PRESENTACIÓN

Actualmente hay evidencias de que los babilonios, alrededor del año 1600 a.C., ya conocían un método para resolver ecuaciones de segundo grado, aunque no tenían una notación algebraica para expresar la solución, actualmente con nuestra notación fueron capaces de resolver ecuaciones lineales ($ax = b$) y cuadráticas ($ax^2 + bx + c = 0$) aunque sus métodos eran muy complicados por la notación que empleaban, esencialmente eran los mismos métodos que hoy enseñan.

Este conocimiento pasó a los egipcios, que las usaban para redefinir los límites de las parcelas anegadas por el Nilo, en sus crecidas.

Posteriormente, los griegos, al menos a partir del año 100 a.c., resolvían las ecuaciones de segundo grado con métodos geométricos, métodos que también utilizaban para resolver algunas ecuaciones de grado superior. Parece ser que fue Diofanto de Alejandría quien le dio un mayor impulso al tema.

¿Qué pensaban los babilonios de su método, y cómo llegaron a él? Tuvo que haber alguna idea relativamente sencilla tras un proceso tan complicado. Parece plausible, aunque no hay prueba directa, que tuvieran una idea geométrica en el método de “completar el cuadrado”. Una versión algebraica de este método la analizaremos en esta unidad y otros más para que tengas varias alternativas de cómo resolver una ecuación cuadrática.

UNIDAD 5: **Ecuaciones Cuadráticas.**

Propósitos de la unidad:

Profundizar, a través del planteamiento y resolución de ecuaciones cuadráticas, en el concepto mismo de ecuación, en lo que significa que un número sea su solución, en la relación que existe entre grado de la ecuación y el número de soluciones. Mostrar el poder del Álgebra para encontrar métodos alternos como generales de solución.

5.1 Problemas que dan lugar a ecuaciones cuadráticas con una incógnita.

Aprendizajes. El alumno:

- ✓ *Analizará las condiciones y relaciones que se establecen en el enunciado verbal de un problema y expresará las relaciones entre lo conocido y lo desconocido a través de una ecuación algebraica de segundo grado.*
- ✓ *Reafirmará la estrategia general en la resolución de problemas de reducir un problema nuevo a otro que ya se sabe cómo resolver.*

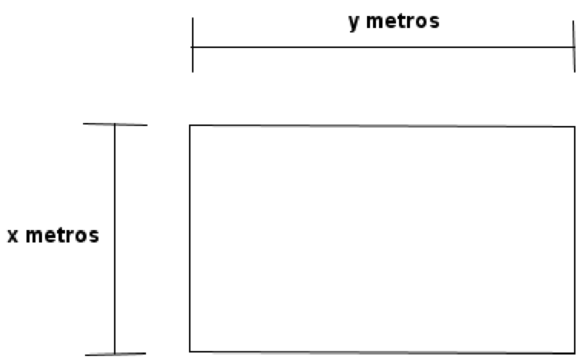
El **modelo matemático** para resolver una gran cantidad de problemas que se presentan, es una ecuación cuadrática, analicemos algunos de ellos.

En cada ejemplo sólo encontraremos el modelo matemático cuya solución resuelve el problema.

Problema 1) Un jardín con forma rectangular tiene un perímetro de 42 metros y un área de 108 metros cuadrados, ¿cuáles son sus dimensiones?

Solución:

Se debe empezar por dibujar un rectángulo que represente el jardín en cuestión.



Como puedes observar en la figura no conocemos la longitud de los lados, dichas longitudes son representadas por las incógnitas "x" y "y".

Para resolver este problema necesitamos las fórmulas para encontrar el perímetro y el área del rectángulo.

La fórmula para calcular el perímetro de un rectángulo es: $\underline{P = 2x + 2y}$

La fórmula para calcular el área de un rectángulo es: $\underline{A = x \cdot y}$, y utilizando el dato de que el perímetro es de 42 metros junto con la fórmula del perímetro del rectángulo se obtiene la ecuación:

$$42 = 2x + 2y$$

La cual se puede simplificar, dividiendo toda la ecuación entre 2: $21 = x + y$.

Por otro lado utilizando el dato de que el área es de 108 m^2, y la fórmula del área del rectángulo se tiene la ecuación $\underline{108 = x \cdot y}$

Como se puede observar después de interpretar los datos del problema hemos obtenido el sistema de ecuaciones:

$$21 = x + y \qquad (1)$$
$$108 = x \bullet y \qquad (2)$$

Que resolveremos por el método de Sustitución:

Para encontrar las dimensiones del jardín, de la ecuación (1) se despeja la incógnita y, obteniendo $y = 21 - x$
Después debemos sustituir dicho despeje en la ecuación (2): $108 = x(21 - x)$
Realizando la multiplicación del miembro derecho de la ecuación se obtiene:

$$108 = 21x - x^2$$

Igualando a cero se tiene la **ecuación de segundo grado en** x:

$$x^2 - 21x + 108 = 0$$

Cuya solución dará la respuesta correcta al problema.

Problema 2) El gerente de una fábrica organizo una comida para sus trabajadores, de acuerdo a los trabajadores que se apuntaron el precio de la comida fue de $3000.00, como el día del evento llegaron 15 trabajadores más, aunque comieron menos, cada trabajador pago $10.00 menos, ¿Cuántos trabajadores asistieron y cuánto pago cada uno de ellos?

Solución:
Representando con x el número inicial de trabajadores que se apuntaron para el evento, el costo de la comida para cada uno de ellos era de $\frac{3000}{x}$ pesos.
Al llegar 15 trabajadores más, hay un total de $x + 15$ trabajadores, y cada uno pagará $\frac{3000}{x+15}$ pesos.
Por otro lado, para los trabajadores que se habían apuntado el costo disminuye en $10.00, es decir, cada uno pagará $\frac{3000}{x} - 10$ pesos.
Estas dos expresiones se deben de igualar ya que representan lo mismo, y se tiene la ecuación $\frac{3000}{x} - 10 = \frac{3000}{x+15}$.

Para encontrar una ecuación equivalente y más sencilla:

Se multiplica toda la ecuación por $x(x + 15)$, y se obtiene:

$$x(x + 15)\left(\frac{3000}{x} - 10 = \frac{3000}{x+15}\right)$$

Al efectuar las multiplicaciones indicadas tenemos:

$$\frac{3000x(x+15)}{x} - 10x(x+15) = \frac{3000x(x+15)}{x+15}$$

$$3000(x + 15) – 10x(x + 15) = 3000x$$

Simplificando los términos semejantes queda:

$$3000x + 45000 – 10x^2 – 150x = 3000x$$

$$– 10x^2 – 150x + 45000 = 0$$

Dividiendo toda la ecuación entre –10 obtenemos la ecuación de segundo grado en x: $x^2 + 15x – 4500 = 0$

Cuya solución dará la respuesta correcta al problema.

Problema 3) A un corredor veloz le toma 10 segundos más recorrer una distancia de 1500 metros que el tiempo que usó otro corredor más lento para recorrer 1000 metros. Si la velocidad del corredor más rápido era 5 metros/segundo mayor que la del más lento. ¿Cuáles fueron las velocidades de ambos?

Solución:

Utilizaremos la fórmula muy conocida en Física, $v = \frac{d}{t}$: la velocidad es igual a distancia sobre el tiempo.

Para el corredor más lento

$d_1 = 1000$ metros

$$v_1 = \frac{1000}{t}$$

Para el corredor más rápido

$d_2 = 1500$ metros

$$v_2 = \frac{1500}{t+10}$$

La afirmación "la velocidad del corredor más rápido era 5 metros/segundo mayor que la del más lento" se expresa como: $v_2 = v_1 + 5$

Que podemos escribir de la siguiente forma: $v_2 = \frac{1000}{t} + 5$

Igualando las dos expresiones que tenemos para v_2, establecemos una nueva ecuación que es:

$$\frac{1000}{t} + 5 = \frac{1500}{t+10}$$

Para encontrar una ecuación equivalente y más sencilla:

Se multiplica toda la ecuación por $t(t + 10)$: $t(t + 10)\left(\frac{1000}{t} + 5 = \frac{1500}{t+10}\right)$

Haciendo los productos y simplificando se obtiene:

$$1000(t + 10) + 5t(t + 10) = t(1500)$$

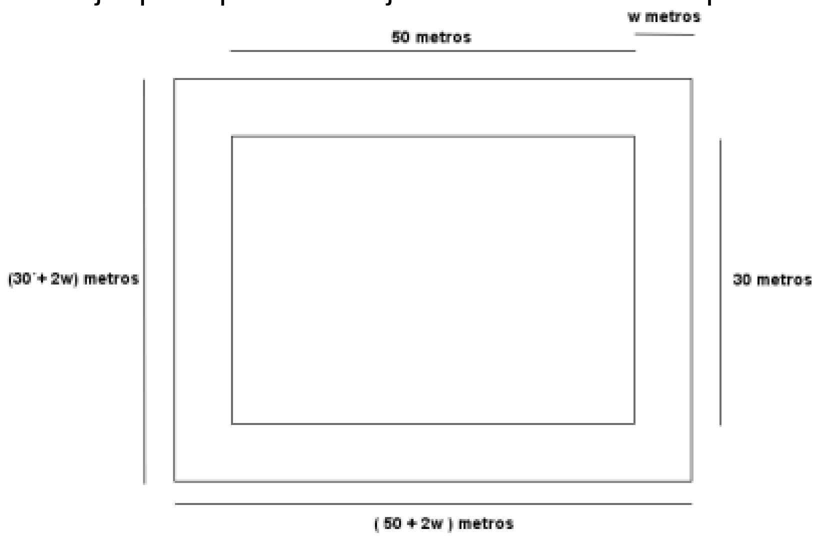
$$1000t + 10000 + 5t^2 + 50t = 1500t$$

$$5t^2 – 450t + 10000 = 0$$

Dividiendo a toda la ecuación entre 5 se tiene: $t^2 – 90t + 2000 = 0$

Cuya solución dará la respuesta correcta al problema.

Problema 4) Un parque contiene un jardín de flores de 50 metros de largo y 30 metros de ancho, rodeado por un sendero o andador de ancho constante. Si el área del marco es 600 m^2, ¿Cuál es el ancho del sendero?
Solución:
El dibujo que representa el jardín con el andador que lo rodea es el siguiente.



El área total del parque es:
$(30 + 2w)(50 + 2w)$
El área del jardín de flores es:
$(50)(30) = 1500$ m^2

El área del parque menos el área del jardín es igual al área del andador, así que se puede escribir la ecuación como:

$$(50 + 2w)(30 + 2w) - 1500 = 600$$

Ahora termina el ejercicio contestando lo que sigue:

1) El producto de los dos binomios corresponde a la expresión:
a) $4w^2 + 160w + 1500$ b) $4w^2 + 60w + 1500$ c) $w^2 + 160w + 1500$
d) $4w^2 + 160w + 150$ e) $2w^2 + 160w + 1500$

2) Sustituyendo esta expresión e igualando la ecuación a cero resulta la ecuación:
a) $w^2 + 160w - 600 = 0$ b) $4w^2 + 60w - 1500 = 0$ c) $4w^2 + 160w - 600 = 0$
d) $w^2 + 160w - 1500 = 0$ e) $2w^2 + 160w - 600 = 0$

3) Al simplificar la ecuación de segundo grado en w, se obtiene una ecuación que modela el problema planteado, esta es:
a) $w^2 + 15w - 150 = 0$ b) $w^2 + 40w - 150 = 0$ c) $w^2 + 80w - 300 = 0$
d) $w^2 + 160w - 1500 = 0$ e) $w^2 + 160w - 600 = 0$

Problema 5) Anita compró varios libros por \$180, cada libro cuesta lo mismo. Si hubiese comprado 6 libros menos, por el mismo dinero cada libro le habría costado \$1.00 más.
¿Cuántos libros compró y cuánto costó cada uno?

Solución:
Supongamos que x representa el número de libros comprados.

Si Anita pago \$180 por los libros, el costo de cada libro es de $\frac{180}{x}$.

Un peso más por cada libro se escribe: $\frac{180}{x} + 1$

La expresión para “Si hubiese comprado 6 libros menos” es: $x - 6$

De la afirmación “Si hubiese comprado 6 libros menos, por el mismo dinero cada libro le habría costado \$1.00 más” se escribe la ecuación:

$$\left(\frac{180}{x} + 1\right)(x - 6) = 180$$

Encontremos una ecuación equivalente más sencilla:

Se multiplica toda la ecuación por x: $x\left[\left(\frac{180}{x} + 1\right)(x - 6) = 180\right]$

Haciendo los productos y simplificando: $\left(\frac{180x}{x} + x\right)(x - 6) = 180x$

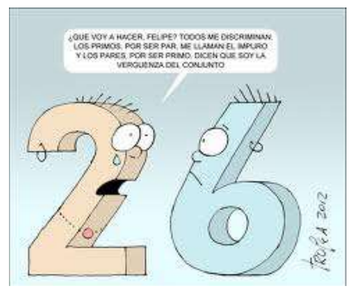
$$(180 + x)(x - 6) = 180x$$

$$180x - 6(180) + x^2 - 6x = 180x$$

$$x^2 - 6x - 1080 = 0$$

Es la ecuación cuya solución resuelve el problema.

Problema 6. ¿Existen dos números pares consecutivos con una suma de sus recíprocos igual $\frac{8}{45}$? Si la respuesta es afirmativa, encuéntralos. Si es negativa, compruébalo.



Solución:

Representando con $2n$, y $2n + 2$ a los números pares consecutivos.

Los recíprocos de cada número respectivamente son: $\frac{1}{2n}$ y $\frac{1}{2n+2}$

La expresión “la suma de sus recíprocos igual a $\frac{8}{45}$”, se escribe como:

$$\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+2} = \frac{8}{45}$$

Encontremos una ecuación equivalente más sencilla:

Multiplicando toda la ecuación por $2n(2n + 2)(45)$:

$$2n(2n + 2)(45)\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+2} = \frac{8}{45}\right)$$

Haciendo los productos y simplificando:

$$\frac{2n(2n+2)(45)}{2n} + \frac{2n(2n+2)(45)}{2n+2} = \frac{8(2n(2n+2)(45))}{45}$$

$$(2n + 2)45 + (2n)(45) = 8(4n^2 + 4n)$$
$$90n + 90 + 90n = 32n^2 + 32n$$
$$0 = 32n^2 - 148n - 90$$

Es equivalente a: $16n^2 - 74n - 45 = 0$

Esta es la ecuación cuya solución resuelve el problema.

Problema 7. Una tienda de departamentos vende 20 estéreos portátiles a un precio de $800.00 cada uno, el gerente considera que por cada $50.00 de rebaja en el precio se venderán 6 estéreos más, ¿cuál deberá ser el precio de los estéreos si la tienda quiere tener una venta de $22400.00?

Solución:

Representando por x el número de descuentos de $50 realizados.

$800 - 50x$ será el precio al que se deben vender los estéreos.

$20 + 6x$ representa la cantidad de estéreos vendidos.

$(800 - 50x)(20 + 6x)$ las ventas son.

$(800 - 50x)(20 + 6x) = 22400$ porque deben ser iguales a $22400.

La ecuación que resulta al hacer la multiplicación indicada, igualando la ecuación a cero y reduciendo los términos semejantes es: $-300x^2 + 3800x - 6400 = 0$

Y al simplificarla se obtiene la ecuación cuadrática: $-3x^2 + 38x - 64 = 0$, cuya solución resuelve el problema planteado.

Problema 8) La autopista México - Puebla tiene una recta de 16 kilómetros, en la cual el aire que baja de las montañas en dirección a Puebla tiene una velocidad de 4 kilómetros por hora. Un ciclista recorre esta recta de ida y regreso a velocidad constante. Si su recorrido tuvo una duración de 2 horas. Construye el modelo para encontrar la velocidad del ciclista.

Solución:

La fórmula que se utiliza en este problema es $v = \frac{d}{t}$, velocidad es igual a distancia entre el tiempo utilizado en hacer el recorrido. Suponiendo que la velocidad del ciclista es x, hacemos una tabla con los datos que nos da el problema

Dirección	Velocidad	Distancia	Tiempo
México - Puebla	$x + 4$	16	$\frac{16}{x+4}$
Puebla - México	$x - 4$	16	$\frac{16}{x-4}$

Como el tiempo del recorrido es de 2 horas, la ecuación que lo representa es:

$$2 = \frac{16}{x+4} + \frac{16}{x-4}$$

Veamos cómo encontrar una ecuación equivalente más sencilla:

Se multiplica toda la ecuación por $(x + 4)(x - 4)$:

$$(x + 4)(x - 4)\left(2 = \frac{16}{x+4} + \frac{16}{x-4}\right)$$

Realizando las multiplicaciones indicadas, la ecuación que resulta es:

$$2x^2 - 32 = 16(x - 4) + 16(x + 4)$$
$$2x^2 - 32x - 32 = 0$$
$$x^2 - 16x - 16 = 0$$

Esta es la ecuación cuya solución resuelve el problema.

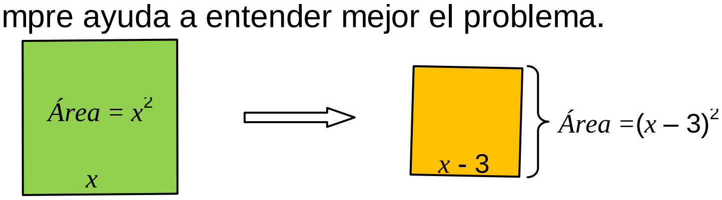
Problema 9) Un principiante de canotaje puede recorrer 12 km rio abajo y regresar en un total de 5 horas. Si la velocidad de la corriente es de 1 km/hora, encuentra la velocidad a la que puede remar el principiante en aguas tranquilas.

Solución:
Supongamos que x es la velocidad de la canoa en aguas tranquilas.
La velocidad a favor de la corriente es $x + 1$, y en contra de la corriente será _____
Por otro lado, considerando la fórmula de velocidad $v = \frac{d}{t}$, el tiempo de recorrido en contra de la corriente es $\frac{12}{x-1}$ y el tiempo a favor de la corriente será _______.
Así que el tiempo total de recorrido es: $5 = \frac{12}{x-1} + \frac{12}{x+1}$.
Encontremos una ecuación equivalente más sencilla:
Multiplicando toda la ecuación por $(x - 1)(x + 1)$ tenemos:

$$5(x - 1)(x + 1) = 12(x + 1) + 12(x - 1).$$

Haciendo las multiplicaciones indicadas y simplificando los términos semejantes e igualando a cero tenemos la ecuación cuadrática: $5x^2 - 24x - 5 = 0$.
Cuya solución resolverá el problema dado.

Problema 10) Si se disminuye en 3 metros el lado de un cuadrado, el área del cuadrado original es igual al doble del área del cuadrado disminuido en 207 m^2. ¿Cuáles son las dimensiones del cuadrado original?
Un dibujo siempre ayuda a entender mejor el problema.



Solución:
La afirmación “el área del cuadrado original es igual al doble del área del cuadrado disminuido en 207 m²”, se expresa con la ecuación: $x^2 = 2(x-3)^2 - 207$
Haciendo las multiplicaciones indicadas se obtiene la ecuación cuadrática:

$$x^2 - 12x - 189 = 0$$

Cuya solución nos dará la solución al problema.

Problema 11)

Regocíjense los monos
divididos en dos bandos
su sexta parte al cuadrado
en el bosque se solazan.

Con alegres gritos, ocho
atronando el campo están.
¿Sabes cuántos monos hay
en la manada en total?[1]

Solución:
Si x es el total de monos en la manada:
La sexta parte al cuadrado es $\left(\frac{x}{6}\right)^2$, más los 8 que en el campo están $\left(\frac{x}{6}\right)^2 + 8$, será igual a la manada completa: $\left(\frac{x}{6}\right)^2 + 8 = x$

Haciendo las operaciones indicadas, una ecuación equivalente será:

$$\frac{x^2}{36} = x - 8$$

Multiplicando la ecuación por 36 e igualando a cero, la ecuación que resulta es:

$$x^2 - 36x + 288 = 0.$$

Su solución da la respuesta al problema planteado.

[1] Perelman, Y. Algebra Recreativa

Ejercicios 5.1

Encuentra **sólo** el Modelo Matemático cuya solución resuelva el problema planteado en cada punto.

1) Un parque de forma rectangular tiene un perímetro de 160 metros y un área de 1500 metros cuadrados, ¿cuáles son sus dimensiones?

2) Un grupo de alumnos organizo una excursión, el costo para los alumnos que van es de $4200, el día de la excursión llegaron 7 alumnos más y el chofer les dijo que el costo era el mismo, por lo que cada alumno pago $20.00 menos. ¿Cuántos alumnos fueron a la excursión, y cuánto pago cada uno?

3) A un corredor veloz le toma 40 segundos menos recorrer una distancia de 1200 metros, que el tiempo que uso un corredor más lento para recorrer 1600 metros. Si la velocidad del corredor más rápido era 4 metros/segundo mayor que la del más lento. ¿Cuáles eran las velocidades de ambos?

4) Un parque de forma rectangular tiene 60 por 100 metros, si contiene un jardín rectangular rodeado por un andador de concreto, ¿qué ancho tendrá el andador si el área del jardín es la mitad del área del parque?

5) Encontrar dos números enteros consecutivos si la suma de sus recíprocos es de $\frac{7}{24}$.

6) El producto de dos enteros impares consecutivos es 143. Encuentre los enteros impares.

7) Dos números positivos difieren por 5, y su producto es 104. Encontrar los dos números.

8) La corriente del rio Usumacinta entre los pueblos A y B es de 10 kilómetros por hora y va del pueblo A al pueblo B, una lancha hace el recorrido redondo entre los pueblos A y B a velocidad constante y tarda 3 horas, sí la distancia que hay entre los dos pueblos es de 20 kilómetros, ¿cuál es la velocidad de la lancha?

9) Nahil compró varios libros por $360.00. Si hubiese comprado 5 libros menos por el mismo dinero, cada libro le habría costado $1.00 más. ¿Cuántos libros compró y cuánto costó cada uno?

10) Marcos compró varios libros por la cantidad de $468.00, si hubiera comprado 13 libros menos, cada libro costaría $3.00 más. ¿Cuántos libros compró y cuánto costó cada libro?

11) El viaje a una práctica de campo salió en \$1560, el día de la práctica llegaron 9 estudiantes más, y el costo de la práctica fue de \$12 menos para cada estudiante. ¿Cuántos estudiantes fueron a la práctica de campo?

12) Una lancha puede recorrer 60 kilómetros río abajo y regresar en un total de 8 horas. Si la velocidad del río es de 10 kilómetros/hora, encuentra la velocidad de la lancha en aguas tranquilas.

13) Adriana vive a 30 km de su trabajo. Si viaja en su bicicleta a 5 km/hora más rápido de lo usual, llega a su trabajo 5 minutos más temprano. ¿A qué velocidad maneja normalmente su bicicleta?

14) Si se aumenta en 4 cm el lado de un cuadrado, su área es 112 cm^2 menos que el doble del área original. Calcular el área y perímetro del cuadrado inicial.

15) Una poesía:

Regocíjense los monos
divididos en dos bandos,
su octava parte al cuadrado
en el bosque se solaza.
Con alegres gritos, doce
atronando el campo están.
¿Sabes cuántos monos, hay en la manada?

5.2 Resolución de ecuaciones cuadráticas de las formas:

Aprendizajes. El alumno:

- ✓ *Identifica cuáles son los parámetros* ***a, b*** *y* ***c****, aún en ecuaciones "desordenadas" o incompletas y los resolverá correctamente por un método específico.*
- ✓ *Transforma una ecuación cuadrática a la forma adecuada para su resolución por un método específico.*

Después de analizar los problemas anteriores, puedes observar que las ecuaciones que se obtuvieron tienen tres términos, y uno de ellos es cuadrático de ahí su nombre de ecuaciones cuadráticas. Pero existen ecuaciones cuadráticas que pueden tener uno o dos términos y son llamadas “*ecuaciones cuadráticas incompletas*”, cómo las que veremos a continuación.

5.2.1 Ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$

Para ecuaciones de esta forma, la solución se encuentra despejando a x con el siguiente procedimiento, recuerda que a y c son números reales con $a \neq 0$.

Además toma en cuenta que el número c puede ser positivo o negativo.

Si c es positivo:	
$ax^2 + c = 0$	Ecuación original
$ax^2 = -c$	Se resta c en ambos miembros de la ecuación.
$x^2 = \frac{-c}{a}$	Se divide toda la ecuación entre a.
$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$	Finalmente se saca raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación.

Con los siguientes ejemplos comprenderás mejor este procedimiento.

Ejemplo 1) Resuelve la ecuación $4x^2 - 124 = 0$

Solución:
Observa la operación realizada en cada paso del despeje de la incógnita x.

$4x^2 = 124$ Se suma el inverso aditivo de 124 en ambos miembros.

$x^2 = \frac{124}{4} = 31$ Se multiplica la ecuación por el inverso multiplicativo de 4.

$x = \pm\sqrt{31}$ Se obtiene la raíz en ambos miembros de la ecuación.

Las soluciones de la ecuación son: $x_1 = 5.56$, $x_2 = -5.56$

Ejemplo 2) Resuelve la ecuación $3x^2 + 192 = 0$

Solución:
Observa cada operación realizada en el proceso de solución.

$3x^2 = -192$ Se suma el inverso aditivo de –192 en ambos miembros

$x^2 = -\frac{192}{3}$ Se multiplican ambos miembros por el inverso multiplicativo de 3

$x = \pm\sqrt{-64}$ Se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación

En este caso, la ecuación no tiene soluciones reales, ¿por qué?

Ejemplo 3) Resuelve la ecuación $5(x-3)^2 - 245 = 0$

Solución:
Observa cada operación que se realiza en el proceso de solución.

$5(x-3)^2 = 245$ Se suma el inverso aditivo de 245 en ambos miembros

$(x-3)^2 = \frac{245}{5} = 49$ Se multiplica la ecuación por el inverso multiplicativo de 5

$x - 3 = \pm\sqrt{49} = \pm 7$ Se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros

$x = 3 \pm 7$ Se suma el inverso aditivo de – 3 en ambos miembros

Las raíces de la ecuación son: $x_1 = 3 + 7 = 10$, $x_2 = 3 - 7 = -4$

5.2.2 Ecuaciones de la forma $ax^2 + c = d$

El procedimiento para resolver este tipo de ecuaciones es el siguiente.

$ax^2 + c = d$	Ecuación original
$ax^2 = d - c$	Se resta c en ambos miembros de la ecuación.
$x^2 = \frac{d-c}{a}$	Se divide toda la ecuación entre a.
$x = \pm\sqrt{\frac{d-c}{a}}$	Finalmente se saca raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación.

Ejemplo 1) Resuelve la ecuación $4x^2 - 16 = 48$.

Solución:
Observa la operación realizada en cada paso.

$4x^2 = 48 + 16$ Se suma el inverso aditivo de –16 en ambos miembros

$x^2 = \frac{64}{4} = 16$ Se multiplica la ecuación por el inverso multiplicativo de 4

$x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$ Se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros

Las raíces de la ecuación son: $x_1 = 4$, $x_2 = -4$

Ejemplo 2) Resuelve la ecuación $\frac{2}{3}x^2 + 30 = 24$

Solución:
Observa la operación en cada paso.

$\frac{2}{3}x^2 = 24 - 30$ Se suma el inverso aditivo de 30 en ambos miembros

$x^2 = \frac{3(-8)}{2}$ Se multiplica la ecuación por el inverso multiplicativo de ⅔

$x = \pm\sqrt{-12}$ Se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros

Las raíces de la ecuación no son reales ya que la raíz cuadrada de un número negativo no existe en los Reales.

Ejemplo 3) Resuelve la ecuación $7(x + 3)^2 - 49 = 126$

Solución:

Recuerda las reglas para llegar a la solución de la ecuación:

$7(x + 3)^2 = 126 + 49$ Se suma el inverso aditivo de –49 en ambos miembros

$(x + 3)^2 = \frac{175}{7} = 25$ Se multiplica la ecuación por el inverso multiplicativo de 7

$x + 3 = \pm\sqrt{25} = 5$ Se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros

$x = \pm 5 - 3$ Se suma el inverso aditivo de 3 en ambos miembros

Las raíces de la ecuación son: $x_1 = 5 - 3 = 2$, $x_2 = -5 - 3 = -8$

5.2.3 Ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$

En el procedimiento para resolver este tipo de ecuaciones hay que tomar en cuenta que:

Dados p y q dos números reales, la igualdad $p(q) = 0$ se cumple si y sólo si $p = 0$ o $q = 0$

$ax^2 + bx = 0$	Ecuación original
$x(ax + b) = 0$	Se factoriza la incógnita x
$x = 0$ o $ax + b = 0$	Para que el producto de dos números sea cero uno de ellos debe ser cero.
$x_1 = 0$ $x_2 = -\frac{b}{a}$	Se despeja x, de la segunda ecuación y se obtienen las dos soluciones.

Ejemplo 1) Resuelve la ecuación $6x^2 - 8x = 0$

Solución:

$$6x^2 - 8x = 0$$
$$2x(3x - 4) = 0$$
$$2x = 0 \quad \text{o} \quad 3x - 4 = 0$$
$$x = \frac{0}{2} \quad \text{o} \quad 3x = 4$$
$$x = 0 \qquad x = \frac{4}{3}$$

Las raíces o soluciones de la ecuación son: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{4}{3}$

Ejemplo 2) Resuelve la ecuación $4x^2 + 12x = 0$

Solución:

$$4x^2 + 12x = 0$$
$$4x(x + 3) = 0$$
$$4x = 0 \quad \text{o} \quad x + 3 = 0$$
$$x = \frac{0}{4} = 0 \quad \text{o} \quad x = -3$$

Las raíces de la ecuación son: $x_1 = 0$ $x_2 = -3$

Ejemplo 3) Resuelve la ecuación $-5x^2 - 18x = 0$

Solución:

$$-5x^2 - 18x = 0$$
$$-x(5x - 18) = 0$$
$$-x = 0 \quad \text{o} \quad 3x - 18 = 0$$
$$x_1 = 0 \quad \text{o} \quad 3x = 18$$
$$x_2 = 6$$

Las raíces de la ecuación son: $x_1 = 0$ $x_2 = 6$

5.2.4 Ecuaciones de la forma $a(x + m)^2 = n$

El procedimiento para resolver este tipo de ecuaciones es el siguiente.

$a(x + m)^2 = n$	Ecuación original
$(x + m)^2 = \frac{n}{a}$	Se divide la ecuación entre **a**
$x + m = \pm\sqrt{\frac{n}{a}}$	Se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación
$x = \pm\sqrt{\frac{n}{a}} - m$	Se resta **m** a ambos miembros de la ecuación
$x_1 = +\sqrt{\frac{n}{a}} - m, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{n}{a}} - m$	Son las soluciones de la ecuación

Ejemplo 1) Resuelve la ecuación $3(x - 6)^2 = 432$

Solución:
Escribe la operación realizada en cada paso.

$(x - 6)^2 = \frac{432}{3}$ Se multiplica la ecuación por el inverso multiplicativo de 3

$x - 6 = \pm\sqrt{144}$ Se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros

$x = 6 \pm 12$ Se suma el inverso aditivo de –6 a ambos miembros

Las raíces de la ecuación son: $x_1 = 6 + 12 = 18$ y $x_2 = 6 - 12 = -6$

Ejemplo 2) Resuelve la ecuación $-5(x + 7)^2 = -32400$

Solución:
Escribe la operación realizada en cada paso.

$(x + 7)^2 = \frac{-32400}{-5}$ Se multiplica la ecuación por el inverso multiplicativo de –5

$(x + 7)^2 = 6480$

$x + 7 = \pm\sqrt{6480} = \pm 80.498$ Se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros

$x = \pm 80.498 - 7$ Se suma el inverso aditivo de 7 a ambos miembros

Las soluciones o raíces de la ecuación son: $x_1 = 73.498$, $x_2 = -87.498$

Ejemplo 3) Resuelve la ecuación $5(x + 6)^2 = -22$

Solución:
Escribe la operación realizada en cada paso.

$(x + 6)^2 = \frac{-22}{5}$ Se multiplica la ecuación por el inverso multiplicativo de 5

$x + 6 = \pm\sqrt{\frac{-22}{5}}$ Se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros

$x = \pm\sqrt{\frac{-22}{5}} - 6$ No existe en los Reales las raíces cuadradas de números negativos.

La ecuación no tiene soluciones o raíces reales.

5.2.5 Ecuaciones de la forma $(ax + b)(cx + d) = 0$

En el procedimiento para resolver este tipo de ecuaciones hay que tomar en cuenta que:

Dados p y q dos números reales, la igualdad $p(q) = 0$ se cumple si y sólo si $p = 0$ o $q = 0$

$(ax + b)(cx + d) = 0$	Ecuación original
$ax + b = 0$ o $cx + d = 0$	Uno de los factores es cero
$ax = -b$ o $cx = -d$ $x = -\frac{b}{a}$ o $x = -\frac{d}{c}$	Se despeja x de cada ecuación
Las soluciones de la ecuación son $x_1 = -\frac{b}{a}$ y $x_2 = -\frac{d}{c}$	

Ejemplo 1) Resuelve la ecuación $(2x - 3)(5x + 6) = 0$

Solución:

$$(2x - 3)(5x + 6) = 0$$
$$2x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad 5x + 6 = 0$$
$$2x = 3 \quad \text{o} \quad 5x = -6$$
$$x_1 = \frac{3}{2} \quad \text{o} \quad x_2 = \frac{-6}{5}$$

COMPROBACIÓN:

Sustituyendo $x_1 = \frac{3}{2}$ en la ecuación $(2x - 3)(5x + 6) = 0$.

$$(2\frac{3}{2} - 3)(5\frac{3}{2} + 6) = (3 - 3)(\frac{15}{2} + 6) = 0(\frac{27}{2}) = 0$$

Sustituyendo $x_2 = \frac{-6}{5}$ en la ecuación $(2x - 3)(5x + 6) = 0$.

$$(2\left(-\frac{6}{5}\right) - 3)(5\left(-\frac{6}{5}\right) + 6) = \left(-\frac{12}{5} - 3\right)(-6 + 6) = \left(-\frac{27}{5}\right)0 = 0$$

Ejemplo 2) Resuelve la ecuación $(5x - 4)(2x - 7) = 0$

Solución:

$$(5x - 4)(2x - 7) = 0$$
$$5x - 4 = 0 \quad \text{o} \quad 2x - 7 = 0$$
$$5x = 4 \quad \text{o} \quad 2x = 7$$
$$x_1 = \frac{4}{5} \quad \text{o} \quad x_2 = \frac{7}{2}$$

COMPROBACIÓN.

Sustituyendo $x_1 = \frac{4}{5}$ en la ecuación $(5x - 4)(2x - 7) = 0$.

$$(5x - 4)(2x - 7) = (5\frac{4}{5} - 4)(2\frac{4}{5} - 7) = (4 - 4)\left(\frac{8}{5} - 7\right) = 0\left(-\frac{27}{5}\right) = 0$$

Sustituyendo $x_2 = \frac{7}{2}$ en la ecuación $(5x - 4)(2x - 7) = 0$.

$$(5x - 4)(2x - 7) = (5\frac{7}{2} - 4)(2\frac{7}{2} - 7) = \left(\frac{35}{2} - 4\right)(7 - 7) = \left(\frac{27}{2}\right)(0) = 0.$$

Ejercicios 5.2

Encuentra las soluciones o raíces de cada una de las siguientes ecuaciones.

Sección 5.2.1

1) $x^2 - 45 = 0$

2) $y^2 + 56 = 0$

3) $3x^2 + 36 = 0$

4) $7z^2 - 448 = 0$

5) $\frac{2}{3}w^2 - 54 = 0$

6) $\frac{1}{2}x^2 - 18 = 0$

7) $3(t - 5)^2 - 12 = 0$

8) $-5(x + 2)^2 + 20 = 0$

9) $4(x - 3)^2 - 64 = 0$

10) $\frac{3}{2}(y + 7)^2 - 54 = 0$

Sección 5.2.2

1) $5x^2 + 36 = 161$

2) $w^2 - 24 = -8$

3) $x^2 + 12 = 48$

4) $3y^2 + 64 = 100$

5) $p^2 + 126 = 90$

6) $q^2 - 400 = 624$

7) $r^2 + 51 = 100$

8) $5z^2 - 25 = 220$

9) $3s^2 + 600 = 1275$

10) $4(x - 5)^2 - 144 = 432$

11) $-5(y + 2)^2 + 100 = -505$

12) $\frac{3}{2}(x - 1)^2 - 54 = -123$

Sección 5.2.3

1) $5x^2 - 70x = 0$
2) $y^2 - 24y = 0$
3) $w^2 + 12w = 0$
4) $3t^2 + 69t = 0$
5) $s^2 - \frac{3}{4}s = 0$
6) $4x^2 - \frac{1}{2}x = 0$
7) $p^2 + 51p = 0$
8) $1.5q^2 - 81q = 0$
9) $3x^2 + 600x = 0$
10) $4r^2 - 144r = 0$
11) $-5x^2 + 100x = 0$
12) $\frac{3}{2}z^2 - 24z = 0$

Sección 5.2.4

1) $\frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{243}{676}$
2) $\frac{1}{2}(y + 3)^2 = 3528$
3) $-\frac{1}{4}\left(w - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{-1}{2304}$
4) $2(p - 3)^2 = -10$
5) $8(q + 4)^2 = 128$
6) $\frac{2}{3}(r - 4)^2 = 150$
7) $7(s + 8)^2 = -56$
8) $6(m + 8)^2 = 90$
9) $\frac{1}{2}(n - 1)^2 = 162$
10) $(w + 8)^2 = \frac{25}{81}$
11) $-3(x - \frac{1}{2})^2 = 108$
12) $\frac{1}{2}(y + 5)^2 = 32$

Sección 5.2.5

1) $(2x - 3)(5x + 6) = 0$
2) $(4y + 6)(2y - 8) = 0$
3) $(\frac{2}{3}x - 6)(\frac{1}{5}x - 4) = 0$
4) $\left(5w - \frac{3}{2}\right)\left(2w - \frac{1}{3}\right) = 0$
5) $(3p - 8)(4p - 12) = 0$
6) $(q - 7)(3q - 2) = 0$
7) $\left(\frac{2}{3}n + \frac{8}{12}\right)(n - 7) = 0$
8) $\left(\frac{1}{2}x - 10\right)\left(\frac{1}{3}x + 6\right) = 0$
9) $(3y - 63)\left(\frac{1}{4}y + \frac{7}{2}\right) = 0$
10) $\left(\frac{1}{2}w - \frac{9}{4}\right)\left(\frac{1}{6}w - \frac{3}{2}\right) = 0$
11) $(3z - 18)(2z - 8) = 0$
12) $\left(\frac{2}{3}x + \frac{16}{9}\right)(5x - 25) = 0$

5.3 Resolución de la ecuación cuadrática completa $ax^2 + bx + c = 0$.

Aprendizajes. El alumno:

- ✓ *Utilizará los métodos de factorización, completar un trinomio cuadrado perfecto, y uso de la fórmula general, para resolver una ecuación cuadrática.*
- ✓ *Efectúa las operaciones indicadas al aplicar la fórmula general, de modo que llegue a obtener las dos soluciones correctas.*
- ✓ *Identifica cuáles son los parámetros **a, b** y **c**, aún en ecuaciones "desordenadas" o incompletas y los sustituirá correctamente en la Fórmula General.*

Como vimos al inicio de la unidad la solución de muchos problemas se encuentra resolviendo una ecuación de segundo grado en la variable x de la forma.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$, y si también b, $c \neq 0$ a la ecuación se le llama "completa" en su forma general.

Cada uno de sus términos se les llama: $\underbrace{\mathbf{ax^2}}_{\text{Término cuadrático}} + \underbrace{\mathbf{bx}}_{\text{Término lineal}} + \underbrace{\mathbf{c}}_{\text{Término independiente}} \mathbf{= 0}$

Existen varios métodos para resolver una ecuación cuadrática completa, veremos algunos de ellos que son:

Método por Factorización.
Método de Completar Trinomio Cuadrado Perfecto.
Método por Fórmula General.

5.3.1 Método por Factorización.

Este método consiste en escribir la ecuación cuadrática como producto de dos binomios.

Para utilizar este método la ecuación cuadrática debe de estar en su forma general $ax^2 + bx + c = 0$. Se procede con el método dependiendo de dos casos, cuando $a = 1$ o cuando $a \neq 1$.

Si $a = 1$, la ecuación se factoriza como: $x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$ donde los números m y n deben de cumplir:

$m + n = b$ (cuya suma sea b)
$m \bullet n = c$ (su producto sea c)

Si $a \neq 1$, la ecuación se factoriza como: $ax^2 + bx + c = (px + m)(qx + n)$ donde p, q, m y n son números reales que cumplen otras propiedades que se aclararán en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1) Encuentra las soluciones o raíces de la ecuación $x^2 - x - 12 = 0$.

Solución:

En este caso $a = 1$, $b = -1$ y $c = -12$.

Tenemos que buscar dos números m y n tal que:

$m + n = -1$ (cuya suma sea -1)
$m \bullet n = -12$ (su producto sea -12)

En este caso los números son $m = 3$ y $n = -4$, ya que $3 - 4 = -1$ y $3(-4) = -12$

La factorización buscada es $x^2 - x - 12 = (x + 3)(x - 4)$, como $x^2 - x - 12 = 0$ entonces $(x + 3)(x - 4) = 0$.

Por la propiedad del producto, $x + 3 = 0$ o $x - 4 = 0$ de esto se deduce que

$x = -3$ o $x = 4$

Finalmente las raíces de la ecuación son $x_1 = -3$ y $x_2 = 4$.

COMPROBACIÓN:
Se sustituye cada valor de x en la ecuación dada y debe de quedar igual a cero.
Si $x = -3$: $(-3)^2 - (-3) - 12 = 9 + 3 - 12 = 12 - 12 = 0$
Si $x = 4$: $(4)^2 - (4) - 12 = 16 - 4 - 12 = 16 - 16 = 0$

Ejemplo 2) Encuentra las raíces de la ecuación, $3x^2 - 6x - 72 = 0$.
Solución.
En este caso 3 es factor de cada uno de los términos de la expresión, así que podemos dividir por 3 toda la expresión para obtener la ecuación.

$$x^2 - 2x - 24 = 0$$

Ahora tenemos $a = 1$, $b = -2$ y $c = -24$.
Tenemos que buscar dos números m y n tal que:

$$m + n = -2 \quad \text{(cuya suma sea } -2)$$
$$m \bullet n = -24 \quad \text{(su producto sea } -24)$$

Los números son $m = -6$ y $n = 4$, ya que $-6 + 4 = -2$ y $(-6)(4) = -24$
La factorización buscada es $x^2 - 2x - 24 = (x + 6)(x - 4)$, como $x^2 - 2x - 24 = 0$ entonces $(x + 6)(x - 4) = 0$.
Por la propiedad del producto, $x + 6 = 0$ o $x - 4 = 0$ de esto se deduce que

$$x = -6 \quad \text{o} \quad x = 4$$

Finalmente las raíces de la ecuación son $x_1 = -6$ y $x_2 = 4$.
COMPROBACIÓN:
Se sustituye cada valor de x en la ecuación dada y debe de quedar igual a cero.
Si $x = -6$: $(-6)^2 + 2(-6) - 24 = 36 - 12 - 24 = 36 - 36 = 0$
Si $x = 4$: $(4)^2 + 2(4) - 24 = 16 + 8 - 24 = 24 - 24 = 0$

Ejemplo 3) Encontrar las raíces de la ecuación, $x^2 + \mathbf{x} + 1 = 0$.
Solución.
Buscamos dos números m y n, tal que el producto sea 1 ($m \bullet n = 1$) y que la suma también sea 1 $(m + n) = 1$.
No hay números reales que cumplan con las condiciones impuestas y la ecuación no se puede factorizar, se comprobará posteriormente que las soluciones de esta ecuación no son reales.

Ejemplo 4) Encontrar las raíces de la ecuación, $2x^2 - 5x - 12 = 0$.
Solución:
En este caso $a = 2$, $b = -5$ y $c = -12$.
Debemos encontrar dos números cuyo producto sea $a \bullet c = (2)(-12) = -24$ y cuya suma sea $b = -5$.
Los números que lo cumplen son -8 y 3 ya que $(-8)(3) = -24$ y $-8 + 3 = -5$.
Ahora se reescribe el término medio $-5x$, utilizando $-8x$ y $3x$.

$$2x^2 - 5x - 12 = 2x^2 - 8x + 3x - 12$$

Y finalmente se factoriza la expresión por agrupamiento.

$2x^2 - 8x \quad + \quad 3x - 12 = 2x(x - 4) + 3(x - 4) = (x - 4)(2x + 3)$

Cómo la ecuación está igualada a cero entonces $(x - 4)(2x + 3) = 0$

Por la propiedad del producto: $x - 4 = 0$ o $2x + 3 = 0$, de esto se deduce que

$$x = 4 \quad \text{o} \quad x = -\tfrac{3}{2}$$

Finalmente las raíces de la ecuación son $x_1 = 4$ y $x_2 = -\frac{3}{2}$

COMPROBACIÓN:

Si $x = 4$: $2(4)^2 - 5(4) - 12 = 32 - 20 - 12 = 32 - 32 = 0$

Si $x = -\frac{3}{2}$: $2(-\frac{3}{2})^2 - 5(-\frac{3}{2}) - 12 = 2(\frac{9}{4}) + 5(\frac{3}{2}) - 12 = \frac{9}{2} + \frac{15}{2} - 12 = \frac{24}{2} - 12 = 0$

Ejemplo 5) Encontrar las raíces de la ecuación, $12x^2 - 19x + 5 = 0$.

Solución.

Los valores de los coeficientes numéricos son $a = 12$, $b = -19$ y $c = 5$.

Se deben encontrar dos números cuyo producto sea $a{\bullet}c = (12)(5) = 60$

Y cuya suma sea $b = -19$.

Los números buscados son –15 y – 4 ya que (–15)(– 4) = 60 y –15 – 4 = – 19.

El término medio $- 19x$ se rescribe utilizando $-15x$ y $-4x$.

$$12x^2 - 19x + 5 = 12x^2 - 15x - 4x + 5$$

Y se factoriza por agrupamiento.

$12x^2 - 15x - 4x + 5 = 4x(3x - 1) - 5(3x - 1) = (3x - 1)(4x - 5) = 0$

Las raíces de la ecuación son, $x_1 = \frac{1}{3}$, y $x_2 = \frac{5}{4}$.

COMPROBACIÓN:

Sí $x = \frac{1}{3}$, $12x^2 - 19x + 5 = 12\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 19\left(\frac{1}{3}\right) + 5 = 12\left(\frac{1}{9}\right) - \frac{19}{3} + 5 = \frac{4}{3} - \frac{19}{3} + \frac{15}{3} =$

$$= \frac{19}{3} - \frac{19}{3} = 0.$$

Si $x = \frac{5}{4}$, $12x^2 - 19x + 5 = 12\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 19\left(\frac{5}{4}\right) + 5 = 12\left(\frac{25}{16}\right) - \left(\frac{95}{4}\right) + 5 = \left(\frac{300}{16}\right) - \left(\frac{95}{4}\right) + \left(\frac{20}{4}\right)$

$$= \left(\frac{75}{4}\right) - \left(\frac{95}{4}\right) + \left(\frac{20}{4}\right) = \left(\frac{95}{4}\right) - \left(\frac{95}{4}\right) = 0.$$

5.3.2 Método de Completar Trinomio Cuadrado Perfecto.

Para resolver una ecuación cuadrática Completando Trinomio Cuadrado Perfecto, después de llevar la ecuación a su forma general $ax^2 + bx + c = 0$, realiza el proceso que se muestra en los siguientes ejemplos, en este método también se procede de forma diferente según $a = 1$ o $a \neq 1$.

Ejemplo 1) Resuelve la ecuación $x^2 + 6x + 5 = 0$.

Solución:

Paso 1. Si $a \neq 1$ (el coeficiente cuadrático es diferente de 1), se divide toda la ecuación entre dicho número. Para esta ecuación no es necesario. $x^2 + 6x + 5 = 0$

Paso 2. Se resta 5 en ambos miembros de la ecuación para tener el término independiente solo del lado derecho de la ecuación. $x^2 + 6x = -5$

Paso 3. Se calcula la mitad del coeficiente lineal y se eleva al cuadrado. $\left(\frac{6}{2}\right) = 3,\ 3^2 = 9$

Paso 4. Se suma este valor a ambos miembros de la ecuación. $x^2 + 6x + 9 = 0 = -5 + 9$

$x^2 + 6x + 9 = 4$

Paso 5. En el lado izquierdo de la ecuación tenemos un trinomio cuadrado perfecto que se puede escribir como el cuadrado de un binomio. $x^2 + 6x + 9 = (x - 3)^2$

Entonces $(x - 3)^2 = 4$

Paso 6. Se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación. $x + 3 = \pm\sqrt{4}$

$x + 3 = \pm 2$

Paso 7. Por último se resta 3 en ambos miembros de la ecuación para despejar x. $x = -3 \pm 2$

Las soluciones de la ecuación son, $x_1 = -3 + 2 = -1$ y $x_2 = -3 - 2 = -5$

COMPROBACIÓN:

Se sustituye cada valor de x en la ecuación dada y debe de quedar igual a cero.

Si $x = -1$: $(-1)^2 + 6(-1) + 5 = 1 - 6 + 5 = 6 - 6 = 0$

Si $x = -5$: $(-5)^2 + 6(-5) + 5 = 25 - 30 + 5 = 30 - 30 = 0$

Ejemplo 2) Resuelve la ecuación $-x^2 = -3x - 18$.

Solución:

Se lleva la ecuación a su forma general.

Se suma x^2 en ambos miembros de la ecuación: $-x^2 + x^2 = -3x - 18 + x^2$

$0 = -3x - 18 + x^2$.

Se ordena la ecuación en potencias descendentes: $x^2 - 3x - 18 = 0$.

Se realizan los pasos del ejemplo 1.

Paso 1. Cómo $a = 1$ (el coeficiente cuadrático es igual a 1), la ecuación está lista para seguir con el paso 2. $x^2 - 3x - 18 = 0$

Paso 2. Se suma 18 en ambos miembros de la ecuación para tener el término independiente solo del lado derecho de la ecuación. $x^2 - 3x - 18 + 18 = 0 + 18$

$x^2 - 3x = 18$

Paso 3. Se calcula la mitad del coeficiente lineal y se eleva al cuadrado. $\frac{b}{2} = -\frac{3}{2},\quad \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

Paso 4. Se suma este valor a ambos miembros de la ecuación.

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 18 + \frac{9}{4}$$
$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{81}{4}$$

Paso 5. Con este procedimiento en el lado izquierdo de la ecuación tenemos un trinomio cuadrado perfecto que se puede escribir como un binomio al cuadrado: $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$.

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$$

Paso 6. Se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación.

$$x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{81}{4}}$$
$$x - \frac{3}{2} = \pm\frac{9}{2}$$

Paso 7. Por último se suma $\frac{3}{2}$ en ambos miembros de la ecuación para despejar x.

$$x = \frac{3}{2} \pm \frac{9}{2}$$

Las soluciones de la ecuación son: $x_1 = \frac{3}{2} + \frac{9}{2} = \frac{12}{2} = 6$

$$x_2 = \frac{3}{2} - \frac{9}{2} = -\frac{6}{2} = -3$$

COMPROBACIÓN:
Se sustituye cada valor de x en la ecuación dada y debe de dar una igualdad verdadera.

Si $x = 6$: $-(6)^2 = -3(6) - 18$
$-36 = -18 - 18$
$-36 = -36$

Si $x = -3$: $-(-3)^2 = -3(-3) - 18$
$-9 = 9 - 18$
$-9 = -9$

Ejemplo 3) Resuelve la ecuación $-3m^2 + 6m + 24 = 0$.
Solución:

Paso 1. Como $a \neq 1$ (el coeficiente cuadrático es diferente de 1), se divide toda la ecuación entre dicho número que es – 3.

$$\frac{-3m^2 + 6m + 24}{-3} = \frac{0}{-3}$$ obteniendo:

$$m^2 - 2m - 8 = 0$$

Paso 2. Se suma 8 en ambos miembros de la ecuación para tener el término independiente solo del lado derecho de la ecuación.

$$m^2 - 2m - 8 + 8 = 0 + 8$$
$$m^2 - 2m = 8$$

Paso 3. Determinamos el cuadrado de la mitad del coeficiente lineal.

$$\left(-\frac{2}{2}\right)^2 = (-1)^2 = 1$$

Paso 4. Se suma este valor en ambos miembros de la ecuación.

$$m^2 - 2m + 1 = 8 + 1$$
$$m^2 - 2m + 1 = 9$$

Paso 5. Con este procedimiento en el lado izquierdo

$$(m - 1)^2 = 9$$

de la ecuación tenemos un trinomio cuadrado perfecto que se puede escribir como un binomio al cuadrado: $m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2$

Paso 6. Se obtiene la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación.

$$m - 1 = \pm\sqrt{9}$$
$$m - 1 = \pm 3$$

Paso 7. Por último se suma 1 en ambos miembros de la ecuación para despejar m.

$$m = 1 \pm 3$$

Las soluciones de la ecuación son: $m_1 = 1 + 3 = 4$ y $m_2 = 1 - 3 = -2$

COMPROBACIÓN:

Si $m = 4$: $-3(4)^2 + 6(4) + 24 = -48 + 24 + 24 = -48 + 48 = 0$

Si $m = -2$: $-3(-2)^2 + 6(-2) + 24 = -12 - 12 + 24 = -24 + 24 = 0$

5.3.3 Método por Fórmula General.

Dada una ecuación de segundo grado en su forma general $ax^2 + bx + c = 0$ las soluciones o raíces están dadas por la fórmula general:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En los siguientes ejercicios mostraremos la utilización de esta fórmula para encontrar las soluciones de cada ecuación dada.

Ejemplo 1) Resuelve la ecuación $x^2 + 2x - 8 = 0$ mediante la fórmula general.

Solución:

La ecuación está dada en su forma general donde $a = 1$, $b = 2$ y $c = -8$.

Paso 1. Sustituyendo los valores $a = 1$, $b = 2$ y $c = -8$ en la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-8)}}{2(1)}$$

Paso 2. Realizando las operaciones indicadas:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - (-32)}}{2}$$
$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2}$$
$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2}$$
$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 6}{2}$$

Paso 3. La primera solución se obtiene con el signo positivo.

$$x_1 = \frac{-2 + 6}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Paso 4. La segunda solución se obtiene con el signo negativo.

$$x_2 = \frac{-2 - 6}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Paso 5. Las raíces o soluciones de la ecuación son: $x_1 = 2$ y $x_2 = -4$

COMPROBACIÓN:
Se sustituye cada valor de x en la ecuación dada y debe de quedar igual a cero.
Si $x = 2$: $(2)^2 + 2(2) - 8 = 4 + 4 - 8 = 8 - 8 = 0$
Si $x = -4$: $(-4)^2 + 2(-4) - 8 = 16 - 8 - 8 = 16 - 16 = 0$

Ejemplo 2) Resuelve la ecuación $2x^2 + 4x + 5 = 0$ mediante la fórmula general.
Solución:
La ecuación esta en su forma estándar, con $a = 2$, $b = 4$, $c = 5$.

Paso 1. Sustituyendo los valores a =2, b = 4 y c = –5 en la fórmula.

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(2)(5)}}{2(2)}$$

Paso 2. Haciendo operaciones.

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 40}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-24}}{4}$$

Paso 3. Como la raíz cuadrada de un número con signo negativo no existe en los reales, concluimos que la ecuación No tiene soluciones reales.

Soluciones No reales

Ejemplo 3) Resuelve la ecuación $x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{1}{3} = 0$ mediante la fórmula general.
Solución:
Se puede resolver la ecuación usando los valores $a = 1$, $b = \frac{2}{5}$, y $c = -\frac{1}{3}$.
Pero al multiplicar toda la ecuación por el mínimo común múltiplo de 5 y 3.
Se obtiene la ecuación, $15x^2 + 6x - 5 = 0$, y ahora utilizamos la fórmula con los siguientes valores, $a = 15$, $b = 6$ y $c = -5$.

Paso 1. Sustituyendo los valores a =15, b = 6 y c = – 5 en la fórmula.

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(15)(-5)}}{2(15)}$$

Paso 2. Haciendo operaciones.

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - (-300)}}{30}$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 300}}{30}$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{336}}{30}$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 4\sqrt{21}}{30}$$

Paso 3. La primera solución se obtiene con el signo positivo.

$$x_1 = \frac{-6 + 4\sqrt{21}}{30} = \frac{-3 + 2\sqrt{21}}{15}$$

Paso 4. La segunda solución se obtiene con el signo negativo.

$$x_2 = \frac{-6 - 4\sqrt{21}}{30} = \frac{-3 - 2\sqrt{21}}{15}$$

Paso 5. Las raíces de la ecuación son: $x_1 = \frac{-3+2\sqrt{21}}{15}$, $x_2 = \frac{-3-2\sqrt{21}}{15}$

COMPROBACIÓN:

Si $x = \frac{-3+2\sqrt{21}}{15}$, $x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{1}{3} = \left(\frac{-3+2\sqrt{21}}{15}\right)^2 + \frac{2}{5}\left(\frac{-3+2\sqrt{21}}{15}\right) - \frac{1}{3} = \frac{9-12\sqrt{21}+84}{225} + \frac{-6+4\sqrt{21}}{75} - \frac{1}{3} =$

$= \frac{93-12\sqrt{21}-18+12\sqrt{21}-75}{225} = \frac{93-12\sqrt{21}-93+12\sqrt{21}}{225} = \frac{0}{225} = 0.$

Si $x = \frac{-3-2\sqrt{21}}{15}$, $x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{1}{3} = \left(\frac{-3-2\sqrt{21}}{15}\right)^2 + \frac{2}{5}\left(\frac{-3-2\sqrt{21}}{15}\right) - \frac{1}{3} = \frac{9+12\sqrt{21}+84}{225} + \frac{-6-4\sqrt{21}}{75} - \frac{1}{3} =$

$= \frac{93+12\sqrt{21}-18-12\sqrt{21}-75}{225} = \frac{93+12\sqrt{21}-93-12\sqrt{21}}{225} = \frac{0}{225} = 0.$

En algunas ocasiones se nos puede presentar una ecuación cuadrática en forma más complicada como en los siguientes ejercicios.

Ejemplo 4) Resolver la ecuación $2x(5 + 3x) - 9x + 6 = 7(5 - x)(5 + x)$

Solución:

En estos casos primero se debe simplificar la ecuación haciendo las operaciones indicadas, reduciendo los términos semejantes e igualando la ecuación a cero.

$2x(5 + 3x) - 9x + 6 = 7(5 - x)(5 + x)$

$10x + 6x^2 - 9x + 6) = 7(25 + 5x - 5x - x^2)$

$6x^2 + x + 6 = 7(25 - x^2)$

$6x^2 + x + 6 = 175 - 7x^2$

$6x^2 + x + 6 - 175 + 7x^2 = 0$

$13x^2 + x - 169 = 0.$

Los valores de los coeficientes son los siguientes, $a = 13$, $b = 1$ y $c = -169$.

Paso 1. Sustituyendo los valores a =13, b = 1 y c = – 169 en la fórmula.

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(13)(-169)}}{2(13)}$$

Paso 2. Haciendo operaciones.

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8788}}{26}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{8789}}{26}$$

Paso 3. La primera solución se obtiene con el signo positivo.

$$x_1 = \frac{-1 + 93.74}{26}$$

$$x_1 = 3.56$$

Paso 3. La segunda solución se obtiene con el signo negativo.

$$x_2 = \frac{-1 - 93.74}{26}$$

$$x_2 = \frac{-94.74}{26}$$

x_2 = –3.64

COMPROBACIÓN.

Para x_1 = 3.56, $13x^2 + x - 169 = 13(3.56)^2 + 3.56 - 169 =$
$13(12.6736) + 3.56 - 169 = 164.7568 + 3.56 - 169$
$= 168.3168 - 169 = -0.6832$

No nos da el cero exacto por la aproximación que se toma de la raíz.

Para x_2 = –3.64, $13x^2 + x - 169 = 13(-3.64)^2 - 3.64 - 169 =$
$13(13.2496) - 172.64 = 172.2448 - 172.64 = -0.3952$

Nuevamente no se obtiene el cero por el valor aproximado de la raíz.

Ejemplo 5) Resolver la ecuación $18 + \frac{3w}{w-1} = 2 + \frac{w+3}{w+2}$

Solución:

Multiplicando toda la ecuación por $(w - 1)(w + 2)$ toda la ecuación.

$$18(w-1)(w+2) + 3w(w+2) = 2(w-1)(w+2) + (w+3)(w-1)$$

$$18(w^2 + w - 2) + 3w^2 + 6w = 2(w^2 + w - 2) + w^2 + 2w - 3$$

$$18w^2 + 18w - 36 + 3w^2 + 6w = 2w^2 + 2w - 4 + w^2 + 2w - 3$$

$$21w^2 + 24w - 36 = 3w^2 + 4w - 7$$

$$18w^2 + 20w - 29 = 0$$

Los valores de los coeficientes son los siguientes, a = 18, b = 20 y c = –29.

Paso 1. Sustituyendo los valores a =18, b = 20 y c = – 29 en la fórmula.

$$w_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{(20)^2 - 4(18)(-29)}}{2(18)}$$

Paso 2. Haciendo operaciones.

$$w_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 2088}}{36}$$

$$w_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{2488}}{36}$$

Paso 3. La primera solución se obtiene con el signo positivo.

$$w_1 = \frac{-20 + 49.87}{36}$$

w_1 = 0.829

Paso 3. La segunda solución se obtiene con el signo negativo.

$$w_2 = \frac{-20 - 49.87}{36}$$

$$w_2 = \frac{-69.87}{36}$$

w_2 = –1.94

COMPROBACIÓN.

Si $w = 0.829$, $18w^2 + 20w - 29 = 18(0.829)^2 + 20(0.829) - 29 =$
$18(0.687) + 16.58 - 29 = 12.366 - 12.42 = -0.054$

Si $w = -1.94$, $18w^2 + 20w - 29 = 18(-1.94)^2 + 20(-1.94) - 29 =$
$=18(3.7636) - 38.8 - 29 = 67.7448 - 67.8 = -0.0552$

Las dos aproximaciones al cero se deben al redondeo que se hace para obtener el valor de las raíces.

Ejercicios 5.3

Sección 5.3.1: Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones por el método de **Factorización** cuando esto sea posible.

1. $x^2 + 7x + 6 = 0$
2. $y^2 - 12y + 11 = 0$
3. $x^2 - 16x + 64 = 0$
4. $x^2 + 10x + 25 = 0$
5. $x^2 - 4x + 3 = 0$
6. $y^2 - 9y + 15 = 0$
7. $x^2 + x + 7 = 0$
8. $2x^2 - 5x + 13 = 0$
9. $m^2 - 8m + 18 = 0$
10. $x^2 - 5x - 14 = 0$
11. $x^2 + 2x - 63 = 0$
12. $x^2 + 12x + 36 = 0$
13. $10x^2 + x - 2 = 0$
14. $2x^2 - x - 3 = 0$
15. $20x^2 - 13x + 2 = 0$
16. $21x^2 + 50x - 16 = 0$
17. $2x^2 + 5x - 3 = 0$
18. $5x^2 - 9x - 2 = 0$

Sección 5.3.2: Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones por el método de **Completar Trinomio Cuadrado Perfecto**.

1. $x^2 + 2x - 3 = 0$
2. $x^2 - 6x + 8 = 0$
3. $x^2 - 4x - 5 = 0$
4. $x^2 + 8x + 12 = 0$
5. $x^2 + 3x + 2 = 0$
6. $y^2 + 4y - 32 = 0$
7. $x^2 - 3x + 15 = 0$
8. $x^2 - 9x + 14 = 0$
9. $m^2 + 2m + 15 = 0$
10. $x^2 + 5x + 4 = 0$
11. $x^2 + 5x + 6 = 0$
12. $x^2 - 2x + 4 = 0$
13. $x^2 + 9x + 18 = 0$
14. $x^2 - 9x + 18 = 0$
15. $x^2 - 15x + 36 = 0$
16. $x^2 = 3x + 28$
17. $-4x = -x^2 + 12$
18. $x^2 + 3x + 6 = 0$

Sección 5.3.3: Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones por la **Fórmula General.**

1. $x^2 + 2x - 8 = 0$
2. $2x^2 + 4x - 5 = 0$
3. $-2p^2 - 5p = 6$
4. $x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{1}{3} = 0$
5. $x^2 - 3x + 2 = 0$
6. $x^2 + 6x + 8 = 0$
7. $x^2 - 9x + 20 = 0$
8. $x^2 - 3x - 10 = 0$
9. $x^2 - 6x = -5$
10. $x^2 = 13x - 36$
11. $x^2 - 36 = 0$
12. $x^2 - 6x = 0$
13. $z^2 + 17z + 72 = 0$
14. $2x^2 - 3x + 2 = 0$
15. $2y^2 - 7y + 4 = 0$
16. $2x^2 - 7x = -5$
17. $6x^2 = -x + 1$
18. $2x^2 = 4x + 1$

5.4 Análisis del discriminante $b^2 - 4ac$.

Aprendizajes. El alumno:

- ✓ *Calcula el valor del discriminante $b^2 - 4ac$ para conocer la naturaleza y el número de soluciones distintas.*
- ✓ *Comprende que cuando en el radical se obtiene un número negativo, no existe ningún número real que satisfaga esta condición, por lo que se requiere entrar al terreno de otro tipo de números llamados complejos que se forman a partir del número $i = \sqrt{-1}$ y son de la forma **a + bi.***
- ✓ *Calcula el valor del Discriminante **$b^2 - 4ac$** para conocer la naturaleza y el número de soluciones distintas.*
- ✓ *Dadas las dos raíces de una ecuación, construirá la ecuación de la que provienen.*

Las raíces o soluciones de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, se pueden encontrar utilizando la fórmula general:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A la expresión dentro del radical es llamado el **discriminante**: $b^2 - 4ac$

Analizando su discriminante podemos conocer el número y el tipo de raíces que tiene la ecuación.

5.4.1 Número y naturaleza de las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

En toda ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, dependiendo del valor de su discriminante $b^2 - 4ac$ se puede afirmar lo siguiente:

Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación cuadrática tiene dos raíces reales diferentes.
Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación cuadrática tiene una raíz real.
Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación cuadrática no tiene soluciones reales.

Analizaremos cada uno de estos casos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1) Indica el número y naturaleza de las raíces que tiene la ecuación cuadrática $11x = 6x^2 - 10$.
Solución:
La ecuación se ordena en su forma general: $6x^2 - 11x - 10 = 0$.
Sus coeficientes son: $a = 6$, $b = -11$ y $c = -10$
El valor del discriminante es: $b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4(6)(-10)$
$= 121 + 240$
$= 341 > 0$
Como el valor del discriminante es positivo, la ecuación **tiene dos soluciones reales diferentes**.

Ejemplo 2) Indica el número de raíces que tiene la ecuación $x^2 - 8x + 16 = 0$.
Solución:
Como la ecuación está en su forma general, los valores de sus coeficientes son:
$a = 1$, $b = -8$ y $c = 16$.
El valor del discriminante es: $b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(1)(16)$
$= 64 - 64$
$= 0$
Como el valor del discriminante es 0, la ecuación **tiene una sola raíz**.

Ejemplo 3) Indica el número y naturaleza de las raíces que tiene la ecuación cuadrática $2x^2 - 4x + 6 = 0$.
Solución:
Como la ecuación está en su forma general, los valores de sus coeficientes son:
$a = 2$, $b = -4$ y $c = 6$.
El valor del discriminante es: $b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(2)(6)$
$= 16 - 48$

$= -32 < 0$

Como el valor del discriminante es negativo, la ecuación **no tiene soluciones reales**.

Ejemplo 4) Indica cuántas raíces y de qué tipo son las raíces de la ecuación cuadrática $2x^2 - 11x - 21 = 0$.

Los valores de las constantes son, $a = 2$, $b = -11$ y $c = -21$

Paso 1. El valor del discriminante es.	$d = b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4(2)(-21)$ $= 121 + 168 = 289$
Paso 2. $d = 289 > 0$	La ecuación tiene dos raíces reales

Ejemplo 5) Indica cuántas raíces y de qué tipo son las raíces de la ecuación cuadrática $25y^2 - 20y + 4 = 0$.

Los valores de los coeficientes son, $a = 25$, $b = -20$ y $c = 4$

Paso 1. El valor del discriminante es.	$d = b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4(25)(4)$ $= 400 - 400 = 0$
Paso 2. $d = 0$	La ecuación tiene una raíz real doble

Ejemplo 6) Indica cuántas raíces y de qué tipo son las raíces de la ecuación cuadrática $3z^2 + z + 30 = 0$.

Los valores de los coeficientes son, $a = 3$, $b = 1$ y $c = 30$

Paso 1. El valor del discriminante es.	$d = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(3)(30)$ $= 1 - 360 = -359$
Paso 2. $d = -359 < 0$	La ecuación no tiene raíces reales

5.4.2 El número *i*.

Al resolver la ecuación cuadrática.

$$x^2 + 1 = 0$$

Sus raíces son $x_{1,2} = \pm\sqrt{-1}$

Como no existe algún número real g, tal que $g^2 = -1$, se introduce la unidad imaginaria $\boldsymbol{i}$, con la propiedad: $\boldsymbol{i}^2 = -1$, también llamado Número Complejo.

Con esto las soluciones de la ecuación anterior son Complejas o Imaginarias, estas son: $x_{1,2} = \pm\,\boldsymbol{i}$

Y las ecuaciones de la forma $\boldsymbol{x}^2 + k = 0$, tienen solución como se muestra en los siguientes ejercicios, cuando k es positivo.

Ejemplo 1) Encuentra las raíces de la ecuación $z^2 + 81 = 0$.

Solución:
Para encontrar sus raíces o soluciones seguiremos los siguientes pasos.

Paso 1. Restando 81 a ambos miembros de la ecuación.	$z^2 = -81$
Paso 2. Obteniendo la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación.	$z = \pm\sqrt{-81}$
Paso 3. Factorizando – 81 = (–1)(81)	$z = \pm\sqrt{(-1)(81)}$
Paso 4. La raíz de un producto es el producto de las raíces.	$z = \pm\sqrt{-1}\sqrt{81}$
Paso 5. Haciendo las operaciones indicadas.	$z = \pm 9i$

Las raíces imaginarias o complejas de la ecuación son: $z_1 = 9\boldsymbol{i}$, $z_2 = -9\boldsymbol{i}$

COMPROBACIÓN:
Sustituyendo las raíces en la ecuación $z^2 + 81 = 0$ y recordando que $\boldsymbol{i}^2 = -1$.
Si $z = 9\boldsymbol{i}$, $(9\boldsymbol{i})^2 + 81 = 9^2\,\boldsymbol{i}^2 + 81 = 81(-1) + 81 = -81 + 81 = 0$
Si $z = -9\boldsymbol{i}$, $(-9\boldsymbol{i})^2 + 81 = (-9)^2\,\boldsymbol{i}^2 + 81 = 81(-1) + 81 = -81 + 81 = 0$

Ejemplo 2) Encuentra las raíces de la ecuación $5x^2 + 720 = 0$
Solución:

Paso 1. Dividiendo toda la ecuación entre 5.	$x^2 + 144 = 0$
Paso 2. Restando 144 a ambos miembros de la ecuación.	$x^2 = -144$
Paso 3. Sacando raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación.	$x = \pm\sqrt{-144}$
Paso 4. Factorizando –144 = (–1)(144)	$x = \pm\sqrt{(-1)(144)}$
Paso 5. La raíz de un producto es el producto de las raíces.	$x = \pm\sqrt{-1}\sqrt{144}$
Paso 6. Haciendo las operaciones indicadas.	$x = \pm 12i$

Las raíces imaginarias de la ecuación son: $x_1 = 12i$, $x_2 = -12i$

COMPROBACIÓN.
Sustituyendo las raíces en la ecuación $5x^2 + 720 = 0$ y recordando que $\boldsymbol{i}^2 = -1$.
Sí $x_1 = 12i$, $5x^2 + 720 = 5(12i)^2 + 720 = 5(12)^2(i)^2 + 720 = 5(144)(-1) + 720 =$
$= -720 + 720 = 0$
Sí $x_2 = -12i$, $5x^2 + 720 = 5(-12i)^2 + 720 = 5(-12)^2(i)^2 + 720 = 5(144)(-1) + 720 =$
$= -720 + 720 = 0$

Ejemplo 3) Encuentra las raíces de la ecuación $3w^2 + 7 = 0$.
Solución:

Paso 1. Dividiendo toda la ecuación por 3. $w^2 + \frac{7}{3} = 0$

Paso 2. Restando $\frac{7}{3}$ a ambos miembros de la ecuación. $w^2 = -\frac{7}{3}$

Paso 3. Sacando raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación. $w = \pm\sqrt{-\frac{7}{3}}$

Paso 4. Factorizando $-\frac{7}{3} = (-1)(\frac{7}{3})$ $w = \pm\sqrt{(-1)(\frac{7}{3})}$

Paso 5. La raíz de un producto es el producto de las raíces. $w = \pm\sqrt{-1}\sqrt{\frac{7}{3}}$

Paso 6. Haciendo las operaciones indicadas. $w = \pm i\sqrt{\frac{7}{3}}$

Las raíces imaginarias de la ecuación son: $w_1 = \sqrt{\frac{7}{3}}i$, $w_2 = -\sqrt{\frac{7}{3}}i$

COMPROBACIÓN.

Sustituyendo las raíces en la ecuación $3w^2 + 7 = 0$ y recordando que $\boldsymbol{i}^2 = -1$.

Si $w = \sqrt{\frac{7}{3}}i$, $3x^2 + 7 = 3(\sqrt{\frac{7}{3}}i)^2 + 7 = 3(\sqrt{\frac{7}{3}})^2(i)^2 + 7 = 3(\frac{7}{3})(-1) + 7 =$

$= -7 + 7 = 0$

Si $w = -\sqrt{\frac{7}{3}}i$, $3x^2 + 7 = 3(-\sqrt{\frac{7}{3}}i)^2 + 720 = 3(-\sqrt{\frac{7}{3}})^2(i)^2 + 720 = 3(\frac{7}{3})(-1) + 720 =$

$= -7 + 7 = 0$

Ejemplo 4) Encuentra las raíces de la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$.

Solución:

Paso 1. Se utiliza la fórmula general con $a = 1$, $b = 1$ y $c = 1$.

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

Paso 2. Haciendo las operaciones indicadas.

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

Las raíces imaginarias de la ecuación son: $x_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $x_2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

COMPROBACIÓN.

Si $x = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $x^2 + x + 1 = \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) + 1 = \left(\frac{1-2\sqrt{3}i+3i^2}{4}\right) + \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) + 1$

$= \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} + 1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = -1 + 1 = 0.$

Si $x = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $x^2 + x + 1 = \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right) + 1 = \left(\frac{1+2\sqrt{3}i+3i^2}{4}\right) + \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right) + 1$

$= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} + 1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = -1 + 1 = 0.$

5.4.3 Raíces dobles.

Ya sabemos que si en una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ su discriminante $b^2 - 4ac = 0$, entonces la ecuación cuadrática tiene una raíz. A este tipo de raíz se le llama **raíz doble**, como lo veremos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1) Encuentra las raíces de la ecuación $x^2 + 12x + 36 = 0$.
Solución:
Para esta ecuación los valores de las constantes son, $a = 1$, $b = 12$ y $c = 36$.
Entonces el valor de su discriminante es:

$$b^2 - 4ac = 12^2 - 4(1)(36)$$
$$= 144 - 144 = 0$$

Si observas el miembro izquierdo de la ecuación cuadrática es un trinomio cuadrado perfecto, y se puede escribir como el cuadrado de un binomio:

$$x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$$

Entonces: $(x + 6)^2 = (x + 6)(x + 6) = 0$
Por la propiedad del producto nulo $x + 6 = 0$, así que $x = -6$.
Esta acción se cumple dos veces, por tal razón $x = -6$ es una **raíz doble**.

Ejemplo 2) Encuentra las raíces de la ecuación $y^2 + 4y + 4 = 0$.
Solución:
Para esta ecuación los valores de las constantes son, $a = 1$, $b = 4$ y $c = 4$.
Entonces el valor del discriminante es.

$$b^2 - 4ac = 4^2 - 4(1)(4)$$
$$= 16 - 16 = 0$$

Si observas el miembro izquierdo de la ecuación cuadrática es un trinomio cuadrado perfecto, y se puede escribir como el cuadrado de un binomio:

$$y^2 + 4y + 4 = (y + 2)^2 = 0$$

Entonces: $(y + 2)^2 = (y + 2)(y + 2) = 0$
Por la propiedad del producto nulo $y + 2 = 0$, así que $y = -2$.
Esta acción se cumple dos veces, por tal razón $y = -2$ es una **raíz doble**.

Ejemplo 3) Encuentra las raíces de la ecuación $4x^2 - 12x + 9 = 0$.
Solución:
Para esta ecuación los valores de las constantes son, $a = 4$, $b = -12$ y $c = 9$.
Entonces el valor del discriminante es.

$$b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4(4)(9)$$
$$= 144 - 144 = 0$$

Si observas el miembro izquierdo de la ecuación cuadrática es un trinomio cuadrado perfecto, y se puede escribir como el cuadrado de un binomio:

$$4x^2 - 12x + 9 = (2x + 3)^2 = 0$$

Entonces: $(2x - 3)^2 = (2x - 3)(2x - 3) = 0$

Por la propiedad del producto nulo $2x - 3 = 0$, así que $x = \frac{3}{2}$.

Esta acción se cumple dos veces, por tal razón $x = \frac{3}{2}$ es una **raíz doble**.

Ejercicios 5.4

Sección 5.4.1: En cada caso indica el número y naturaleza de las soluciones de cada ecuación, analizando su discriminante.

1. $x^2 + 4x - 3 = 0$
2. $3w^2 + w + 3 = 0$
3. $2z^2 - 4z + 7 = 0$
4. $-2x^2 + x - 8 = 0$
5. $5y^2 + 3y - 7 = 0$
6. $2x^2 = 16x - 32$
7. $-3x^2 + 5x - 8 = 0$
8. $4x^2 - 8x + 6 = 0$
9. $y^2 - 22y + 121 = 0$
10. $9w^2 = -6w - 1$
11. $-2x^2 - x - 3 = 0$
12. $2x^2 - 7x + 4 = 0$
13. $5z^2 + 20z + 4 = 0$
14. $x^2 + 8x + 15 = 0$
15. $y^2 + 6y + 9 = 0$
16. $2x^2 - x = 6$
17. $-z^2 = -7z + 5$
18. $3x^2 = 18x - 27$

Sección 5.4.2: Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones y encuentra sus raíces complejas.

1. $x^2 + 16 = 0$
2. $t^2 + 1 = 0$
3. $x^2 + x + 1 = 0$
4. $2w^2 - 2w + 5 = 0$
5. $2x^2 + 2x + 5 = 0$
6. $2z^2 = 16z - 32$
7. $x^2 + 6x + 10 = 0$
8. $x^2 - 2x + 2 = 0$
9. $4x^2 - 4x + 2 = 0$
10. $4x^2 = 8x - 13$
11. $9x^2 + 36x + 45 = 0$
12. $p^2 + 2p + 2 = 0$
13. $4z^2 + 12z + 10 = 0$
14. $x^2 + 9 = 0$
15. $y^2 + 6y + 9 = 0$
16. $2x^2 - 17x = -35$
17. $x^2 = 2x - 5$
18. $t^2 = -2t + 5$

Sección 5.4.3: Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones y encuentra sus raíces dobles.

1. $x^2 - 12x + 36 = 0$
2. $x^2 + 8x + 16 = 0$
3. $3x^2 + 12x + 12 = 0$

4. $-3x^2 + 30x - 75 = 0$ 5. $-2x^2 - 24x - 72 = 0$ 6. $5x^2 = 100x - 500$

7. $x^2 + 16x + 64 = 0$ 8. $4x^2 - 12x + 9 = 0$ 9. $25x^2 + 40x + 16 = 0$

10. $9x^2 = 12x - 4$ 11. $4x^2 - 28x + 49 = 0$ 12. $64x^2 + 80x + 25 = 0$

13. $9z^2 + 48z + 64 = 0$ 14. $81x^2 + 36x + 4 = 0$

15. $25y^2 - 60y + 36 = 0$ 16. $25x^2 + 10x = -1$

17. $9x^2 = 42x - 49$ 18. $64w^2 = -16w - 1$

5.5 Aplicaciones de la Ecuación Cuadrática.

Aprendizajes. El alumno:

- ✓ *A partir del análisis del modelo algebraico de un problema, valora el método algebraico de resolución que resulta más conveniente.*
- ✓ *A partir del análisis del modelo algebraico de un problema, anticipa el tipo de soluciones que éste arroja.*
- ✓ *Interpreta en el contexto del problema lo que significan las soluciones encontradas y elegirá, si es el caso, aquella que tiene sentido en ese contexto.*

Estas listo para poder resolver problemas cuyo planteamiento es una ecuación cuadrática, porque ya puedes encontrar sus soluciones con el método que más te agrade, veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1) Una frutería vende 300 kilos de plátanos cada día cuando el precio por kilo es de \$12, el gerente de ventas observa que por cada \$0.50 de descuento, se venden 50 kilos más de plátano. ¿Cuál deberá ser el precio del kilo de plátano, si quieren tener una venta semanal de \$30800?

Solución:

Si x representa el número de descuentos de \$0.5 realizados.

Las ventas diarias deben de ser de: $V=\frac{30800}{7} = 4400$, se venden diariamente \$4400

El precio del kilo de plátano debe ser de: $P = 12 - 0.5x$

La cantidad de kilos de plátano vendidos debe ser de: $C = 300 + 50x$

Las ventas diarias están dadas por: $V = (12 - 0.5x)(300 + 50x)$

Si igualamos la venta diaria a la cantidad que se desea obtener, obtenemos la ecuación: $(12 - 0.5x)(300 + 50x) = 4400$

Después de igualar la ecuación a cero y realizar las multiplicaciones indicadas, se simplifican los términos semejantes en la ecuación y se obtiene:

$$-x^2 + 18x - 32 = 0$$

Al resolverla las raíces son: $x_1 = 2$, $x_2 = 16$

Respuesta: Para que la venta semanal sea de \$30800 puede haber dos precios del kilo de plátanos, si $x = 2$ el precio es de \$11, pero si $x = 16$ el precio es de \$4.

COMPROBACIÓN:
Sí $x = 2$ descuentos:
Precio del plátano: $12 – 0.5x = 12 – 0.5(2) = 12 – 1 = 11$, es decir \$11 por kilo.
La cantidad de kilos de plátano que se deben vender son: $300 + 50x = 300 + 50(2) = 300 + 100 = 400$, 400 kilos de plátano.
Las ventas diarias son: $(12 – 0.5x)(300 + 50x) = (11)(400) = 4400$, \$4400 diarios
Las ventas semanales son de: $(7)(4400) = 30800$, \$30800

Sí $x = 16$ descuentos:
El precio del plátano es: $12 – 0.5x = 12 – 0.5(16) = 12 – 8 = 4$, \$4.00
La cantidad de kilos de plátano que se deben vender son: $300 + 50x = 300 + 50(16) = 300 + 800 = 1100$, 1100 kilos de plátano.
Las ventas diarias son de: $(12 – 0.5x)(300 + 50x) = (4)(1100) = 4400$, \$4400.00
Las ventas semanales son de: $(7)(4400) = 30800$, \$30800.00

Ejemplo 2) Sebastián vive a 360 km de la casa de su mamá. Si viaja en su coche 12 km/hora más rápido de lo usual, llega a la casa de su mamá una hora antes. ¿A qué velocidad maneja normalmente su coche?

Solución:
Si x es la velocidad normal, el tiempo que hace para ir a la casa de su mamá es:

$$t = \frac{360}{x}$$

Y el tiempo que hace si maneja 12 km/hora más rápido es: $t - 1 = \frac{360}{x+12}$
Al despejar t en esta ultima ecuación tenemos $1 + \frac{360}{x+12}$, al igualar las dos expresiones de t, se tiene la ecuación, $\frac{360}{x} = 1 + \frac{360}{x+12}$.
Multiplicando toda la ecuación por $x(x + 12)$ se obtiene la ecuación:

$$360(x + 12) = x(x + 12) + 360x$$

Después de hacer las multiplicaciones, simplificar los términos semejantes e igualar a cero tenemos la ecuación cuadrática: $x^2 + 12x – 4320 = 0$
Las raíces de la ecuación son: $x_1 = 60$ $x_2 = – 72$.

Respuesta: Sebastián maneja normalmente su coche a 60 km/h.

COMPROBACIÓN:
El valor de $x = – 72$ no nos sirve para el problema ya que no hay velocidades negativas.
Sí $x = 60$:
Tiempo que hace para ir a la casa de su mamá es: $t = \frac{360}{60} = 6$ horas
Tiempo que hace si maneja 12 km/hora más rápido es:

$$t = \frac{360}{60 + 12} = \frac{360}{72} = 5$$ que corresponde a una hora menos.

Ejemplo 3) Un deportista caminó 36 km en un cierto número de horas. Sí hubiese caminado 3 km más por hora habría tardado 6 horas menos en recorrer la misma distancia. ¿Cuántas horas ha estado caminando?

Solución:
Si x es la velocidad del deportista y h son las horas que duró la caminata, la velocidad a la que recorrió el camino es: $x = \frac{36}{h}$
Si hubiese caminado 3 kilómetros más por hora es $x + 3$, y hubiera tardado 6 horas menos es $h - 6$, la nueva velocidad del recorrido es: $x + 3 = \frac{36}{h-6}$
Al despejar x se tiene: $x = \frac{36}{h - 6} - 3$
Igualando los dos valores de x se tiene la ecuación: $\frac{36}{h} = \frac{36}{h - 6}. - 3$
Multiplicando ambos miembros por $h(h - 6)$ se obtiene la ecuación:

$$36(h - 6) = 36h - 3h\,(h - 6)$$

Al hacer las multiplicaciones indicadas, simplificar e igualar a cero, se llega a la ecuación cuadrática: $-h^2 + 6h + 72 = 0$
Y al resolverla se obtienen las raíces $h_1 = -6$, $h_2 = 12$

Respuesta: El deportista ha estado caminando 12 horas.

COMPROBACIÓN:
El valor de $h_1 = -6$ no sirve para el problema, ya que no podemos considerar tiempos negativos.
Para $h_2 = 12$, sustituyendo en $x = \frac{36}{h}$ se tiene que $x = 3$ km
Efectivamente si hubiese caminado 3 km más por hora serían 6 km en una hora, así que los 36 km los recorrería en 6 horas, que son 6 horas menos de las que ha estado caminando.

Ejemplo 4) Carolina reparte 96 revistas entre sus amigos, dándole a cada uno tantas revistas como amigos son más 4 revistas. ¿Cuántos amigos tenía Carolina?

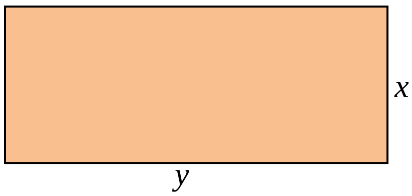
Solución:
Sí x el número de amigos, el número de revistas para cada amigo es $x + 4$.
Entonces el producto del números de amigos por las revistas para cada uno debe ser 96 tenemos: $x(x + 4) = 96$.
Al hacer la multiplicación indicada queda $96 = x^2 + 4x$, e igualando la ecuación a cero se tiene la ecuación de segundo grado: $0 = x^2 + 4x + 96$.
Resolviendo la ecuación sus raíces son: $x_1 = -12$ y $x_2 = 8$.
El valor de $x_1 = -12$ no se considera para este problema ya que no podemos tener un número de amigos negativo.

Respuesta: Para $x_2 = 8$ tenemos la solución del problema, son 8 amigos.

COMPROBACIÓN:
Si Carolina tenía 8 amigos, a cada uno le dio 8 + 4 = 12 revistas y 8(12) = 96.

Ejemplo 5) Determina la longitud de los lados de un terreno rectangular sabiendo que su semi-perímetro (mitad del perímetro) es 30 m y su área es 221 m^2.

Solución:
Un dibujo siempre es de gran ayuda para comprender mejor el problema:



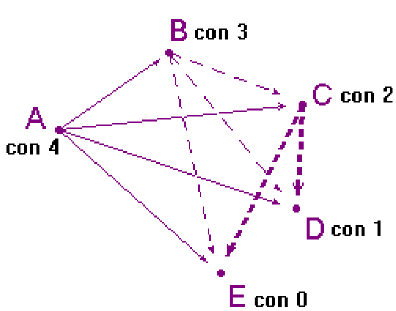
Sea y el lado mayor y x el lado menor del terreno, su semi-perímetro es igual a $x + y = 30$, y su área igual a $221 = x \cdot y$.
Despejando y del semi-perímetro se obtiene $y = 30 - x$,
Se sustituye este valor en el área y se tiene $x(30 - x) = 221$.
Al hacer las multiplicaciones indicadas e igualando a cero se obtiene la ecuación cuadrática $-x^2 + 30x - 221 = 0$.
Resolviendo la ecuación sus raíces son: $x_1 = 13$ y $x_2 = 17$.
Si $x = 13$ entonces $y = 30 - 13 = 17$.
Si $x = 17$ entonces $y = 30 - 17 = 13$.

Respuesta: Las dimensiones del terreno son: largo 17 metros, ancho 13 metros.

COMPROBACIÓN:
Semi-perímetro: 13 + 17 = 30 Área: 13(17) = 221
Se cumplen las condiciones del problema.

Ejemplo 6) En un torneo de ajedrez cada maestro juega una vez con cada uno de los restantes. Si en total se juegan 45 partidas. ¿Cuántos jugadores toman parte en el torneo?

Solución:
Un diagrama nos ayuda a comprender mejor el problema, suponiendo que son 5 maestros jugadores, en total hay 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 10 partidas.



Supongamos que hay x maestros en el torneo.
El total de partidas será:
$x + (x - 1) + (x - 2) + \ldots.. + 2 + 1 + 0 = \frac{x(x-1)}{2}$
y como en total son 45 partidas, se puede establecer la ecuación: $\frac{x(x-1)}{2} = 45$
Que es equivalente a: $x(x - 1) = 90$.
Haciendo la multiplicación e igualando a cero se tiene la ecuación: $x^2 - x - 90 = 0$

Resolviéndola sus raíces o soluciones son: $x_1 = 10$ y $x_2 = -9$.

Respuesta: Toman parte en el torneo 10 jugadores, ya que no tiene sentido para el problema, un número negativo.

COMPROBACIÓN:
Primer maestro juega con 9, segundo maestro juega con 8, etc.
En total hay 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 45 partidas en total.

Ejemplo 7) Un grupo de abejas, cuyo número era igual a la raíz cuadrada de la mitad de todo su enjambre, se posó sobre un jazmín, habiendo dejado muy atrás a $\frac{8}{9}$ del enjambre; sólo una abeja del mismo enjambre revoloteaba en torno a un loto, atraída por el zumbido de una de sus amigas que cayó imprudentemente en la trampa de la florecilla, de dulce fragancia. ¿Cuántas abejas formaban el enjambre?

Solución:
Supongamos que x es el número de abejas en el enjambre.

La raíz cuadrada de la mitad del enjambre es $\sqrt{\frac{x}{2}}$

Los $\frac{8}{9}$ del enjambre es $\frac{8x}{9}$.

Tomemos en cuenta las 2 abejas que se separaron del enjambre.

La ecuación cuya solución resuelve el problema es: $\sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{8}{9}x + 2 = x$

Encontraremos una ecuación equivalente más sencilla.

Pasando el término lineal y el independiente al otro lado de la igualdad nos da:

$$\sqrt{\frac{x}{2}} = x - \frac{8}{9}x - 2$$

$$\sqrt{\frac{x}{2}} = \frac{1}{9}x - 2$$

Elevando al cuadrado toda la ecuación: $\frac{x}{2} = \left(\frac{1}{9}x - 2\right)^2$

Multiplicando la ecuación por 2, tenemos: $x = 2\left(\frac{x}{9} - 2\right)^2$

Elevando al cuadrado el binomio: $x = 2(\frac{1}{81}x^2 - \frac{4}{9}x + 4)$

Al hacer la multiplicación por 2 tenemos: $x = \frac{2x^2}{81} - \frac{8x}{9} + 8$

Finalmente multiplicando todo por 81 e igualando a cero tenemos la ecuación cuadrática: $0 = 2x^2 - 153x + 648$.

Las soluciones o raíces de la ecuación son: $x_1 = 72$ y $x_2 = \frac{9}{2}$

Respuesta: Había 72 abejas forman el enjambre, no puede haber $\frac{9}{2} = 4.5$ ya que es ilógico fracciones de abejas.

COMPROBACIÓN:

La raíz cuadrada de la mitad del enjambre es $\sqrt{\frac{72}{2}} = 6$

Los $\frac{8}{9}$ del enjambre es $\frac{8(72)}{9} = 64$

Más las 2 abejas que se separaron del enjambre, son en total 72 abejas.

Ejercicios 5.5

Encuentra la solución para cada uno de los siguientes problemas.

1) Un granjero desea cercar un terreno rectangular de 46 metros de perímetro. Un río corre a lo largo de un lado mayor, por lo cual no cercará ese lado. Encontrar cuántos metros de cerca debe comprar para cercar los tres lados del terreno se éste tiene un área de 112 m^2.

2) Si se aumenta en 5 cm el lado de un cuadrado, su área es 94 cm^2 menos que el doble del área original. Calcular el área y perímetro del cuadrado inicial.

3) Claudia conduce su automóvil a una velocidad constante, recorre una distancia de 300 km, invirtiendo un determinado tiempo. Si incrementara la velocidad en 25 km/hora, el tiempo requerido sería 2 horas menor. ¿Cuál es el tiempo que invierte Claudia sin incrementar la velocidad?

4) Donato reparte 35 revistas entre sus amigos, dándole a cada uno tantas revistas como amigos son más dos revistas. ¿Cuántos amigos tiene Donato?

5) Determina la longitud de los lados de un rectángulo sabiendo que su semi-perímetro es 25 m y su área es 150m^2.

6) En un torneo de ajedrez cada maestro juega una vez con cada uno de los restantes. Si en total se juegan 105 partidas. ¿Cuántos jugadores toman parte del torneo?

7) Un grupo de abejas cuyo número era igual a la raíz cuadrada de la mitad de todo su enjambre, se posó sobre un jazmín, habiendo dejado muy atrás a $\frac{59}{64}$ del enjambre; solo una abeja del mismo enjambre revoloteaba en torno de un loto, atraída por el zumbido de una de sus amigas que cayó imprudentemente en la trampa de la florecilla de dulce fragancia. ¿Cuántas abejas formaban el enjambre?

8) Una compañía de soldados de 180 hombres está dispuesta en filas. El número de soldados en cada fila es 8 más que el número de filas que hay. ¿Cuántas filas hay y cuántos solados en cada fila?

9) Se han comprado gomas de borrar por un total de \$60. Si se hubieran comprado tres gomas más, el comerciante habría hecho un descuento de \$1 en cada una, y el precio total habría sido el mismo. ¿Cuántas gomas se compraron?

10) Dos obreros tardan 12 horas en hacer un trabajo. ¿Cuánto tardarían en hacerlo separadamente, si uno tarda 5 horas más que el otro?

11) La maestra de Jorge le dejó el trabajo de construir una caja de cartón abierta. La caja debe de tener la base cuadrada, los lados de 9 cm de altura y una capacidad de 5184 cm^2. Encontrar las dimensiones de la pieza de cartón mínima que debe comprar para construir la caja.

12) Un grupo de estudiantes compró una calculadora graficadora que costó \$1200. El dinero que paga cada estudiante excede en 194 al número de estudiantes que hicieron la compra. ¿Cuántos estudiantes compraron la cámara fotográfica?

13) Omar compró varias paletas por \$24, el precio de cada una es el mismo. Si cada paleta le hubiese costado \$1 menos, podría haber comprado 4 paletas más con el mismo dinero ¿Cuántas paletas compró Omar y a qué precio?

14) Un avión vuela entre dos ciudades separadas 300 km. Cuando el viento sopla a favor a una velocidad de 30 km/h, el avión alcanza su destino media hora antes. ¿Cuál es la velocidad del avión?

15) Silvia compró varios libros por la cantidad de \$540, el precio de cada uno es el mismo. Sí hubiera comprado 6 libros menos por la misma cantidad, cada libro le hubiera costado \$3.00 más. ¿Cuántos libros compró y cuánto costó cada libro?

A U T O E V A L U A C I O N

Con esta evaluación verificarás si realmente has adquirido los conocimientos básicos necesarios para aprobar esta unidad. Para hacer esta evaluación, es necesario que la resuelvas sin consultar algún texto durante la solución.
Esperamos que esta autoevaluación la termines en 1½ hora como máximo.

ENCONTRAR LAS SOLUCIONES DE LAS SIGUIENTES ECUACIONES:

1) $6x^2 + 20x = 0$

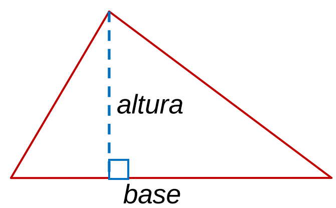
2) $3y^2 - 42 = 0$

3) $4(3 - x)(3 + x) - 6(1 - x)^2 = 3x + 12$

4) Analizando su discriminante, indica el número y la naturaleza de las soluciones de la ecuación $x^2 - 9x - 36 = 0$.

RESOLVER LOS SIGUIENTES PROBLEMAS:

5) La altura de un triángulo es 5 cm menor que la longitud de la base, si el área del triángulo es de 63 cm^2, encontrar la longitud de su altura y la de su base.



6) Ana compró varios comics por \$540, cada comic cuesta lo mismo. Si hubiese comprado 6 comics menos por el mismo dinero, cada comic le habría costado \$3 más. ¿Cuántos comics compró y cuanto le costó cada uno?

ESCALA:
Para considerar si has adquirido los aprendizajes de esta unidad, es necesario que resuelvas correctamente todos los ejercicios.
Si resuelves bien 3 o menos, tienes que volver a estudiar con mayor conciencia esta unidad, y hacer todos los ejercicios propuestos en esta guía complementando con los del Banco de Reactivos.
Si contestas bien 4 ejercicios has logrado aprender sólo los conocimientos básicos, pero si resolviste 5 o 6 vas avanzando bien en tu estudio y estás listo para presentar tu examen extraordinario.