$ |
| $x + y - 7 = 0$ | $y = 3x - 8$ | $x - y - 2 = 0$ | $x - 2y = 4$ |
- 9) Trazar la gráfica y encontrar la ecuación en forma general de la recta que cumple:
- Su abscisa y ordenada al origen son 2 y -1 respectivamente.
 - Pasa por los puntos $P(0, 5)$ y $Q(-4, 0)$.
 - Corta al eje "X" en -7 y corta al eje "Y" en -5 .
 - Su ordenada y abscisa al origen son -7 y 9 respectivamente.
- 10) Encontrar la abscisa y la ordenada al origen de cada una de las siguientes rectas cuyas ecuaciones son:
- | | |
|-----------------------|---------------------|
| a) $7x - 2y + 3 = 0$ | d) $5x + 7 - y = 0$ |
| b) $2x + 5y - 10 = 0$ | e) $3x + y = 4$ |
| c) $-3x - y + 8 = 0$ | f) $7x = 42 - y$ |

3.6 DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Consideremos la ecuación de una recta en su forma general:

$$Ax + By + C = 0, \text{ con } B \neq 0$$

Y usemos el punto $P(x_1, y_1)$ que no pertenece a dicha recta, como se ve en la figura 17.

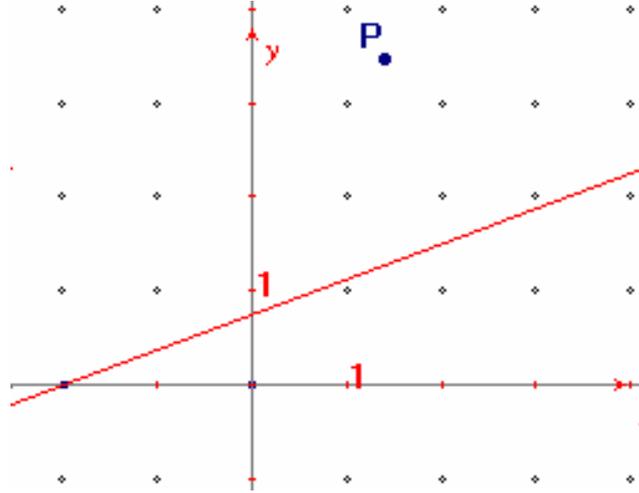


Figura 17

La distancia del punto P a la recta $Ax + By + C = 0$, es la longitud del segmento desde P hasta la recta $Ax + By + C = 0$ perpendicular a esta, llamémosle PQ ; ver la figura 18.

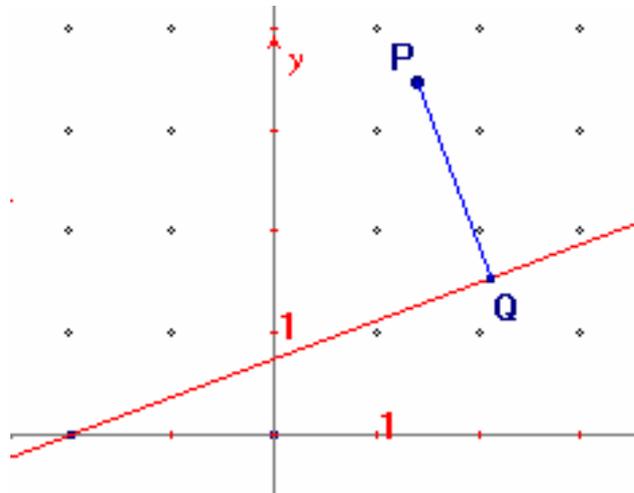


Figura 18

Para encontrar el valor de esta distancia se utiliza la fórmula

$$d = \overline{PQ} = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

donde las barras del numerador indican valor absoluto, que se usa para que el resultado como es una longitud siempre sea positiva, este concepto se te irá aclarando viendo su uso en los siguientes ejemplos.

Así siempre que te pidan encontrar la distancia que hay desde el punto $P(x_1, y_1)$ a la recta con ecuación $Ax + By + C = 0$, sólo tienes que sustituir en la fórmula

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (1)$$

EJEMPLO 1) Encontrar la distancia del punto $K(6, 4)$ a la recta con ecuación $3x + 4y - 20 = 0$.

Solución:

Primero debes de identificar los valores de x_1 , y_1 , A , B y C ; en este ejemplo son: $x_1 = 6$, $y_1 = 4$, $A = 3$, $B = 4$ y $C = -20$.

Estos al sustituirlos en la fórmula 1 nos queda:

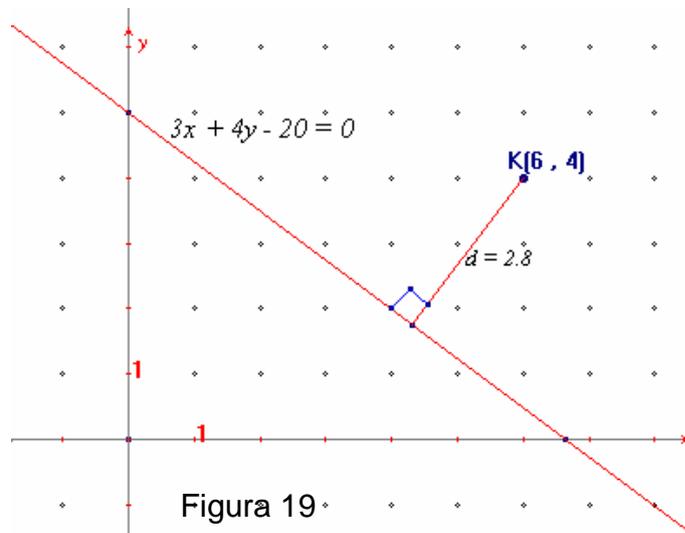
$$d = \frac{|3(6) + 4(4) + (-20)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$d = \frac{|18 + 16 - 20|}{\sqrt{9 + 16}}$$

$$d = \frac{|14|}{\sqrt{25}} = \frac{14}{5} = 2.8$$

De esta forma la distancia que hay del punto $K(6, 4)$ a la recta con ecuación $3x + 4y - 20 = 0$ es 2.8 unidades.

Representación gráfica:



EJEMPLO 2) Encontrar la distancia del punto $R(-4,-3)$ a la recta con ecuación $x - 3y + 3 = 0$.

Solución:

En este ejemplo $x_1 = -4$, $y_1 = -3$, $A = 1$, $B = -3$ y $C = 3$.

Estos al sustituirlos en la fórmula 1 nos queda: $d = \frac{|1(-4) - 3(-3) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}}$

$$d = \frac{|-4 + 9 + 3|}{\sqrt{1+9}}$$

$$d = \frac{|8|}{\sqrt{10}} = \frac{8}{\sqrt{10}} = 2.52$$

Entonces la distancia que hay del punto $R(-4,-3)$ a la recta con ecuación $x - 3y + 3 = 0$ es 2.52 unidades.

La representación gráfica es:

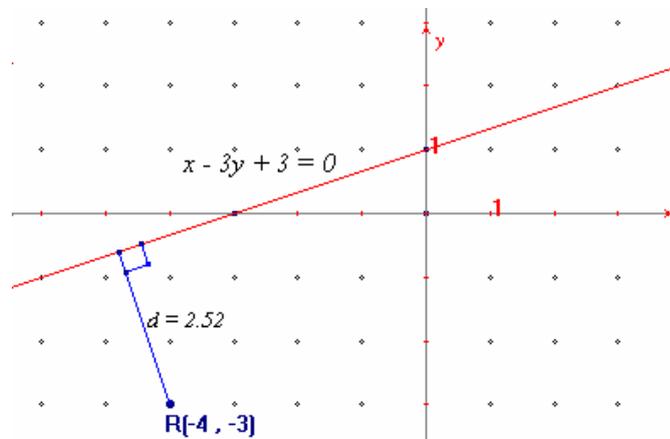


Figura 20

EJEMPLO 3) Encontrar la distancia que hay entre las rectas paralelas con ecuaciones $3x - 4y + 15 = 0$ y $3x - 4y + 24 = 0$.

Solución:

Primero debemos encontrar un punto que este sobre alguna de las rectas, se puede elegir cualquiera de las dos; elegimos a la recta $3x - 4y + 24 = 0$. Para encontrar un punto sobre ella le damos un valor a x , el más fácil de calcular es $x = 0$, al sustituir este valor tenemos: $3(0) - 4y + 24 = 0$

$$0 - 4y + 24 = 0$$

$$-4y = -24$$

$$y = \frac{-24}{-4} = 6$$

Entonces un punto sobre la recta es $H(0, 6)$, que serán x_1 y y_1 .

Ahora calcularemos la distancia del punto $H(0, 6)$ a la recta $3x - 4y + 15 = 0$,

en la fórmula
$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Sustituimos los valores $x_1 = 0$ y $y_1 = 6$, $A = 3$, $B = -4$ y $C = 15$.

Y tenemos:
$$d = \frac{|3(0) - 4(6) + 15|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$$

$$d = \frac{|0 - 24 + 15|}{\sqrt{9 + 16}}$$

$$d = \frac{|-9|}{\sqrt{25}} = \frac{9}{5} = 1.8$$

Concluimos que la distancia que hay entre las dos rectas es 1.8 unidades, como lo puedes apreciar en la figura 21.

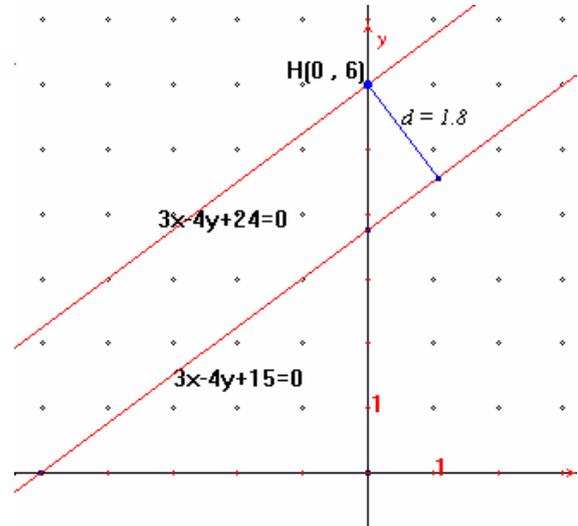


Figura 21

EJERCICIOS 3.6

1. En cada uno de los siguientes incisos encuentra la distancia del punto dado a la recta indicada.

a. $x + 4 = 0$; $P(3, 2)$

b. $2x - 5 = 0$; $Q(-4, -1)$

c. $2y - 5 = 0$; $R(2, -3)$

d. $5x + 12y - 26 = 0$; $T(8, 10)$

e. $5x - 12y - 25 = 0$; $U(-1, 3)$

f. $3x + 4y - 7 = 0$; $V(3, -2)$

g. $4x + 3y + 10 = 0$; $W(2, -1)$

h. $5x - 12y - 16 = 0$; $Z(-2, 0)$

i. $3x - 4y + 3 = 0$; $A(0, -3)$

j. $x - 2y - 5 = 0$; $B(-1, 2)$

2. Encuentra la distancia entre los pares de rectas paralelas cuyas ecuaciones son:

a. $3x - 2y + 10 = 0$ y $3x - 2y - 16 = 0$

b. $5x + 4y - 3 = 0$ y $5x + 4y + 2 = 0$

c. $3x - 4y + 8 = 0$ y $3x - 4y - 7 = 0$

d. $5x - 12y - 25 = 0$ y $5x - 12y + 1 = 0$

e. $x - 2y - 5 = 0$ y $x - 2y = 0$

f. $7x - 2y - 16 = 0$ y $7x - 2y + 13 = 0$

g. $12x - 5y - 12 = 0$ y $12x - 5y + 1 = 0$

h. $3x - 4y - 8 = 0$ y

$6x - 8y - 1 = 0$

i. $2x - 5y - 1 = 0$ y

$4x - 10y + 23 = 0$

3.7 SOLUCIÓN ANALÍTICA DE PROBLEMAS DE CORTE EUCLIDIANO

En esta última parte aplicaremos lo que hemos aprendido sobre la línea recta para encontrar el área de un triángulo, las ecuaciones de algunas rectas notables en un triángulo como son las medianas, las mediatrices y las alturas; también encontraremos sus puntos de intersección como el Baricentro, el Circuncentro y el Ortocentro respectivamente.

3.7.1 ÁREA DE UN TRIÁNGULO

Sabemos que el **área** de un triángulo se calcula con la fórmula “base por altura entre dos”, para esto:

1º Usando la fórmula de distancia entre dos puntos encontraremos cuanto mide la base del triángulo.

2º Usando la fórmula de distancia de un punto a una recta calcularemos el valor de la altura del triángulo.

Mediante un ejemplo veremos como se hacen estos procedimientos, calculemos el área del triángulo con vértices en $P(-3, 1)$, $Q(2, 7)$ y $R(8, -2)$.

1º) Podemos tomar cualquier lado del triángulo como su base, supongamos que es PQ , entonces la distancia entre los puntos $P(-3, 1)$ y $Q(2, 7)$ usando la fórmula de distancia entre dos puntos es la magnitud de la base.

La base es: $d = \sqrt{(-3-2)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-6)^2} = \sqrt{25+36} = \sqrt{61}$ u.

2º) Para el cálculo de la altura usaremos la fórmula de distancia de un punto a una recta, la recta debe de ser también del lado PQ y el punto el vértice R .

Ecuación de la recta PQ :

Su pendiente $m = \frac{7-1}{2-(-3)} = \frac{6}{5}$ y el punto $P(-3, 1)$, su ecuación sería:

$y - 1 = \frac{6}{5} (x - (-3))$ que al llevarla a la forma general queda $6x - 5y + 23 = 0$

Sustituyendo en la fórmula de distancia de un punto a una recta:

La recta es $6x - 5y + 23 = 0$ y el punto $R(8, -2)$ entonces:

$$\text{La altura mide } d = \frac{|6(8) - 5(-2) + 23|}{\sqrt{6^2 + (-5)^2}} = \frac{|81|}{\sqrt{61}} = \frac{81}{\sqrt{61}} \text{ u.}$$

Finalmente el área del triángulo es:

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{61} \cdot \frac{81}{\sqrt{61}}}{2} = \frac{81}{2} = 40.5 \text{ u}^2$$

3.7.2 MEDIANAS Y BARICENTRO

MEDIANA: Es el segmento de recta cuyos extremos son **un vértice** del triángulo y el **punto medio** del lado opuesto.

BARICENTRO o Gravicentro: Es el punto de intersección de las Medianas.

Mediante un ejemplo veremos como encontrar las ecuaciones (ya que son tres) de las rectas que contienen a las **MEDIANAS** de un triángulo, les llamaremos rectas Medianas.

Los vértices de un triángulo son los puntos $A(2, -1)$, $B(-4, 7)$ y $C(6, 1)$, encontraremos las ecuaciones en forma general de las rectas Medianas y su baricentro.

Recta mediana del vértice $A(2, -1)$:

1º) Punto medio del lado BC .

$$M_{BC} = (1, 4)$$

2º) Pendiente de la recta Mediana.
que pasa por M_{BC} y A :

$$m = \frac{-1 - 4}{2 - 1} = -5$$

3º) Ecuación $y - (-1) = -5(x - 2)$

$$y + 1 = -5x + 10$$

$$5x + y - 9 = 0$$

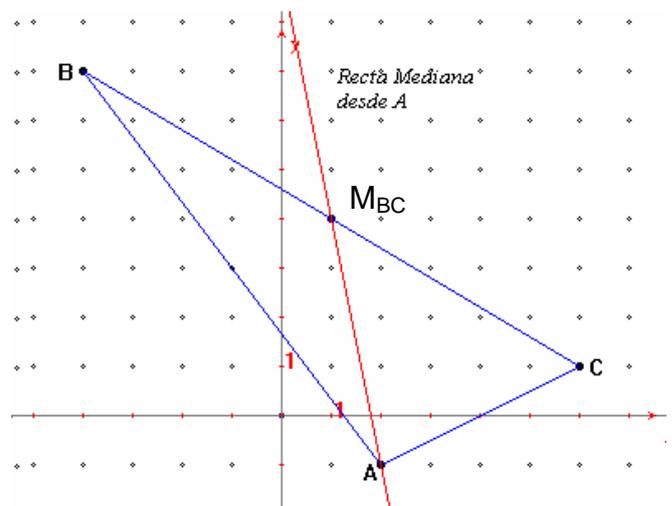


Figura 22

Así la ecuación de la Recta Mediana desde A es $5x + y - 9 = 0$

Recta mediana del vértice $B(-4, 7)$:1º) Punto medio del lado AC .

$$M_{AC} = (4, 0)$$

2º) Pendiente de la recta Mediana.

que pasa por M_{AC} y B :

$$m = \frac{7-0}{-4-4} = -\frac{7}{8}$$

3º) Ecuación $y - 7 = -\frac{7}{8}(x - (-4))$

$$8y - 56 = -7x - 28$$

$$7x + 8y - 28 = 0$$

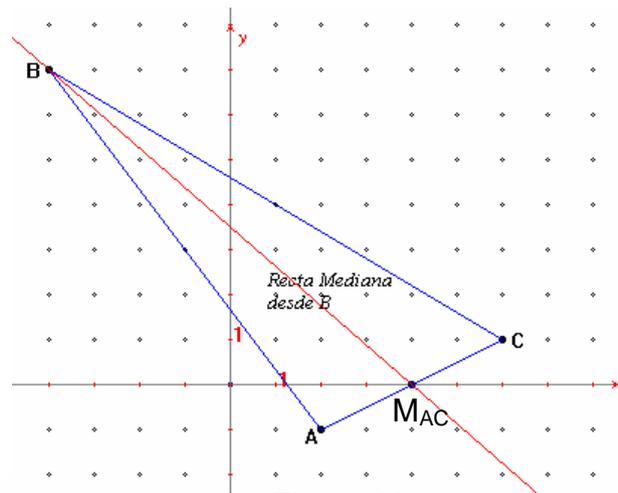


Figura 23

La ecuación de la Recta Mediana desde B es $7x + 8y - 28 = 0$ **Recta mediana del vértice $C(6, 1)$:**1º) Punto medio del lado AB .

$$M_{AB} = (-1, 3)$$

2º) Pendiente de la recta Mediana.

que pasa por M_{AB} y C :

$$m = \frac{1-3}{6-(-1)} = -\frac{2}{7}$$

3º) Ecuación $y - 1 = -\frac{2}{7}(x - 6)$

$$7y - 7 = -2x + 12$$

$$2x + 7y - 19 = 0$$

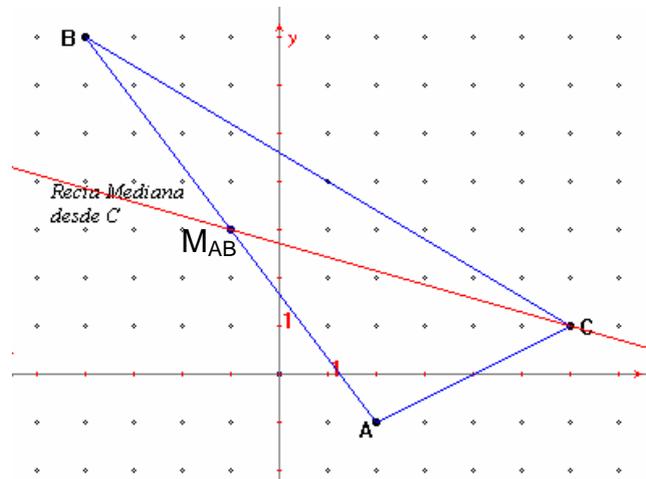


Figura 24

La ecuación de la Recta Mediana desde C es $2x + 7y - 19 = 0$

Nos falta las coordenadas del Baricentro que es la intersección de las medianas del triángulo, para esto es suficiente encontrar la intersección de dos de ellas y esto se hace resolviendo un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolvamos el sistema formado por las ecuaciones de las rectas Medianas desde A y desde B que son:

$$5x + y - 9 = 0$$

$$7x + 8y - 28 = 0$$

Despejando y en la primera: $y = -5x + 9$ Sustituyendo este valor en la segunda tenemos: $7x + 8(-5x + 9) - 28 = 0$

$$7x - 40x + 72 - 28 = 0$$

Despejando a x : $x = \frac{44}{33} = \frac{4}{3}$

Sustituimos este valor en $y = -5x + 9$

$$y = -5\left(\frac{4}{3}\right) + 9 = -\frac{20}{3} + 9 = \frac{7}{3}$$

Las coordenadas del Baricentro son

$$\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

Que es lo mismo que $(1.333, 2.333)$

Como se ve en la figura 25.

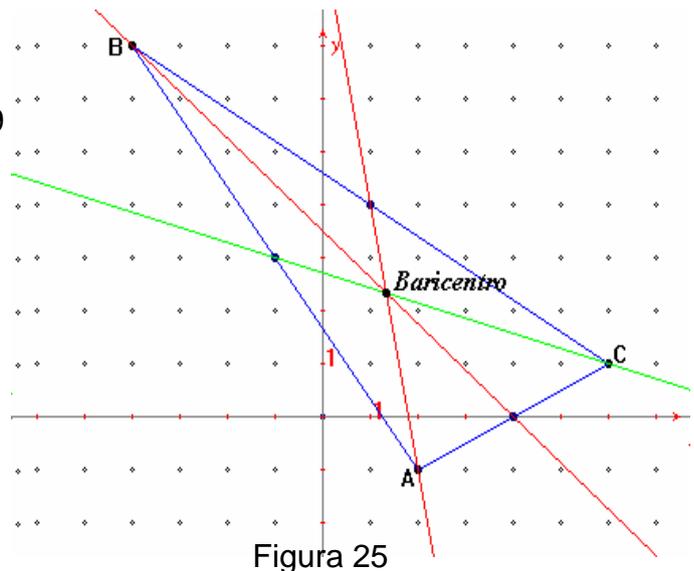


Figura 25

3.7.3 MEDIATRICES Y CIRCUNCENTRO

MEDIATRIZ: Es la recta que pasa por el **punto medio** de un segmento **perpendicular** a éste.

CIRCUNCENTRO: Es el punto de intersección de las Mediatrices y es el centro del círculo circunscrito al triángulo.

Analizaremos como encontrar las ecuaciones de las mediatrices de un triángulo con los mismo datos del triángulo ABC anterior, donde $A(2, -1)$, $B(-4, 7)$ y $C(6, 1)$.

Mediatriz del lado AB :

1º) Punto medio del lado AB .

$$M_{AB} = (-1, 3)$$

2º) Pendiente del lado AB .

$$m = \frac{7 - (-1)}{-4 - 2} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$

Como la mediatriz es perpendicular al lado AB , su pendiente debe de ser recíproca y de signo contrario:

$$m^\perp = \frac{3}{4}$$

3º) La ecuación de la Mediatriz que pasa por M_{AB} y pendiente m^\perp es:

$$y - 3 = \frac{3}{4}(x - (-1))$$

$$4y - 12 = 3x + 3$$

$$3x - 4y + 15 = 0$$

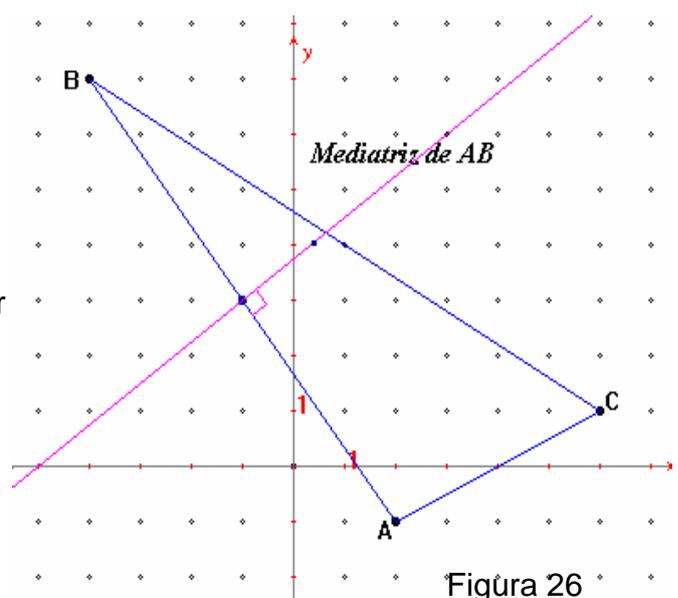


Figura 26

La ecuación de la Mediatriz del lado AB es $3x - 4y + 15 = 0$.

Mediatriz del lado BC :

1º) Punto medio del lado BC .

$$M_{BC} = (1, 4)$$

2º) Pendiente del lado BC .

$$m = \frac{7-1}{-4-6} = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$$

Como la mediatriz es perpendicular al lado BC , su pendiente debe de ser recíproca y de signo contrario:

$$m^{\perp} = \frac{5}{3}$$

3º) La ecuación de la Mediatriz que pasa por M_{BC} y pendiente m^{\perp} es:

$$y - 4 = \frac{5}{3}(x - 1)$$

$$3y - 12 = 5x - 5$$

$$5x - 3y + 7 = 0$$

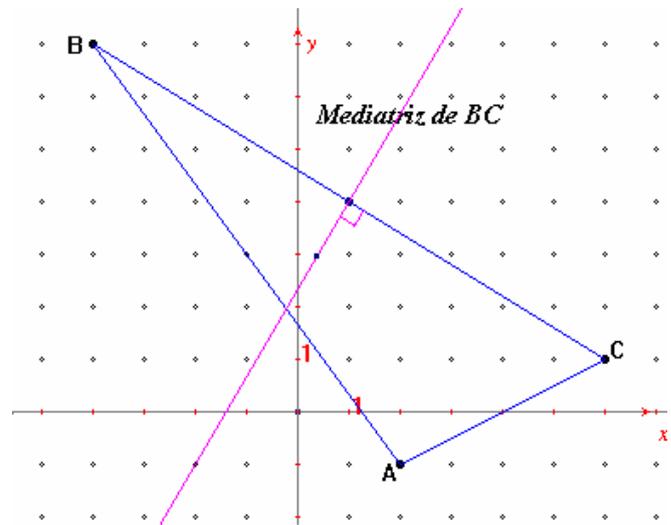


Figura 27

La ecuación de la Mediatriz del lado BC es $5x - 3y + 7 = 0$.

Mediatriz del lado AC :

1º) Punto medio del lado AC .

$$M_{AC} = (4, 0)$$

2º) Pendiente del lado AC .

$$m = \frac{-1-1}{2-6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Como la mediatriz es perpendicular al lado AC , su pendiente debe de ser recíproca y de signo contrario:

$$m^{\perp} = -2$$

3º) La ecuación de la Mediatriz que pasa por M_{AC} y pendiente m^{\perp} es:

$$y - 0 = -2(x - 4)$$

$$y = -2x + 8$$

$$2x + y - 8 = 0$$

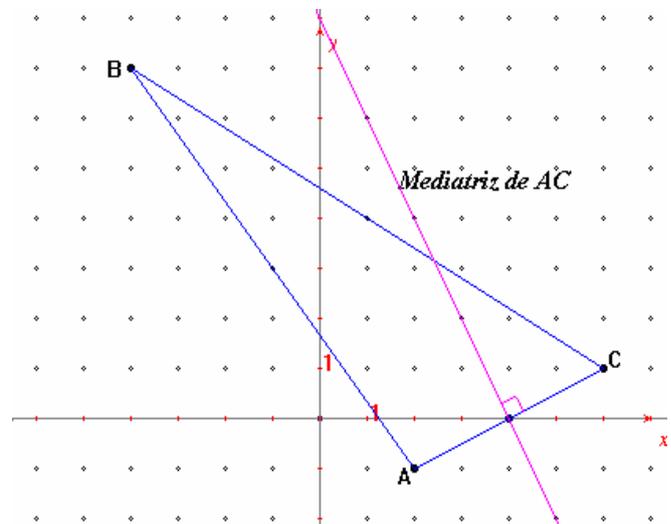


Figura 28

La ecuación de la Mediatriz del lado AC es $2x + y - 8 = 0$.

Nos falta las coordenadas del Circuncentro que es la intersección de las mediatrices del triángulo, también aquí es suficiente encontrar la intersección de dos de ellas y esto se hace resolviendo un sistema de dos ecuaciones con

dos incógnitas. Resolvamos el sistema formado por las ecuaciones de las Mediatrices de AB y de AC que son:

$$3x - 4y + 15 = 0$$

$$2x + y - 8 = 0$$

Despejando y en la segunda tenemos: $y = -2x + 8$

Sustituyendo este valor en la primera tenemos: $3x - 4(-2x + 8) + 15 = 0$

$$3x + 8x - 32 + 15 = 0$$

Resolviendo resulta:

$$x = \frac{17}{11}$$

Sustituimos este valor en $y = -2x + 8$

$$y = -2\left(\frac{17}{11}\right) + 8 = -\frac{34}{11} + 8 = \frac{54}{11}$$

Las coordenadas del Circuncentro son

$$\left(\frac{17}{11}, \frac{54}{11}\right)$$

Que es lo mismo que $(1.54, 4.9)$

Como se ve en la figura 29.

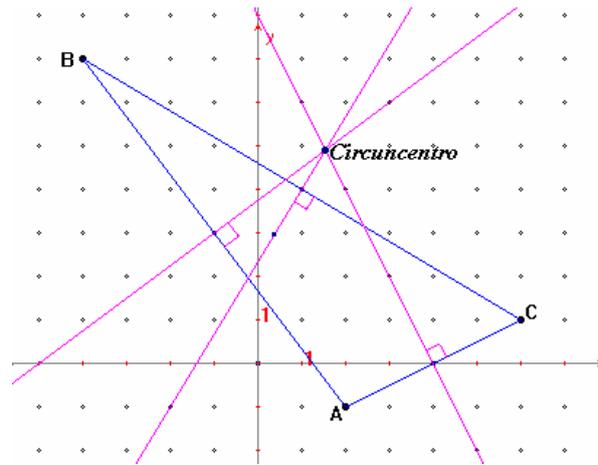


Figura 29

3.7.4 ALTURAS Y ORTOCENTRO

Recta ALTURA: Es la recta que pasa por un **vértice** del triángulo, **perpendicular** al lado opuesto a dicho vértice.

ORTOCENTRO: Es el punto de intersección de las Rectas Alturas.

Encontraremos las ecuaciones de las Rectas Alturas del mismo triángulo ABC .

Recta Altura desde el vértice $A(2, -1)$:

1º) Pendiente del lado opuesto a A , es decir del lado BC .

$$m = -\frac{3}{5}$$

Como la recta altura es perpendicular a BC , su pendiente debe de ser recíproca y de signo contrario es decir:

$$m^\perp = \frac{5}{3}$$

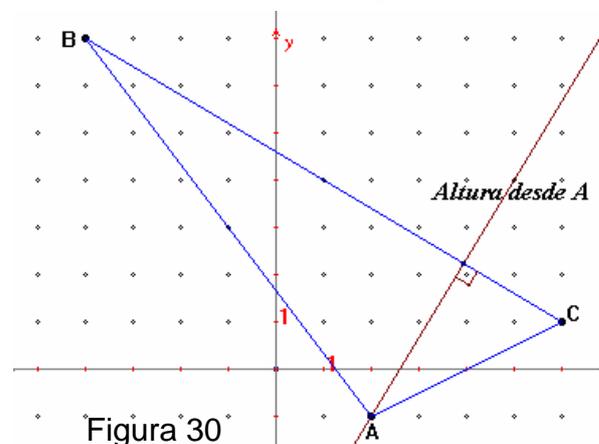


Figura 30

2º) La ecuación de la Recta Altura desde $A(2, -1)$ y pendiente $\frac{5}{3}$ es:

$$y - (-1) = \frac{5}{3}(x - 2)$$

$$3y + 3 = 5x - 10$$

$$5x - 3y - 13 = 0$$

Recta Altura desde el vértice $B(-4, 7)$:

1º) Pendiente del lado opuesto a B , es decir del lado AC .

$$m = \frac{1}{2}$$

Como la recta altura es perpendicular a AC , su pendiente debe de ser recíproca y de signo contrario es decir:

$$m^\perp = -2$$

2º) La ecuación de la Recta Altura desde $B(-4, 7)$ y con pendiente $m^\perp = -2$

$$\text{es: } y - 7 = -2(x - (-4))$$

$$y - 7 = -2x - 8$$

$$2x + y + 1 = 0$$

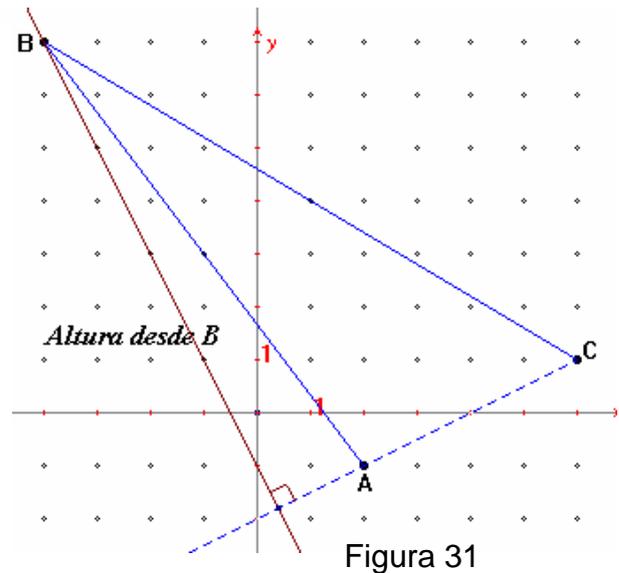


Figura 31

Recta Altura desde el vértice $C(6, 1)$:

1º) Pendiente del lado opuesto a C , es decir del lado AB .

$$m = -\frac{4}{3}$$

Como la recta altura es perpendicular a AB , su pendiente debe de ser recíproca y de signo contrario es decir:

$$m^\perp = \frac{3}{4}$$

2º) La ecuación de la Recta Altura desde $C(6, 1)$ y con pendiente m^\perp es:

$$y - 1 = \frac{3}{4}(x - 6)$$

$$4y - 4 = 3x - 18$$

$$3x - 4y - 14 = 0$$

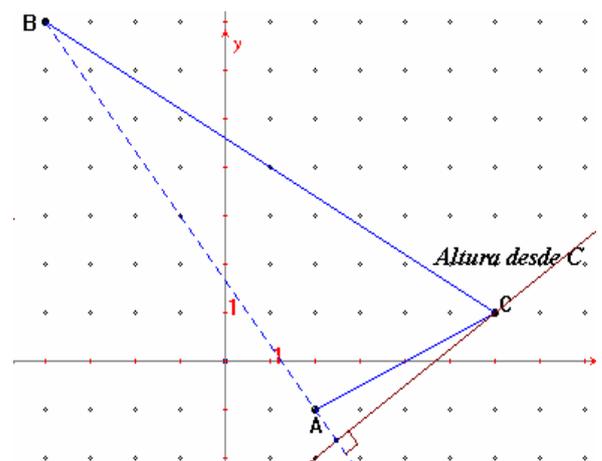


Figura 32

Por último nos falta encontrar las coordenadas del Ortocentro que es la intersección de las Rectas Alturas.

Esto se hace de forma similar a las anteriores, resolviendo el sistema de ecuaciones formado por dos de las ecuaciones que acabamos de encontrar.

Elijamos a: $5x - 3y - 13 = 0$ ecuación de la altura desde A.

$2x + y + 1 = 0$ ecuación de la altura desde B.

Despejando y en la segunda tenemos: $y = -2x - 1$

Sustituyendo este valor en la primera tenemos:

$$5x - 3(-2x - 1) - 13 = 0$$

$$5x + 6x + 3 - 13 = 0$$

Resolviendo resulta: $x = \frac{10}{11}$

Sustituimos este valor en $y = -2x - 1$

Resulta $y = -2\left(\frac{10}{11}\right) - 1 = -\frac{31}{11}$

Las coordenadas del Ortocentro son:

$$\left(\frac{10}{11}, -\frac{31}{11}\right) = (0.9, -2.8)$$

Puedes comprobarlo en la figura 33.

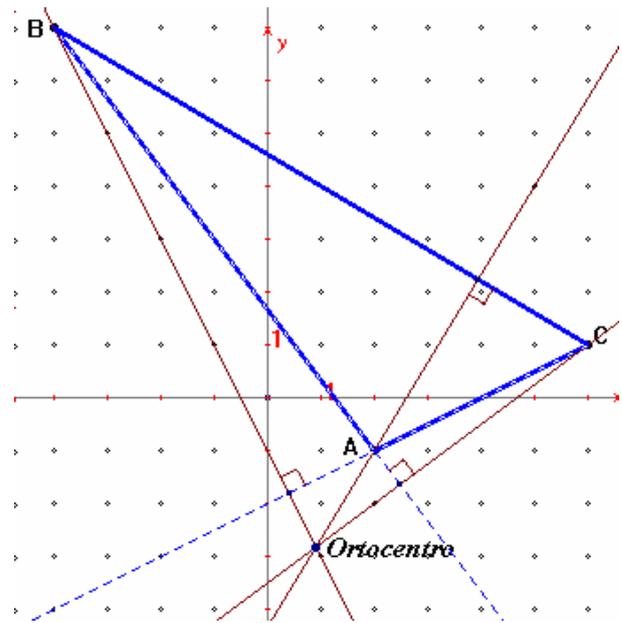


Figura 33

EJERCICIOS 3.7

1. Los puntos A , B y C son los vértices de un triángulo; para cada una de las siguientes ternas de puntos:

1) $A(-2, 1)$, $B(4, 7)$, $C(6, -3)$

2) $A(2, 4)$, $B(6, 6)$, $C(8, 0)$

encontrar:

3) $A(-4, 1)$, $B(-3, 3)$, $C(3, -3)$

- El área del triángulo.
- La ecuación de cada lado del triángulo.
- La ecuación de cada recta Mediana.
- Las coordenadas del Baricentro.
- La ecuación de cada Mediatriz.
- Las coordenadas del Circuncentro.

- g. La ecuación de cada recta Altura.
- h. Las coordenadas del Ortocentro.
- i. La medida de cada uno de sus ángulos interiores.

Para el punto (i) revisa la fórmula vista en la unidad anterior.

2. EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS DE TODA LA UNIDAD.

- 1) ¿Cuál es la pendiente de una recta que sea perpendicular a la recta $y = -2x$?
- 2) ¿Cuál es la pendiente de la recta que es paralela a la recta que pasa por los puntos $P(1, 2)$ y $Q(5, -2)$?
- 3) Una recta pasa por los puntos $R(-1, 1)$ y $S(3, 9)$, encuentra las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes.
- 4) Encuentra la ecuación de la recta que es paralela a la recta con ecuación $4x + y + 7 = 0$, y que pasa por el punto de intersección de las rectas cuyas ecuaciones son $x - 3y + 2 = 0$ y $5x + 6y - 4 = 0$.
- 5) Las ecuaciones de los lados de un triángulo son:
 $AB: 2x + 9y - 34 = 0$, $BC: 3x - 13y + 2 = 0$ y $AC: 5x - 4y + 21 = 0$.
 Encuentra las coordenadas de sus vértices y las ecuaciones de las mediatrices de sus lados.
- 6) Los vértices de un triángulo son $P(-2, 0)$, $Q(4, 0)$ y $R(0, 6)$.
 Encuentra:
 - a) Las ecuaciones de sus lados.
 - b) Su área.
 - c) Las ecuaciones de sus Medianas.
 - d) Las ecuaciones de sus Mediatrices.
 - e) Las ecuaciones de sus Alturas.
 - f) Las coordenadas de su Baricentro.
 - g) Las coordenadas de su Circuncentro,
 - h) Las coordenadas de su Ortocentro.
 - i) La medida de cada ángulo interior.

A U T O E V A L U A C I Ó N

Con esta evaluación verificarás si realmente has adquirido los conocimientos que se te han expuesto a lo largo de esta unidad y si has logrado los objetivos propuestos al principio de ésta. Para hacer esta evaluación, y los resultados que obtengas sean verdaderamente lo que aprendiste, es necesario que la resuelvas sin consultar el texto durante la solución, pero sí te recomendamos que tengas tu formulario que puedes consultar.

Esperamos que esta autoevaluación la termines en 2 horas como máximo.

1. Di cuál es la pendiente y la ordenada al origen de la recta cuya ecuación es $y = -\frac{2}{3}x + 4$ y trazar su gráfica.
2. Encuentra la ecuación de la recta que tiene pendiente $m = \frac{3}{4}$ y pasa por el punto $P(-2, 1)$.
3. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-1, 4)$ y $B(3, 2)$.
4. La ecuación de la recta que pasa por el punto $B(7, 5)$ y es perpendicular al eje X es:
5. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2, 5)$ y es paralela a la recta de ecuación $x - 2y + 6 = 0$.
6. Encuentra la ordenada al origen y la abscisa al origen de la recta que pasa por los puntos $M(-6, 10)$ y $N(3, 4)$ y escribe su ecuación en la forma simétrica.
7. Encuentra la distancia del punto $P(-3, 4)$ a la recta cuya ecuación es $2x - 5y - 15 = 0$.

Los puntos $A(-2, -4)$, $B(1, 5)$ y $C(6, 2)$ son vértices de un triángulo, en base a estos, contesta los ejercicios 8, 9 y 10.

8. Encuentra la ecuación de la mediatriz correspondiente al lado AC .
9. Encuentra la ecuación de la mediana del lado AB .
10. Encuentra la ecuación de la altura con respecto al lado AB .

ESCALA:

Para considerar que has aprendido el principal propósito de esta unidad, es necesario que resuelvas correctamente las preguntas 1, 2, 3, 4, 5 y 7 pero no has logrado todos los objetivos. Si resuelves también la 6 y la 9 entonces vas avanzando muy bien, pero si también resuelves la 8 y la 10, ¡FELICIDADES!, tienes mucho futuro. Si resuelves menos de 5 preguntas, tienes que estudiar con mayor conciencia el folleto y hacer todos sus ejercicios. **TE RECOMENDAMOS RESOLVER LOS REACTIVOS CORRESPONDIENTES A ESTA UNIDAD PARA QUE REPASES Y COMPLETE MUY BIEN TU ESTUDIO.**

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIOS 3.2

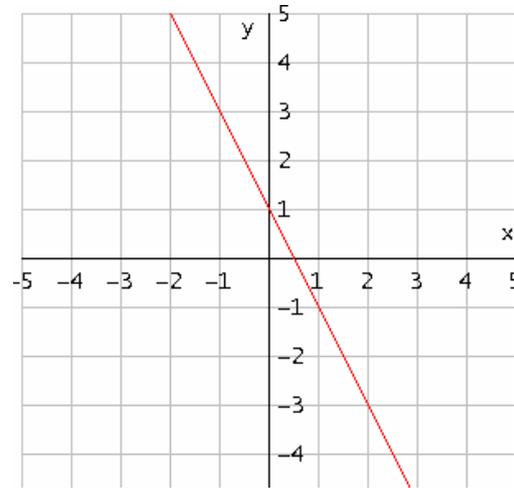
1.

a) Forma pendiente-ordenada

$$y = -2x + 1$$

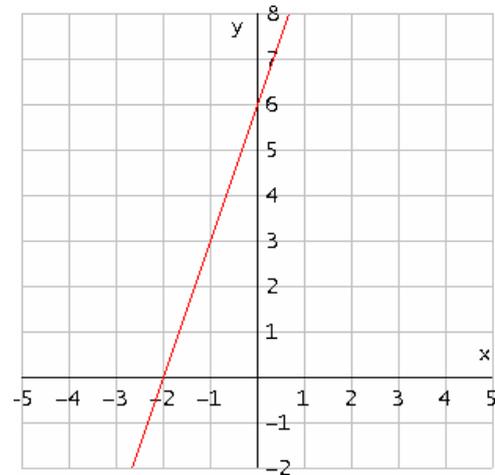
$$\text{Forma general } 2x + y - 1 = 0$$

Gráfica

b) Forma pendiente-ordenada $y = 3x + 6$

$$\text{Forma general: } 3x - y + 6 = 0$$

Gráfica

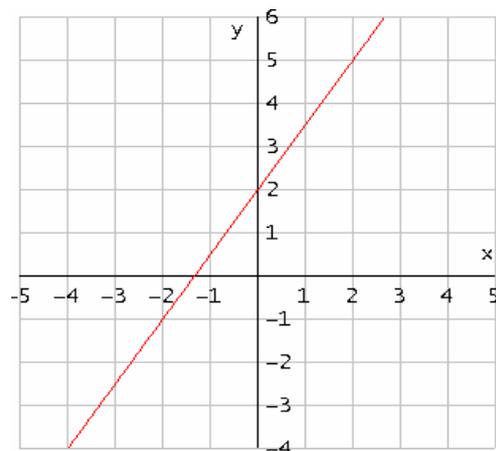


c) Forma pendiente-ordenada

$$y = \frac{3}{2}x + 2$$

$$\text{Forma general } 3x - 2y + 4 = 0$$

Gráfica:

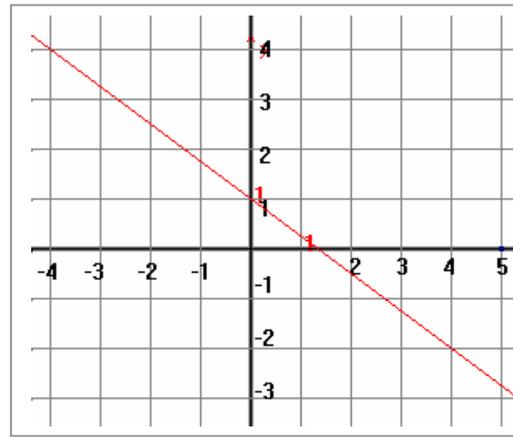


d) Forma pendiente-ordenada

$$y = -\frac{3}{4}x + 1$$

Forma general $3x + 4y - 4 = 0$

Gráfica:

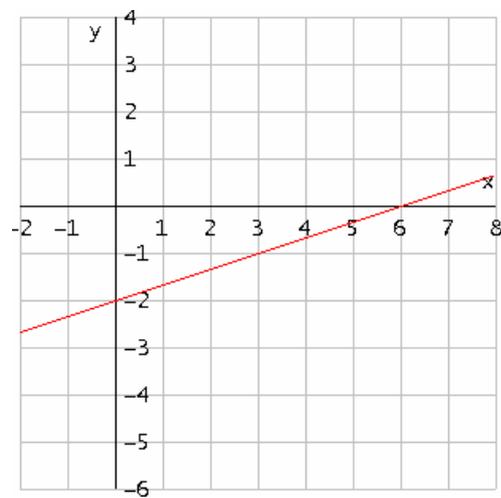


e) Forma pendiente-ordenada

$$y = \frac{x}{3} - 2$$

Forma general $x - 3y - 6 = 0$

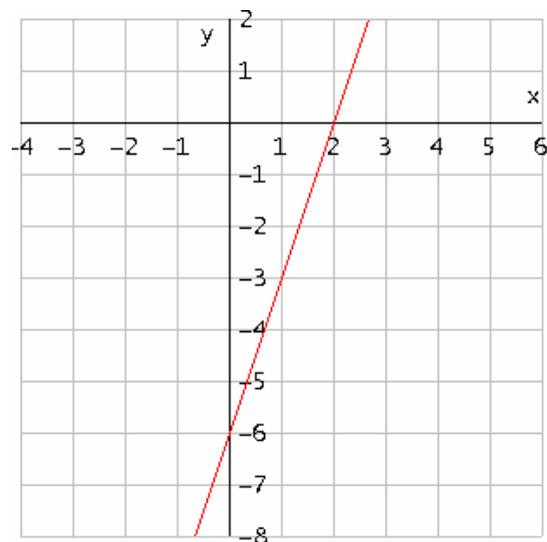
Gráfica:



2. a) La abscisa es 2.

b) La ordenada es 0.

c) La gráfica es



3. No esta sobre la recta, porque no satisface la ecuación.
4. Si esta sobre la recta ya que satisface la ecuación.

EJERCICIOS 3.3

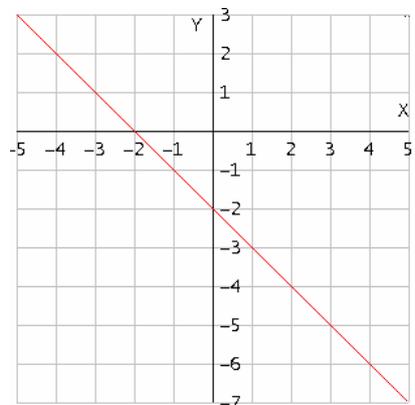
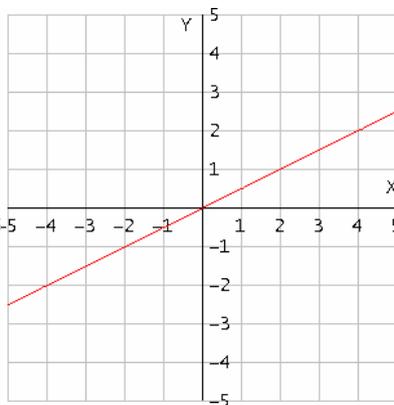
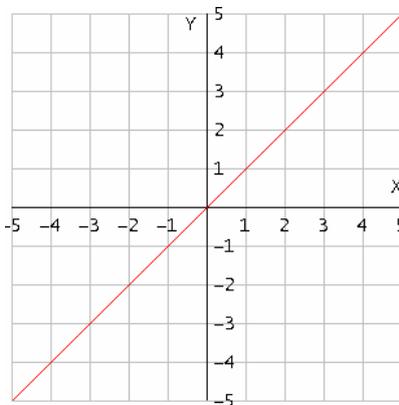
- | 1. Forma general | Forma pendiente-ordenada |
|------------------------|---|
| a) $4x - 3y + 7 = 0$ | $y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$ |
| b) $x + y - 3 = 0$ | $y = -x + 3$ |
| c) $y - 9 = 0$ | $y = 9$ |
| d) $13x + 5y + 51 = 0$ | $y = -\frac{13}{5}x - \frac{51}{5}$ |
| e) $x + 3 = 0$ | Pendiente no definida porque es una recta vertical. |
| f) $9x + 14y - 34 = 0$ | $y = -\frac{9}{14}x + \frac{34}{14}$ |
| g) $y + 2 = 0$ | $y = -2$ |
| h) $4x - 3 = 0$ | Recta vertical, pendiente no definida. |
2. a) $3x - 2y - 4 = 0$ b) la ordenada es diferente.
 3. a) $x + 2y - 5 = 0$ b) la abscisa es diferente.

EJERCICIOS 3.4

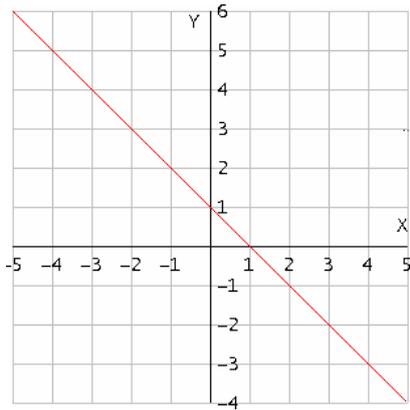
1. a) $m = 1$ $b = 0$

b) $m = 1/2$ $b = 0$

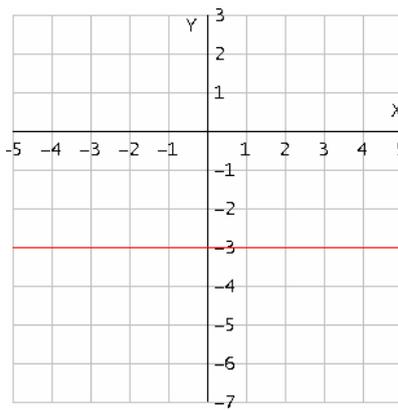
c) $m = -1$ $b = 0$



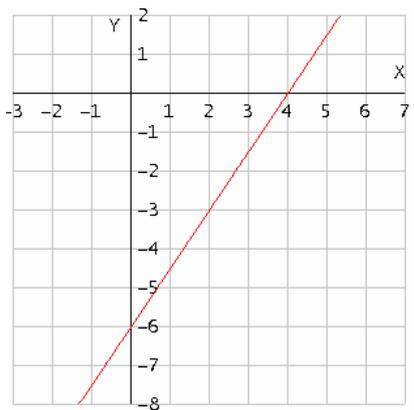
d) $m = -1$ $b = 1$



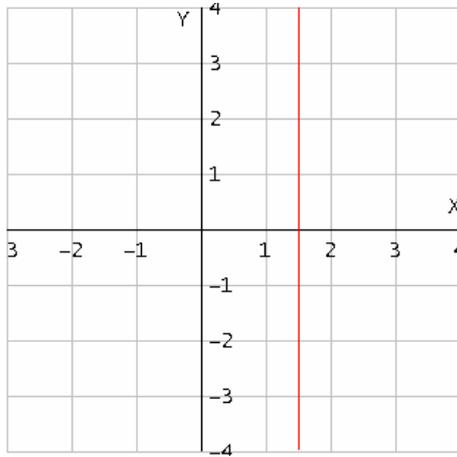
e) $m = 0$ $b = -3$



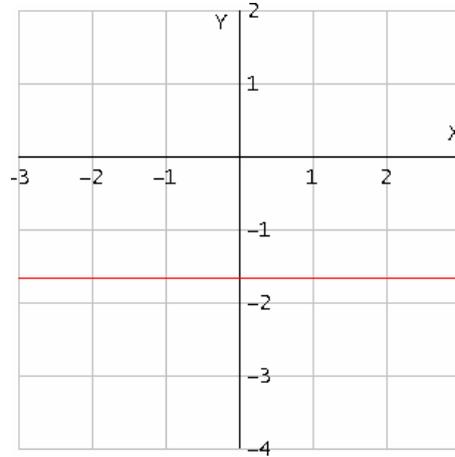
f) $m = \frac{3}{2}$ $b = -6$



g) m y b indeterminadas



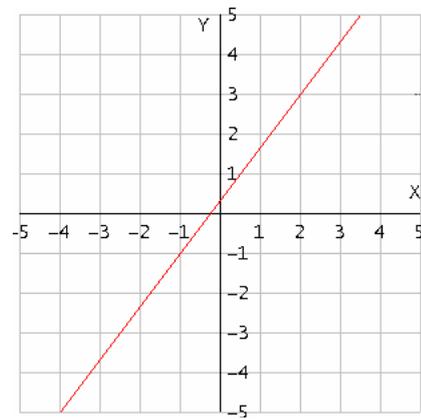
h) $m = 0$ $b = -5/3$



2. a)

x	0	-1	-1/4	2	2	-3	-1
y	1/3	-1	0	3	3	-11/3	-1

b)



c) $m = 4/3$

3. a) $(1, -2)$ y $(3, -9)$ 3. b) Al eje y en $(0, 3/2)$, al eje x en $(3/7, 0)$

4. sus pendientes son iguales.

EJERCICIOS 3.5

1. a) $m = 1/3, b = 3$ b) $m = 1/3, b = 5/3$ c) $m = 5/2, b = 0$ d) $m = 2/5, b = 3/5$
 e) $m = 2, b = -7$ f) $m = 0, b = -3$ g) $m = -1/2, b = 4/3$
 h) m indeterminada, b no tiene.

2. a) perpendiculares b) perpendiculares c) ni paralelas ni perpendiculares
 d) perpendiculares e) paralelas.

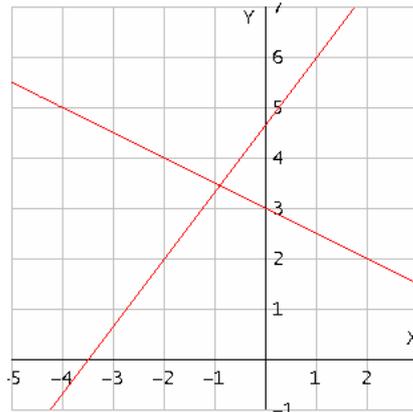
3. $5x + 9y - 48 = 0$

4. $3x - 4y - 29 = 0$

5. $3x + 5y - 23 = 0$

6. $x + 4y + 33 = 0$

7. a)



7. b) $P(-1, 3.5)$ aproximadamente.

c) $P(-10/11, 38/11)$, no son iguales las dos respuestas ya que en la gráfica no se pueden encontrar las coordenadas exactas.

8. a) $(4, 3)$ b) $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ c) $(5, 7)$ d) $(-2, -3)$

9. a) $-x + 2y + 2 = 0$ b) $5x - 4y + 20 = 0$ c) $5x + 7y + 35 = 0$

d) $7x - 9y - 63 = 0$

10. a) $a = -3/7, b = 3/2$ b) $a = 5, b = 2$ c) $a = 8/3, b = 8$

d) $a = -7/5, b = 7$ e) $a = 4/3, b = 4$ f) $a = 6, b = 42$

EJERCICIOS 3.6

1.- a) $d = 7$ u b) $d = 6.5$ u c) $d = 5.5$ u d) $d = 134/13$ u e) $d = 66/13$ u

f) $d = 6/5$ u g) $d = 3$ u h) $d = 2$ u i) $d = 3$ u j) $d = 2\sqrt{5} = 4.47$ u

2.- a) $d = 7.21$ u b) $d = 0.38$ u c) $d = 3$ u d) $d = 2$ u e) $d = 2.23$ u

f) $d = 3.98$ u g) $d = 1$ u h) $d = 1.5$ u i) $d = 2.32$ u

EJERCICIOS 3.7

- 1) a) $36 u^2$ b) AB: $x - y + 3 = 0$, BC: $5x + y - 27 = 0$, AC: $x + 2y = 0$
 c) desde A: $x - 7y + 9 = 0$, desde B: $4x - y - 9 = 0$, desde C: $7x + 5y - 27 = 0$
 d) Baricentro $(\frac{8}{3}, \frac{5}{3})$
 e) de AB: $x + y - 5 = 0$, de BC: $x - 5y + 5 = 0$, de AC: $2x - y - 5 = 0$
 f) Circuncentro $(\frac{10}{3}, \frac{5}{3})$
 g) desde A: $x - 5y + 7 = 0$, desde B: $2x - y - 1 = 0$, desde C: $x + y - 3 = 0$,
 h) Ortocentro $(\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$
 i) $\sphericalangle ABC = 56.3^\circ$ $\sphericalangle BAC = 71.57^\circ$ $\sphericalangle ACB = 52.13^\circ$

- 2) a) $14 u^2$ b) AB: $x - 2y + 6 = 0$, BC: $3x + y - 24 = 0$, AC: $2x + 3y - 16 = 0$
 c) desde A: $x + 5y - 22 = 0$, desde B: $4x - y - 18 = 0$, de C: $5x + 4y - 40 = 0$
 d) Baricentro $(\frac{16}{3}, \frac{10}{3})$
 e) de AB: $2x + y - 13 = 0$, de BC: $x - 3y + 2 = 0$, de AC: $3x - 2y - 11 = 0$
 f) Circuncentro $(\frac{37}{7}, \frac{17}{7})$
 g) desde A: $x - 3y + 10 = 0$, desde B: $3x - 2y - 6 = 0$, de C: $2x + y - 16 = 0$,
 h) Ortocentro $(\frac{38}{7}, \frac{36}{7})$
 i) $\sphericalangle ABC = 81.87^\circ$ $\sphericalangle BAC = 60.26^\circ$ $\sphericalangle ACB = 37.87^\circ$

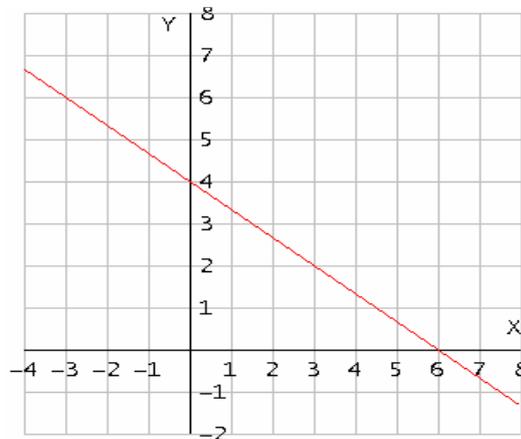
- 3) a) $9 u^2$ b) AB: $2x - y + 9 = 0$, BC: $x + y = 0$, AC: $4x + 7y + 9 = 0$
 c) desde A: $x + 4y = 0$, desde B: $8x + 5y + 9 = 0$, de C: $10x + 13y + 9 = 0$
 d) Baricentro $(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$
 e) de AB: $2x + 4y - 1 = 0$, de BC: $x - y = 0$, de AC: $14x - 8y - 1 = 0$
 f) Circuncentro
 g) desde A: $x - y + 5 = 0$, desde B: $7x - 4y + 33 = 0$, de C: $x + 2y + 3 = 0$
 h) Ortocentro $(-\frac{13}{3}, \frac{2}{3})$
 i) $\sphericalangle ABC = 71.57^\circ$ $\sphericalangle BAC = 93.17^\circ$ $\sphericalangle ACB = 15.26^\circ$

2. EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

- 1) $\frac{1}{2}$ 2) -1 3) $(-1.5, 0)$ y $(0, 3)$ 4) $12x + 3y - 2 = 0$
- 5) Vértices $A(-1, 4)$, $B(8, 2)$ y $C(-5, -1)$, Mediatriz de AB: $18x - 4y - 51 = 0$
 Mediatriz de BC: $13x + 3y - 21 = 0$ y Mediatriz de AC: $8x + 10y + 9 = 0$
- 6) a) PQ: $y = 0$ QR: $3x + 2y - 12 = 0$ PR: $3x - y + 6 = 0$
 b) Área = $18 u^2$
 c) Mediana desde P: $3x - 4y + 6 = 0$, de Q: $3x + 5y - 12 = 0$ y de R:
 $6x + y - 6 = 0$
 d) Mediatriz de PQ: $x - 1 = 0$, de QR: $2x - 3y + 5 = 0$, de PR: $x + 3y - 8 = 0$
 e) Altura desde: P: $2x - 3y + 4 = 0$, de Q: $x + 3y - 4 = 0$, de R: $x = 0$
 f) Baricentro $(0.67, 2)$
 g) Circuncentro $(1, 2.33)$
 h) Ortocentro $(0, 1.33)$
 i) $\sphericalangle P = 71.6^\circ$ $\sphericalangle Q = 56.3^\circ$ $\sphericalangle R = 52.1^\circ$

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

1. $m = -\frac{2}{3}$, $b = 4$



2. $3x - 4y + 10 = 0$ 3. $x + 2y - 7 = 0$ 4. $x - 7 = 0$ 5. $x - 2y + 8 = 0$

6. Ordenada 6 y Abcisa 9, la ecuación en forma simétrica es: $\frac{x}{9} + \frac{y}{6} = 1$

7. $d = 41/\sqrt{29}$ 8. $4x + 3y - 5 = 0$ 9. $3x - 13y + 8 = 0$

10. $x + 3y - 12 = 0$

REACTIVOS DE LA UNIDAD 3: LA RECTA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA

Para complementar tu estudio sobre esta unidad debes de resolver los siguientes reactivos ya que tu examen extraordinario puede estar formado con preguntas muy parecidas a las que te presentamos a continuación.

Cada reactivo tiene asignada una letra que corresponde a su clasificación según el grado de dificultad, F: fácil, R: regular y D: difícil.

Te recomendamos que los clasificados como D los dejes al final y si es necesario pide ayuda a algún profesor, esperamos no tengas mayor problema con los ejercicios marcados con R y menos con los F.

1(F).- Considera la ecuación $2xy + 4x + 3y = 24$. ¿Cuál de los siguientes puntos **no** es un punto de la gráfica de esta ecuación?

- a) A(0 , 8) b) B(6 , 0) c) C(1 , 4) d) D(2 , 3) e) E(- 1 , 28)

2(F).- Considera la ecuación $x^2 - 3y - 2 = -2y^2 - 2x + 3$. ¿Cuál de los siguientes puntos es un punto de la gráfica de esta ecuación?

- a) A(0 , 1) b) B(1 , 2) c) C(1 , 0) d) D(2 , 1) e) E(2 , 2)

3(F).- ¿Para cuál de las siguientes ecuaciones el punto A(2 , 1) es un punto de su gráfica?

- a) $y = 2x - 4$ b) $3x^2 - 4y = 5$ c) $x + 2y - 4 = 0$
 d) $(x + 2)^2 = 2y + 5$ e) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 5$

4(F).- ¿Cuál de las siguientes ecuaciones tiene como gráfica una recta?

- a) $2x^2 + y - 5 = 0$ b) $2xy + 3y = 16$ c) $y = 2xy + 3$
 d) $2x - 3y - 4 = 0$ e) $2x - 3y^3 = 6$

5(F).- ¿Cuál de las siguientes ecuaciones **no** tiene como gráfica una recta?

a) $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$ b) $x + y + 2 = 0$ c) $y = -3x + 5$
 d) $y - 4 = \frac{4-3}{3-1}(x-2)$ e) $x + 3xy - 5 = 0$

6(D).- Considera la recta que pasa por los puntos A(-1 , 2) y B(2 , 8). ¿Cuál de los siguientes puntos **no** pertenece a esta recta?.

a) L(0 , 4) b) M(- 4 , -4) c) N(-10 , -16) d) P(20 , 42) e) L(30 , 64)

7(D).- Considera la recta que pasa por los puntos A(-12 , 46) y B(10 , -20). ¿Cuál de los siguientes puntos pertenece a esta recta?.

a) L(0 , 8) b) M (8 , - 14) c) N(-4 , 20) d) P (2 , 5) e) Q (-6 , 30)

8(F).- $y = -3x + 7$ es una ecuación que tiene como gráfica una recta. ¿Cuál de los siguientes puntos es parte de esta recta?.

a) P(- 4 , - 5) b) Q(- 1 , 4) c) R(2 , 1) d) S(10 , -37) e) T(-10 , - 23)

9(F).- $7x - 2y + 11 = 0$ es la ecuación de una recta. ¿Cuál de los siguientes puntos **no** pertenece a esta recta?.

a) A(1 , 9) b) B(- 1 , 2) c) C(0 , 5) d) D(- 3 , - 5) e) E(3 , 16)

10(F).- Considera la recta que pasa por los puntos A(1 , - 3) y B(2 , 2). ¿Cuál es el valor de su pendiente?

a) - 3 b) 4 c) 5 d) - 2 e) - 4

11(R).- Considera la recta que pasa por los puntos $A(3, -4)$ y $B(-6, 2)$. ¿Cuáles son las coordenadas del punto de la recta que está sobre el eje de las abscisas?.

- a) $(1, 0)$ b) $(-2, 0)$ c) $(-3, 0)$ d) $(2, 0)$ e) $(3, 0)$

12(R).- Considera la recta que pasa por los puntos $A(3, -4)$ y $B(-6, 2)$. ¿Cuáles son las coordenadas del punto de la recta que está sobre el eje de las ordenadas?.

- a) $(0, 1)$ b) $(0, -2)$ c) $(0, -3)$ d) $(0, 2)$ e) $(0, 3)$

13(F).- Considera la recta que pasa por los puntos $A(-8, 0)$ y $B(0, 4)$. ¿Cuál es el valor de la ordenada al origen de esta recta?.

- a) -8 b) -2 c) -4 d) 0 e) 4

14(F).- Considera la recta que pasa por los puntos $A(-2, 0)$ y $B(0, 2)$. ¿Cuál es el valor de la abscisa al origen de esta recta?.

- a) 2 b) -1 c) -2 d) 0 e) -4

15(R).- $y = 3x - 6$ es la ecuación de la recta que tiene pendiente 3 y ordenada al origen -6 . ¿Cuánto es el valor de la abscisa al origen de esta recta?.

- a) 1 b) -1 c) -2 d) 2 e) 0

16(R).- $\frac{x}{2} + \frac{y}{8} = 1$ es la ecuación de la recta que tiene abscisa al origen 2 y ordenada al origen 8 . ¿Cuál es el valor de la pendiente de esta recta?.

- a) 4 b) 6 c) 10 d) -6 e) -4

17(R).- $\frac{x}{-4} + \frac{y}{12} = 1$ es la ecuación de la recta que tiene abscisa al origen -4 y ordenada al origen 12 . ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es también la ecuación de esta recta?

- a) $y = -3x + 12$ b) $y = 3x + 12$ c) $y = 8x - 4$ d) $y = 8x + 12$ e) $y = 3x + 1$

18(R).- $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$ es la ecuación de la recta que tiene abscisa al origen 5 y ordenada al origen 3 . ¿Cuál de las siguientes ecuaciones tiene como gráfica la misma recta?

- a) $x + y - 15 = 0$ b) $5x + 3y - 1 = 0$ c) $3x + 5y - 15 = 0$
 d) $3x + 5y - 1 = 0$ e) $5x + 3y - 15 = 0$

19(F).- $8x + 2y - 2 = 0$ es la ecuación de una recta. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es también la ecuación de esta recta.

- a) $y = -4x + 1$ b) $y = 4x + 2$ c) $y = -4x + 2$ d) $y = -8x - 4$ e) $y = 4x - 1$

20(F).- La ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(4, 1)$ y $B(6, 7)$ es:

- a) $y - 4 = \frac{7-1}{6-4}(x-1)$ b) $y - 1 = \frac{7-1}{6-4}(x-4)$ c) $y - 1 = \frac{6-4}{7-1}(x-4)$
 d) $y - 7 = \frac{6-4}{7-1}(x-6)$ e) $y - 6 = \frac{7-1}{6-4}(x-7)$

21(D).- Considera la recta que pasa por los puntos $A(1, 3)$ y $B(-1, 9)$. ¿Cuál es la ecuación que tiene como gráfica esta recta?

- a) $\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1$ b) $\frac{x}{3} + \frac{y}{9} = 1$ c) $\frac{x}{3} + \frac{y}{-9} = 1$ d) $\frac{x}{4} + \frac{y}{8} = 1$ e) $\frac{x}{5} + \frac{y}{-2} = 1$

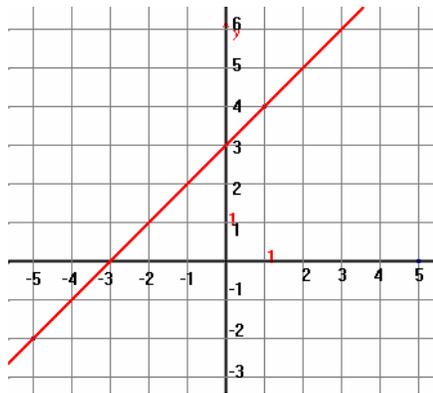
22(F).- La ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-1, 2)$ y $B(1, 6)$ es:

- a) $y = 2x - 1$ b) $y = 6x + 1$ c) $y = 2x + 4$ d) $y = -x + 12$ e) $y = -2x - 4$

23(F).- Considera la recta que pasa por los puntos $A(1, 1)$ y $B(-2, 3)$. ¿Cuál es la ecuación de esta recta?.

- a) $3x + 2y - 5 = 0$ b) $x - 5y + 4 = 0$ c) $-5x + y - 4 = 0$
 d) $2x + 3y - 5 = 0$ e) $x + y - 2 = 0$

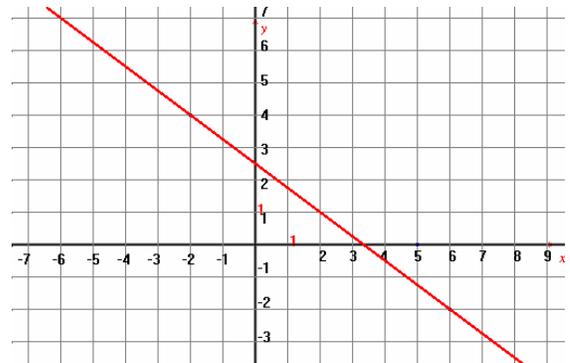
24(R).- La gráfica de una recta es la siguiente



La ecuación que la representa es:

- a) $x + y - 3 = 0$ b) $x - y - 3 = 0$ c) $3x + y - 1 = 0$
 d) $x - y + 3 = 0$ e) $x + 2y - 3 = 0$

25(R).- La gráfica de una recta es la siguiente



La ecuación que la representa es:

a) $2x + 3y - 7 = 0$

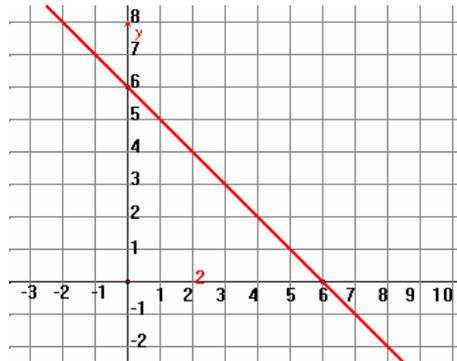
b) $3x - 4y + 2 = 0$

c) $3x + 4y - 10 = 0$

d) $2x - 3y + 7 = 0$

e) $x + y - 6 = 0$

26(R).- La gráfica de una recta es



Su ecuación está representada por

a) $2x + 3y - 7 = 0$

b) $3x - 4y + 2 = 0$

c) $3x + 4y - 10 = 0$

d) $2x - 3y + 7 = 0$

e) $x + y - 6 = 0$

27(F).- $5x - 2y + 20 = 0$ es una ecuación que tiene como gráfica una recta. ¿Cuál es el valor de la abscisa al origen de esta recta?.

a) 5

b) -4

c) -2

d) 20

e) 10

28(F).- La ecuación de una recta es $x + 4y - 8 = 0$. ¿Cuánto es el valor de su ordenada al origen?.

a) 1

b) 4

c) -8

d) -2

e) 2

29(R).- $6x + 2y - 5 = 0$ es una ecuación que tiene como gráfica una recta. ¿Cuál es el valor de la pendiente de esta recta?.

a) 3

b) 4

c) -3

d) -4

e) 12

30(F).- $y = 4x - 8$ es la ecuación de una recta. ¿Cuál es el valor de la pendiente de esta recta?

- a) 4 b) - 8 c) 2 d) - 2 e) - 4

31(F).- $y = - 2x + 6$ es la ecuación de una recta. ¿Cuál es el valor de su ordenada al origen?

- a) 6 b) - 2 c) 4 d) - 12 e) - 3

32(R).- La ecuación de una recta es $y = 3x + 6$. ¿Cuál es el valor de su abscisa al origen?

- a) 3 b) 6 c) 2 d) - 2 e) - 3

33(F).- La ecuación de una recta es $\frac{x}{2} + \frac{y}{8} = 1$. ¿Cuál es el valor de su ordenada al origen?

- a) 2 b) 4 c) - 2 d) 8 e) - 4

34(F).- La ecuación de una recta es $\frac{x}{-3} + \frac{y}{6} = 1$. ¿Cuál es el valor de su abscisa al origen?

- a) 3 b) 6 c) - 2 d) - 3 e) - 6

35(F).- Dada la ecuación de la recta $12x - 6y - 3 = 0$. ¿Cuáles son las coordenadas del punto por donde corta al eje de las abscisas?

- a) $(0, \frac{1}{4})$ b) $(\frac{1}{4}, 0)$ c) $(\frac{1}{2}, 0)$ d) $(0, -3)$ e) $(0, -\frac{1}{2})$

36(F).- Dada la ecuación de la recta $12x - 6y - 3 = 0$. ¿Cuáles son las coordenadas del punto que tiene su ordenada al origen?

- a) $(0, \frac{1}{4})$ b) $(\frac{1}{4}, 0)$ c) $(\frac{1}{2}, 0)$ d) $(0, -3)$ e) $(0, -\frac{1}{2})$

37(F).- ¿Cuál de las siguientes ecuaciones tiene como pendiente $\frac{3}{4}$?

- a) $4x - 3y + 24 = 0$ b) $4x + 3y + 6 = 0$ c) $3x - 4y - 8 = 0$
 d) $3x + 4y + 32 = 0$ e) $x - 3y + 9 = 0$

38(F).- ¿Cuál de las siguientes ecuaciones su ordenada al origen es 8?

- a) $y = \frac{4}{3}x + 8$ b) $y = -\frac{4}{3}x + 2$ c) $y = \frac{3}{4}x - 2$ d) $y = -\frac{3}{4}x - 8$ e) $y = \frac{1}{3}x + 3$

39(R).- La ecuación de una recta es $\frac{x}{4} + \frac{y}{8} = 1$. ¿Cuál es el valor de su pendiente?

- a) 4 b) 8 c) 2 d) -4 e) -2

40(F).- Considera la recta que pasa por el punto $A(2, -4)$ y su pendiente es 3.

¿Cuál es la ecuación de esta recta?

- a) $y = 3x - 4$ b) $y = 3x + 2$ c) $y = 3x - 10$ d) $y = 3x - 2$ e) $y = 3x - 8$

41(R).- ¿Cuál es la ecuación de la recta que tiene pendiente 4 y abscisa al origen 2?

- a) $y = 4x + 2$ b) $y = 4x + 4$ c) $y = 4x - 8$ d) $y = 4x - 2$ e) $y = 4x + 8$

42(F).- ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-1, 1)$ y tiene pendiente 2?

- a) $y = 2x + 3$ b) $y = 2x + 1$ c) $y = 2x - 1$ d) $y = 2x$ e) $y = 2x + 2$

43(R).- La ecuación de la recta que tiene ordenada al origen 3 y abscisa al origen 4 es:

- a) $3x + 4y + 7 = 0$ b) $3x + 4y - 12 = 0$ c) $x + y + 12 = 0$
 d) $3x + 4y - 1 = 0$ e) $x + y + 7 = 0$

44(R).- ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto A(-2 , 6) y su ordenada al origen es 4?

- a) $y = -x - 4$ b) $y = -x + 4$ c) $y = -x + 8$ d) $y = -2x + 4$ e) $y = -x - 8$

45(R).- ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto A(- 1 , 5) y su abscisa al origen es 2?

- a) $3x + y - 2 = 0$ b) $3x + 5y - 6 = 0$ c) $5x + 3y - 6 = 0$
 d) $3x + 5y - 10 = 0$ e) $5x + 3y - 10 = 0$

46(F).- Considera las rectas que tienen por ecuación $y = -2x + 8$, $y = 3x - 2$.
 ¿Cuáles son las coordenadas del punto de intersección de estas rectas.

- a) (1 , 6) b) (1 , 1) c) (8 , -2) d) (2 , 4) e) (4 , 2)

47(D).- El área del triángulo cuyos vértices son A(1 , 2), B(5 , 6) y C(3 , -7) es:

- a) $12 u^2$ b) $20 u^2$ c) $22 u^2$ d) $18u^2$ e) $21u^2$

48(F).- ¿Cuál de las siguientes rectas es paralela a la recta que tiene por ecuación $y = 2x + 8$?

- a) $y = x + 8$ b) $y = 2x - 8$ c) $y = -2x + 8$ d) $y = -0.5x - 4$ e) $y = -2x - 8$

49(F).- La ecuación de la recta que es paralela a la recta con ecuación $2x - y + 2 = 0$ es:

- a) $2x + y - 2 = 0$ b) $x - 2y + 2 = 0$ c) $x + 2y - 10 = 0$
 d) $6x - 3y + 7 = 0$ e) $x - y + 2 = 0$

50(R).- ¿Cuál de las siguientes rectas es paralela a la recta que pasa por los puntos $A(-1, 1)$ y $B(4, 11)$?

- a) $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$ b) $\frac{x}{-2} + \frac{y}{4} = 1$ c) $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-4} = 1$ d) $2x + 3y - 4 = 0$ e) $y = -2x + 1$

51(F).- La ecuación de la recta que es perpendicular a la recta con ecuación $x - 2y + 3 = 0$ es:

- a) $2x - y + 2 = 0$ b) $4x + 2y - 5 = 0$ c) $x + 2y - 10 = 0$
 d) $6x - 3y + 7 = 0$ e) $x - 2y + 2 = 0$

52(R).- ¿Cuál de las siguientes rectas es perpendicular a la recta que tiene por ecuación $y = -2x + 4$?

- a) $x - 2y + 4 = 0$ b) $y = 2x - 1$ c) $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$ d) $\frac{x}{2} + \frac{y}{-2} = 1$ e) $2x + 3y = 1$

53(R).- ¿Cuál de las siguientes rectas es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $A(2, 4)$ y $B(-6, 8)$?

- a) $y = x + 4$ b) $y = 2x - 5$ c) $y = \frac{1}{2}x + 4$ d) $y = -\frac{1}{2}x + 3$ e) $y = -2x + 3$

54(R).- De las siguientes ecuaciones de líneas rectas, ¿cuál pasa por el origen y es perpendicular a la recta con ecuación $x + 2y - 4 = 0$?

- a) $2x + y = 0$ b) $2x - y = 2$ c) $4x - 2y = 0$ d) $x - 2y = 0$ e) $4x - 2y = 4$

55(F).- Considera la recta con ecuación $y = -3x + 5$. ¿Cuál de las siguientes rectas es perpendicular a ésta y pasa por el punto A (3 , 3)?.

a) $y = \frac{1}{3}x + 2$ b) $y = -\frac{1}{3}x + 2$ c) $y = \frac{1}{3}x - 2$ d) $y = -\frac{1}{3}x - 2$ e) $y = \frac{1}{3}x + 3$

56(F).- La ecuación de una recta que pasa por el origen es:

a) $2x + 2 = 0$ b) $x + 2y - 5 = 0$ c) $2y - 10 = 0$
d) $x - 3y + 1 = 0$ e) $x - 2y = 0$

57(F).- La ecuación de una recta vertical es:

a) $2x + 2 = 0$ b) $x + 2y - 5 = 0$ c) $2y - 10 = 0$
d) $x - 3y + 1 = 0$ e) $x - 2y = 0$

58(F).- La ecuación de una recta horizontal es:

a) $2x + 2 = 0$ b) $x + 2y - 5 = 0$ c) $2y - 10 = 0$
d) $x - 3y + 1 = 0$ e) $x - 2y = 0$

59(F).- La ecuación de una recta vertical que pasa por el punto (3 , 5) es:

a) $y - 3 = 0$ b) $x + 5 = 0$ c) $2x - 6 = 0$
d) $5x - 3y = 0$ e) $3y - 15 = 0$

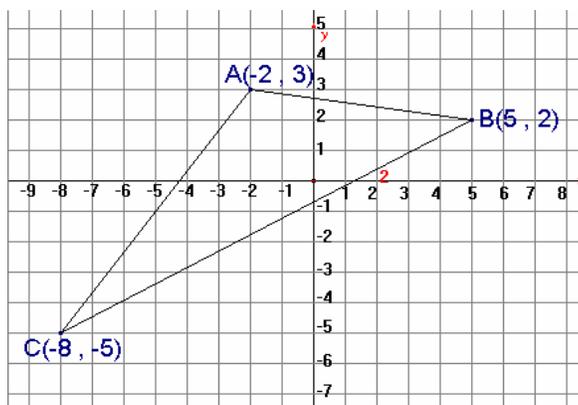
60(F).- La ecuación de una recta horizontal que pasa por el punto (3 , 5) es:

a) $y - 3 = 0$ b) $x + 5 = 0$ c) $2x - 6 = 0$
d) $5x - 3y = 0$ e) $3y - 15 = 0$

61(D).- Considera la recta R_1 que pasa por los puntos $A(-2, 13)$ y $B(6, 3)$ y la recta R_2 que tiene por ecuación $y = x + 6$. ¿Cuánto miden los ángulos que se forman al cruzarse estas rectas?

- a) 45° y 135° b) 1.5° y 178.5° c) 92.95° y 87.05°
 d) 83.66° y 96.34° e) 90° y 90°

Considera el triángulo cuyos vértices son $A(-2, 3)$, $B(5, 2)$ y $C(-8, -5)$ para responder las preguntas 46, 47, 48 y 49



62(R).- ¿Cuánto mide el ángulo del triángulo cuyo vértice es A?

- a) 36.43° b) 68.07° c) 118.74° d) 152.41° e) 24.83°

63(R).- ¿Cuánto mide el ángulo del triángulo cuyo vértice es B?

- a) 36.43° b) 68.07° c) 118.74° d) 152.41° e) 24.83°

64(R).- ¿Cuánto mide el ángulo del triángulo cuyo vértice es C?

- a) 36.43° b) 68.07° c) 118.74° d) 152.41° e) 24.83°

65(D).- ¿Cuánto es el área del triángulo ABC?

- a) $31u^2$ b) $30u^2$ c) $29u^2$ d) $32u^2$ e) $33u^2$

66(D).- ¿Cuál es valor del área del cuadrilátero que tiene como vértices los puntos $A(-1, 1)$, $B(3, 7)$, $C(6, 0)$, $D(0, -2)$?

- a) $31u^2$ b) $33u^2$ c) $29u^2$ d) $32u^2$ e) $30u^2$

67(R).- ¿Cuál es la distancia del punto $(2, 1)$ a la recta con ecuación

$$5x + 12y + 4 = 0?$$

- a) 2.92 u b) 2.53 u c) 1 u d) 6.3 u e) 2 u

68(R).- ¿Cuál es la distancia del punto $(-3, 2)$ a la recta con ecuación

$$7x + 24y + 5 = 0?$$

- a) 5.74 u b) 2.96 u c) 1.28 u d) 4 u e) 9.39 u

69(R).- ¿Cuál es la distancia entre las rectas paralelas $3x - 4y + 16 = 0$ y

$$3x - 4y - 19 = 0 ?$$

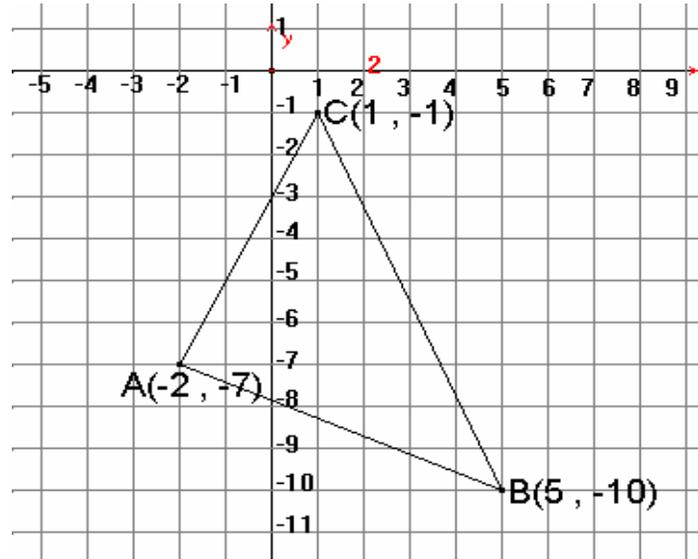
- a) 3 u b) 7 u c) 4 u d) 5 u e) 3.63 u

70(R).- ¿Cuál es la distancia entre las rectas paralelas $12x - 5y + 5 = 0$ y

$$12x - 5y - 35 = 0 ?$$

- a) 3.07 u b) 7 u c) 4.8 u d) 28 u e) 6.85 u

Considera el triángulo cuyos vértices son $A(-2, -7)$, $B(5, -10)$ y $C(1, -1)$ para responder las preguntas 71 a la 86.



71(D).- ¿Cuál es la ecuación de la mediana cuyo vértice es A?

- a) $3x - 10y - 64 = 0$ b) $7x - 3y - 36 = 0$ c) $15x + y - 14 = 0$
d) $12x + 11y + 50 = 0$ e) $2x + 4y + 17 = 0$

72(D).- ¿Cuál es la ecuación de la mediana cuyo vértice es B?

- a) $3x - 10y - 64 = 0$ b) $7x - 3y - 36 = 0$ c) $15x + y - 14 = 0$
d) $12x + 11y + 50 = 0$ e) $2x + 4y + 17 = 0$

73(D).- ¿Cuál es la ecuación de la mediana cuyo vértice es C?

- a) $3x - 10y - 64 = 0$ b) $7x - 3y - 36 = 0$ c) $2x + 4y + 17 = 0$
d) $12x + 11y + 50 = 0$ e) $15x + y - 14 = 0$

74(D).- ¿Cuál es el punto donde se localiza su Baricentro?

- a) $(1.33, -6)$ b) $(-1.33, -6)$ c) $(-1.33, 6)$ d) $(-6, -1.33)$ e) $(6, -1.33)$

75(D).- ¿Cuál es la ecuación de la mediatriz del segmento AB?

- a) $8x - 18y - 123 = 0$ b) $7x - 3y - 36 = 0$ c) $15x + y - 14 = 0$
 d) $4x - 9y - 55 = 0$ e) $2x + 4y + 17 = 0$

76(D).- ¿Cuál es la ecuación de la mediatriz del segmento AC?

- a) $12x + 11y + 50 = 0$ b) $7x - 3y - 36 = 0$ c) $2x + 4y + 17 = 0$
 d) $8x - 18y - 123 = 0$ e) $x + 2y + 15 = 0$

77(D).- ¿Cuál es la ecuación de la mediatriz del segmento BC?

- a) $3x - 10y - 64 = 0$ b) $8x - 18y - 123 = 0$ c) $4x - 9y - 55 = 0$
 d) $x + 2y + 15 = 0$ e) $7x - 3y - 36 = 0$

78(D).- ¿Cuál es el punto donde se localiza su Circuncentro?

- a) (2.74 , 5.62) b) (- 2.74 , - 5.62) c) (- 2.74 , 5.62)
 d) (2.74 , - 5.62) e) (- 5.62 , 2.74)

79(D).- ¿Cuál es la ecuación de su altura desde el vértice A?

- a) $3x - 10y - 64 = 0$ b) $8x - 18y - 123 = 0$ c) $4x - 9y - 55 = 0$
 d) $x + 2y + 15 = 0$ e) $x + 2y + 15 = 0$

80(D).- ¿Cuál es la ecuación de su altura desde el vértice B?

- a) $3x - 10y - 64 = 0$ b) $12x + 11y + 50 = 0$ c) $4x - 9y - 55 = 0$
 d) $7x - 3y - 10 = 0$ e) $x + 2y + 15 = 0$

81(D).- ¿Cuál es la ecuación de su altura desde el vértice C?

- a) $3x - 10y - 64 = 0$ b) $15x + y - 14 = 0$ c) $4x - 9y - 55 = 0$
 d) $7x - 3y - 10 = 0$ e) $x + 2y + 15 = 0$

82(D).- ¿Cuál es el punto donde se localiza su Ortocentro?

- a) (1.47 , 6.76) b) (- 6.76 , - 1.47) c) (- 1.47 , 6.76)
 d) (1.47 , - 6.76) e) (- 1.47 , - 6.76)

83(D).- ¿Cuánto mide el ángulo del triángulo cuyo vértice es A?

- a) 86.63° b) 50.53° c) 42.84° d) 93.37° e) 129.47°

84(D).- ¿Cuánto mide el ángulo del triángulo cuyo vértice es B?

- a) 86.63° b) 50.53° c) 42.84° d) 93.37° e) 129.47°

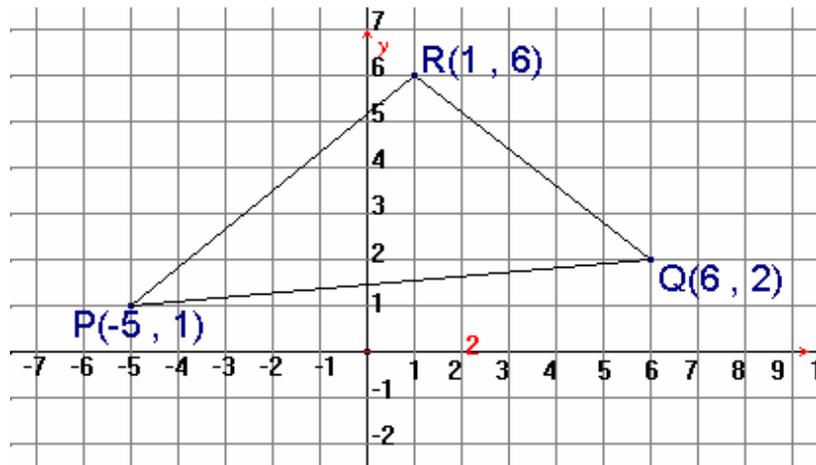
85(D).- ¿Cuánto mide el ángulo del triángulo cuyo vértice es C?

- a) 86.63° b) 50.53° c) 42.84° d) 93.37° e) 129.47°

86(D).- ¿Cuánto mide el área del triángulo que forma los puntos A, B y C?

- a) $26.5 u^2$ b) $23.5 u^2$ c) $24.5 u^2$ d) $22.5 u^2$ e) $25.5 u^2$

Considera el triángulo cuyos vértices son $A(-5, 1)$, $B(6, 2)$ y $C(1, 6)$ para responder las preguntas de la 87 a la 102.



87(D).- ¿Cuál es la ecuación de la mediana cuyo vértice es P?

- a) $6x - 17y + 47 = 0$ b) $12x + 10y - 11 = 0$ c) $5x - 4y + 29 = 0$
d) $3x + 16y - 50 = 0$ e) $9x - y - 3 = 0$

88(D).- ¿Cuál es la ecuación de la mediana cuyo vértice es Q?

- a) $6x - 17y + 47 = 0$ b) $12x + 10y - 11 = 0$ c) $5x - 4y + 29 = 0$
 d) $3x + 16y - 50 = 0$ e) $9x - y - 3 = 0$

89(D).- ¿Cuál es la ecuación de la mediana cuyo vértice es R?

- a) $6x - 17y + 47 = 0$ b) $12x + 10y - 11 = 0$ c) $5x - 4y + 29 = 0$
 d) $3x + 16y - 50 = 0$ e) $9x - y - 3 = 0$

90(D).- ¿Cuál es el punto donde se localiza su Baricentro?

- a) (0.67 , -3) b) (0.67 , 3) c) (-0.67 , 3)
 d) (-0.67 , -3) e) (0.67 , 33)

91(D).- ¿Cuál es la ecuación de la mediatriz del segmento PQ?

- a) $10x - 8y - 3 = 0$ b) $12x + 10y - 11 = 0$ c) $11x + y - 7 = 0$
 d) $5x - 4y + 29 = 0$ e) $6x + 5y - 46 = 0$

92(D).- ¿Cuál es la ecuación de la mediatriz del segmento PR?

- a) $10x - 8y - 3 = 0$ b) $12x + 10y - 11 = 0$ c) $11x + y - 7 = 0$
 d) $5x - 4y + 29 = 0$ e) $11x + y - 17 = 0$

93(D).- ¿Cuál es la ecuación de la mediatriz del segmento QR?

- a) $10x - 8y - 3 = 0$ b) $12x + 10y - 11 = 0$ c) $11x + y - 7 = 0$
 d) $5x - 4y + 29 = 0$ e) $11x + y - 17 = 0$

94(D).- ¿Cuál es el punto donde se localiza su Circuncentro?

- a) (-0.6 , -0.38) b) (-0.6 , 0.38) c) (0.6 , -0.38)
 d) (0.6 , 0.38) e) (-0.6 , 0.39)

95(D).- ¿Cuál es la ecuación de su altura desde el vértice P?

- a) $10x - 8y - 3 = 0$ b) $12x + 10y - 11 = 0$ c) $11x + y - 7 = 0$
 d) $5x - 4y + 29 = 0$ e) $11x + y - 17 = 0$

96(D).- ¿Cuál es la ecuación de su altura desde el vértice Q?

- a) $6x + 5y - 46 = 0$ b) $9x - y - 3 = 0$ c) $11x + y - 7 = 0$
d) $5x - 4y + 29 = 0$ e) $11x + y - 17 = 0$

97(D).- ¿Cuál es la ecuación de su altura desde el vértice R?

- a) $6x + 5y - 46 = 0$ b) $9x - y - 3 = 0$ c) $11x + y - 7 = 0$
d) $5x - 4y + 29 = 0$ e) $11x + y - 17 = 0$

98(D).- ¿Cuál es el punto donde se localiza su Ortocentro?

- a) $(-0.8, 8.24)$ b) $(-0.8, -8.24)$ c) $(-8.24, 0.8)$
d) $(0.8, -8.24)$ e) $(0.8, 8.24)$

99(D).- ¿Cuánto mide el ángulo del triángulo cuyo vértice es P?

- a) 43.85° b) 101.54° c) 34.61° d) 93.37° e) 129.47°

100(D).- ¿Cuánto mide el ángulo del triángulo cuyo vértice es Q?

- a) 43.85° b) 101.54° c) 34.61° d) 93.37° e) 129.47°

101(D).- ¿Cuánto mide el ángulo del triángulo cuyo vértice es R?

- a) 43.85° b) 101.54° c) 34.61° d) 93.37° e) 129.47°

102(D).- ¿Cuánto mide el área del triángulo que forma los puntos P, Q y R?

- a) $26.5 u^2$ b) $23.5 u^2$ c) $24.0 u^2$ d) $24.5 u^2$ e) $25.5 u^2$

SOLUCIÓN DE LOS REACTIVOS DE LA UNIDAD 3

1	d	26	e	51	b	76	c	101	b
2	b	27	b	52	a	77	b	102	d
3	c	28	e	53	b	78	d		
4	d	29	c	54	c	79	c		
5	e	30	a	55	a	80	e		
6	d	31	a	56	e	81	d		
7	b	32	d	57	a	82	e		
8	c	33	d	58	c	83	a		
9	c	34	d	59	c	84	c		
10	c	35	b	60	e	85	b		
11	c	36	e	61	d	86	e		
12	b	37	c	62	c	87	a		
13	e	38	a	63	a	88	d		
14	c	39	e	64	e	89	e		
15	d	40	c	65	a	90	b		
16	e	41	c	66	b	91	c		
17	b	42	a	67	e	92	b		
18	c	43	b	68	c	93	a		
19	a	44	b	69	b	94	d		
20	b	45	e	70	a	95	d		
21	a	46	d	71	a	96	a		
22	c	47	c	72	d	97	e		
23	d	48	b	73	e	98	e		
24	d	49	d	74	a	99	c		
25	c	50	b	75	b	100	a		