Unidad 5.

Elementos de trigonometría.

PROPÓSITO

✍ *Mostrar a las razones trigonométricas como una herramienta y un modelo en la solución de problemas de diversos campos del conocimiento. Iniciar, asimismo, un nuevo saber matemático que culminará posteriormente con el estudio de las funciones trigonométricas.*

CONTENIDO

PRESENTACIÓN.

La unidad cinco y última, está destinada a estudiar los “Elementos de la Trigonometría”, y representa un primer momento de síntesis de los conocimientos que el alumno ha adquirido sobre Aritmética, Álgebra y Geometría Euclidiana. A través de las razones trigonométricas, la resolución de triángulos y sus aplicaciones, el estudiante adquirirá nuevas herramientas que potencian, al combinarse, algunas propiedades y conceptos geométricos, como el de semejanza. Esto, a través de diversas actividades, ejercicios y ejemplos propuestos con base a los aprendizajes que marca el programa de estudios.

En este nivel, el tratamiento que se le brinda a esta temática, es un paso hacia adelante, pues se pasa de las razones trigonométricas a la ley de los senos y cosenos, con lo cual se abre una gran variedad de aplicaciones, y por otra parte, se introduce al alumno al manejo de identidades trigonométricas, donde se ponen en práctica diversos conocimientos como lo son, conocer las ocho relaciones básicas y reconocer las formas alternativas de cada una, así como técnicas de factorización, entre otros.

La trigonometría al igual que otros conceptos han jugado un papel muy importante para resolver situaciones reales a lo largo de nuestra vida, por tal motivo, en esta unidad, las aplicaciones es un aprendizaje primordial que debemos desarrollar en el alumno, por lo que en este apartado se sugiere una variedad de problemas y actividades donde el alumno pueda desarrollar diferentes estrategias que le permitan enfrentar alguna situación de la vida real aplicando trigonometría. Con lo cual se pretende que el alumno valore de forma positiva las matemáticas al poder utilizarlas fuera del aula, donde hay múltiples situaciones donde éste se puede ver inmerso.

Se espera que el alumno después de esta experiencia mejore su visión hacia las matemáticas, que en caso de suceder, facilitaría una disposición favorable en el futuro hacia éstas.

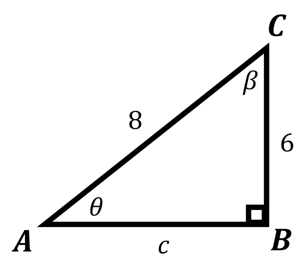
Conceptos clave: Razones trigonométricas; Ángulo de depresión y elevación; Ley de los senos y ley de los cosenos; Identidades trigonométricas.

5.1 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS SENO, COSENO Y TANGENTE PARA ÁNGULOS AGUDOS.

Dado que en esta unidad se trabajará con trigonometría, se sugiere explicar brevemente a qué nos referimos con ello. Así, La palabra “trigonometría” se deriva de la palabra griega *trigonom*, que significa “triángulo” y *metrón*, que significa “medida”, esto es, se encarga de calcular las medidas de los elementos del triángulo. En efecto, la trigonometría se dedica a estudiar las relaciones entre los ángulos y los lados de un triángulo.

Ahora bien, una forma de iniciar esta unidad es enfrentar al alumno ante un problema (Actividad 1) que en principio pueden resolver (aplicando el teorema de Pitágoras), pero al hacer alguna modificación, el alumno se encontrará en una situación problemática, pues no cuenta con las herramientas suficientes para resolverlo, lo cual abre paso a trabajar con las razones trigonométricas.

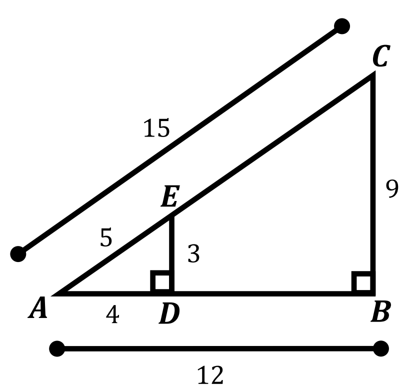
Actividad 1. Si tenemos el triángulo:



a) ¿Se puede calcular la medida del lado c? ¿Cómo lo harías?
b) Ahora, si sólo se conoce la medida de uno de los lados, por ejemplo, $AC = 8$
  i) ¿Cómo calculas la medida de los otros dos lados?
  ii) ¿Puedes calcular la medida de los ángulos que faltan?

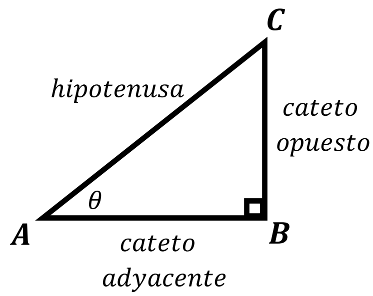
Como el alumno no cuenta con las herramientas suficientes para concluir la actividad 1, es momento de introducir las razones trigonométricas, donde el análisis de la siguiente actividad puede ser de gran ayuda:

Actividad 2. Dado que $\Delta ABC \sim \Delta ADE$:



a) Escribe las razones correspondientes a sus lados proporcionales.
b) ¿Qué sucede con la razón formada con dos lados cualesquiera del triángulo ADE con la razón correspondiente del triángulo ABC?
c) Analiza las diversas posibilidades de poder combinar las razones entre sus lados.

Como las razones respectivas entre dos lados cualesquiera son constantes (actividad anterior), éstas relacionadas con un ángulo agudo reciben un nombre especial: ***razones trigonométricas***.



Así, en un triángulo rectángulo con respecto a un ángulo agudo θ, las razones trigonométricas se definen como:

La razón (división) entre el cateto opuesto al ángulo θ y la hipotenusa, recibe el nombre de $seno$, y se expresa como: $\boldsymbol{sen\ \theta} = \frac{\textbf{cateto opuesto}}{\textbf{hipotenusa}}$.
La razón entre el cateto adyacente al ángulo θ y la hipotenusa, recibe el nombre de $coseno$, y se expresa como: $\boldsymbol{cos\ \theta} = \frac{\textbf{cateto adyacente}}{\textbf{hipotenusa}}$.
La razón entre el cateto opuesto al ángulo θ y el cateto adyacente al mismo, recibe el nombre de $tangente$, y se expresa como: $\boldsymbol{tan\ \theta} = \frac{\textbf{cateto opuesto}}{\textbf{cateto adyacente}}$.

Estas tres (seno, coseno, tangente) son las razones fundamentales que se pueden establecer entre un ángulo agudo y los lados del triángulo rectángulo del cual forman parte.

A cada razón fundamental corresponde una *razón recíproca*, llamadas así por que cada una es la inversa de otra fundamental.

5.1.1 Valores recíprocos de las razones seno, coseno y tangente.

Las tres siguientes son las razones recíprocas que se pueden establecer respecto al mismo ángulo:

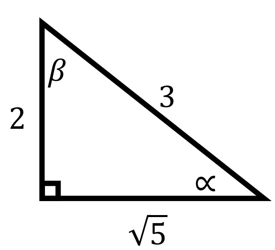
La razón entre el cateto adyacente al ángulo θ y el cateto opuesto al mismo, recibe el nombre de $cotangente$, y se expresa como: $\boldsymbol{cot\ \theta} = \frac{\boldsymbol{cateto\ adyacente}}{\boldsymbol{cateto\ opuesto}}$.
La razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente al ángulo θ, recibe el nombre de $secante$, y se expresa como: $\boldsymbol{sec\ \theta} = \frac{\boldsymbol{hipotenusa}}{\boldsymbol{cateto\ adyacente}}$.
La razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto al ángulo θ, recibe el nombre de $cosecante$, y se expresa como: $\boldsymbol{csc\ \theta} = \frac{\boldsymbol{hipotenusa}}{\boldsymbol{cateto\ opuesto}}$.

NOTA. Puedes ejemplificar las razones recíprocas con números conocidos, ya que así el alumno lo retiene mejor.

Por otra parte, se sugiere plantear la actividad 3 para que el alumno perciba como las razones de un triángulo rectángulo son funciones de los ángulos agudos del triángulo, esto es, los cocientes o razones $\frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{b}{c}$ permanecen invariantes para el mismo ángulo en un triángulo rectángulo cualquiera que sea su tamaño.

Actividad 3. ¿Las razones *seno*, *coseno* y *tangente* varían para el mismo ángulo en un triángulo rectángulo cualquiera que sea su tamaño? (Observa la figura de la actividad 2, y calcula el seno, coseno y tangente del ángulo A. O construye por separado triángulos rectángulos con un ángulo en común y calcula las razones de éste ángulo).

EJEMPLO. Encontrar las seis razones trigonométricas del ángulo $\propto$ y β en el siguiente triángulo rectángulo.



Solución:

Con respecto a $\angle \propto$, se tiene que el cateto opuesto es 2, cateto adyacente $\sqrt{5}$ y la hipotenusa 3, por lo tanto:

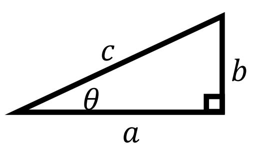
$$sen \propto = \frac{2}{3} \qquad csc \propto = \frac{3}{2}$$

$$cos \propto = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad sec \propto = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$tan \propto = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad cot \propto = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

De manera similar se resuelve para β, donde el cateto opuesto es $\sqrt{5}$, cateto adyacente 2 y la hipotenusa 3.

Actividad 4. Dado el siguiente triángulo, a) ¿mencionar qué razón trigonométrica con respecto al ángulo θ define a la razón $\frac{b}{a}$? b) ¿Y cuál define a $\frac{c}{a}$?



Actividad 5. Representar de manera simbólica, numérica y gráfica “La tangente del ángulo *Beta* es igual a cuatro (c. opuesto) sobre tres (c. adyacente)”

Actividad 6. Determinar las razones trigonométricas del ángulo menor del triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 y 5 cm.

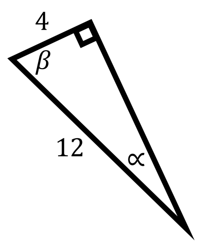
Ahora bien, cuando se trata de resolver un triángulo, por lo general se proporcionan algunos datos o elementos en éste, pero antes de pasar a ello, puedes iniciar una reflexión acerca de sus elementos, por ejemplo:

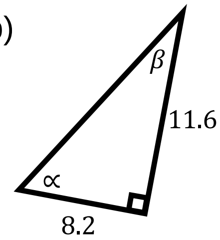
Actividad 7. Si te dan un triángulo rectángulo y se te pide determinar las medidas de los lados y los ángulos, ¿cuántos y cuáles datos te deben dar como mínimo?

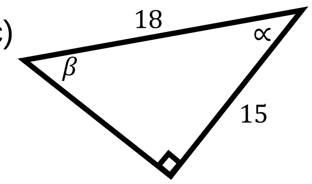
Esta reflexión abre paso para trabajar con el siguiente tema.

Ejercicios 5.1

1) Calcular las razones trigonométricas del ángulo $\propto$ y β indicado en cada uno de los triángulos.

a) 

b) 

c) 

2) Si la $tan\,A = \frac{15}{4}$, escribe todas las demás razones trigonométricas en forma de fracción.

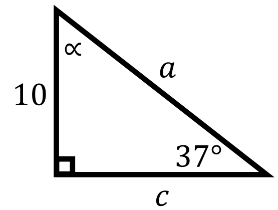
3) Si la $cos\,B = \frac{5}{9}$, escribe todas las demás razones trigonométricas en forma de fracción.

4) Si un triángulo está formado con lados de 8, 15 y 17cm, verificar si es un triángulo rectángulo. Si es triángulo rectángulo, determinar las razones trigonométricas de sus ángulos agudos.

5.2 SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

5.2.1 Conociendo un ángulo y un lado.

EJEMPLO 1. Resolver el siguiente triángulo rectángulo:



Solución:

Para determinar la longitud de la hipotenusa (a), se conoce el ángulo de 55º y el cateto opuesto. La razón trigonométrica que relaciona la hipotenusa con el cateto opuesto es la razón seno. Así:

$$sen\,37° = \frac{10}{a}$$

$$a(sen\,37°) = 10$$

$$a = \frac{10}{sen\,37°}$$

$$\boldsymbol{a \approx 16.61}$$

Para determinar la longitud del cateto adyacente (c) al ángulo de 55º, se conoce la longitud del cateto opuesto. La razón trigonométrica que relaciona el cateto adyacente con el cateto opuesto es la razón tangente. Así:

$$tan\,37° = \frac{10}{c}$$

$$c(tan\,37°) = 10$$

$$c = \frac{10}{tan\,37°}$$

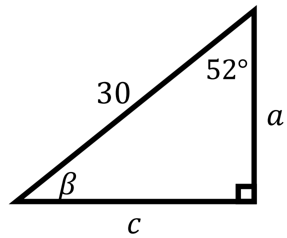
$$\boldsymbol{c \approx 13.27}$$

Para hallar la medida del ángulo $\propto$, basta con aplicar el Teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo: $90 + 35 + \propto = 180 \quad \rightarrow \quad \propto = \mathbf{35}°$.

Observa que en este triángulo se conoce un ángulo y un lado.

> Cuando se conoce sólo un lado del triángulo y la medida de un ángulo, y se quiere obtener la medida de los otros dos lados, se puede obtener cualquiera de ellos utilizando alguna razón trigonométrica, y para el tercer lado, algunos alumnos aplicarán el teorema de Pitágoras, situación que es correcta, pero sin embargo, se sugiere aplicar nuevamente una razón trigonométrica, pues, al aplicar el teorema de Pitágoras se utiliza un resultado previo. Resultado que si fue determinado de manera incorrecta, en consecuencia, el tercer lado también lo será a pesar de aplicar de manera correcta dicho teorema.

EJEMPLO 2. Resolver el siguiente triángulo rectángulo:



Solución:

Aquí, nuevamente se conoce un ángulo y un lado.

Para calcular c:

$$sen\ 52° = \frac{c}{30}$$

$$c = 30sen\ 52°$$

$$\boldsymbol{c \approx 23.64}$$

Para calcular a:

$$cos\ 52° = \frac{a}{30}$$

$$a = 30cos\ 52°$$

$$\boldsymbol{a \approx 18.46}$$

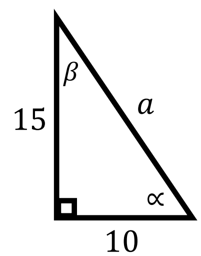
Para calcular $\angle\ \beta$

$$90 + 52 + \beta = 180$$

$$\boldsymbol{\beta = 38°}$$

5.2.2 Conociendo dos lados.

EJEMPLO 1. Resolver el siguiente triángulo:



Solución:

Para calcular $\angle \propto$, se conocen dos lados (las longitudes del cateto opuesto y adyacente al ángulo). La razón que relaciona estas longitudes es la razón tangente. Así:

$$tan \propto = \frac{15}{10}$$

$$\propto = tan^{-1}\left(\frac{15}{10}\right)$$

Para encontrar el valor del ángulo, se calcula la función inversa de la tangente tan^{-1}, tambien expresda como arctan.

$$\propto \approx \boldsymbol{56.30°}$$

Para calcular $\angle\beta$, también se conocen dos lados (las longitudes del cateto opuesto y adyacente al ángulo). Y la razón que relaciona estas longitudes es la razón tangente. Así:

$$tan\beta = \frac{10}{15}$$

$$\beta = tan^{-1}\left(\frac{10}{15}\right)$$

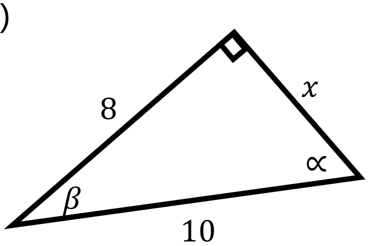
$$\boldsymbol{\beta \approx 33.69°}$$

Por último, para calcular el tercer lado, basta con aplicar el teorema de Pitágoras: $a^2 = (15)^2 + (10)^2$, donde $\boldsymbol{a = 18.02}$

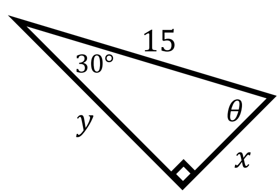
Cuando se desconocen los dos ángulos agudos del triángulo rectángulo, uno de ellos puede obtenerse aplicando alguna razón trigonométrica, y para determinar la medida del tercer ángulo, algunos alumnos aplicarán el teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, situación que es correcta, pero sin embargo, se sugiere aplicar nuevamente una razón trigonométrica, pues, para la suma de los ángulos interiores se utiliza un resultado previo. Resultado que si fue determinado de manera incorrecta, en consecuencia, el tercer ángulo también lo será a pesar de aplicar de manera correcta dicho teorema.

Actividad 1. Resolver los siguientes triángulos.

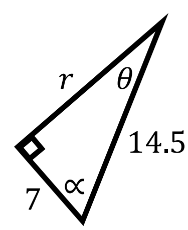
a)



b)



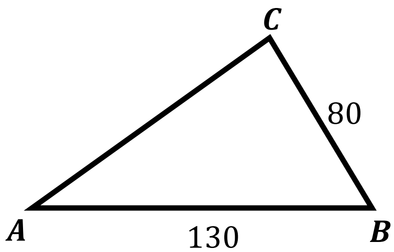
c)



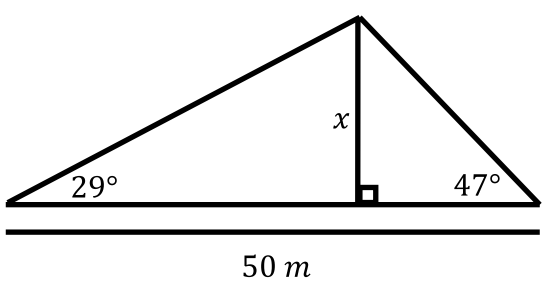
Actividad 2. Se tiene un triángulo rectángulo cuya medida de uno de sus ángulos es de 61° y la medida del cateto adyacente es de 30 m. Determinar la medida de los ángulos y los lados que faltan del triángulo.

Actividad 3. Si un triángulo está formado con lados de 8, 15 y 17cm, verificar si es un triángulo rectángulo. Y encontrar el valor de sus ángulos interiores.

Actividad 4. En el siguiente triángulo, calcular el lado y los ángulos que faltan, y la altura desde C, sabiendo que dos de sus lados miden 80 m y 130 m, y forman entre ellos un ángulo de 70°.



Actividad 5. Encontrar el valor del lado *x* en la siguiente figura:



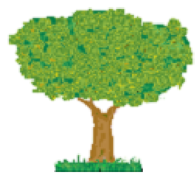
Ahora bien, después de ejercitarse con la resolución de triángulos rectángulos, se proponen las siguientes preguntas para que el alumno reflexione sobre sus procedimientos e introducirlos a las aplicaciones:

a) ¿Es necesario utilizar todas las razones trigonométricas (*seno*, *coseno*, *tangente*, *cotangente*, *secante*, *cosecante*) para resolver problemas donde intervienen triángulos rectángulos? ¿Por qué?

b) ¿Qué tipo de problemas puedes resolver utilizando razones trigonométricas? ¿Consideras que las razones trigonométricas tienen alguna utilidad en la vida real?

Esto último, resulta primordial en nuestro trabajo, por tal motivo se sugiere plantear diversos problemas donde el alumno pueda desarrollar diferentes estrategias que le permitan enfrentar alguna situación de la vida real aplicando razones trigonométricas.

PARA REFLEXIONAR. ¿Cómo calcularías la altura de un árbol, utilizando razones trigonométricas?



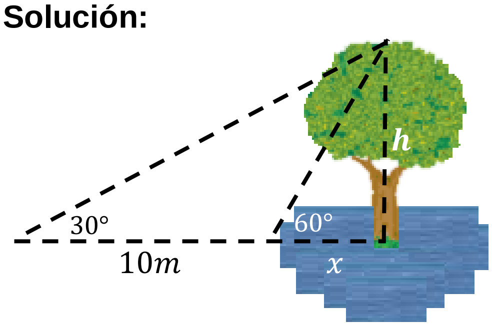
(Conviene mencionar que existen instrumentos que permiten medir ángulos, de tal manera, que se puede utilizar la medida de un ángulo si es que se requiera).

Aclarado esto, una estrategia que pueden utilizar los alumnos es la siguiente: "caminar del pie del árbol a cualquier punto y medir esa distacia; desde el punto de llegada medir el ángulo que se forma del suelo al punto más alto del árbol". De esta manera, se obtiene un triángulo rectángulo conocidos un lado y un ángulo.

PARA REFLEXIONAR. Ahora bien, considerando que no se puede medir (por algún motivo) la distancia entre el árbol y tú ¿cómo calcularías su altura?

Problema 1. Calcular la altura de un árbol, si desde un determinado lugar se observa su punto más alto con un ángulo de $60°$, y si nos alejamos 10 m lo vemos con un ángulo de $30°$.

Solución:



$$tan\,60° = \frac{h}{x} \quad \rightarrow \quad h \approx 1.73x \qquad (1)$$

$$tan\,30° = \frac{h}{x+10} \quad \rightarrow \quad h \approx 0.57x + 5.7 \qquad (2)$$

Igualamos (1) y (2):
$1.73x = 0.57x + 5.77$, donde $x \approx 4.97$

Al sustituir x en (1) se obtiene:
$h \approx 1.73(4.97) \approx \mathbf{8.59}$

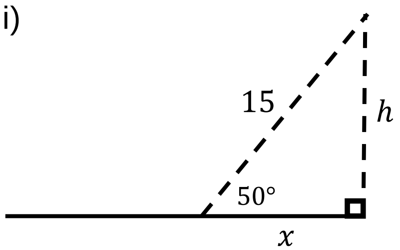
Respuesta: La altura del árbol es 8.59 metros.

Problema 2. Juan quiere saber la altura a la que se encuentra Pedro que se ubica en la parte más alta de un poste de luz. Entonces, Pedro, arroja el extremo de un cable de 15 m hacia Juan. Juan camina con el cable hasta que quede tenso y lo clava en el suelo, formando un ángulo de 50º.

i) Realiza una representación del problema.
ii) ¿A qué altura se encuentra Pedro?
iii) ¿A qué distancia se encuentra Juan del pie del poste?

Solución:

i)



ii)

$$sen\,50° = \frac{h}{15}$$

$$h \approx 11.49$$

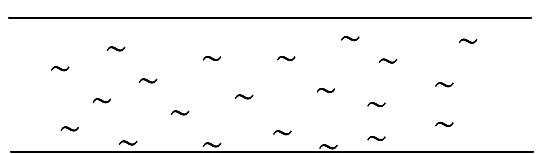
iii)

$$cos\,50° = \frac{x}{15}$$

$$x \approx 9.64$$

Respuesta: La altura a la que se encuentra Pedro es 11.49 m, y Juan se encuentra a 9.64 m del pie del poste.

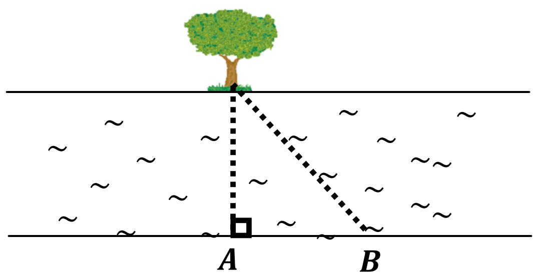
PARA REFLEXIONAR. Ahora bien, para que el alumno siga reflexionando sobre qué recursos puede utilizar para resolver cierta situación de la vida real, se puede preguntar lo siguiente:
¿Cómo le harías para calcular lo ancho de un río recto?

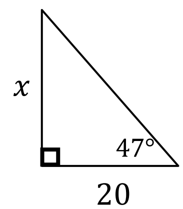


Por ejemplo, si tú te encuentras en la orilla del rio, y justo enfrente de ti hay un árbol o una piedra ¿cómo le haces para calcular lo ancho del rio?

Problema 3. Una persona desde un punto A, ubicado frente a un árbol a la orilla opuesta de un rio recto, camina 20 m hacia la derecha y llega a un punto B. Si el ángulo entre la orilla del río y la línea de visibilidad hacia el árbol desde el punto B es de 47º, ¿Cuál es lo ancho del río?

Solución:





$$\tan 47° = \frac{x}{20}$$

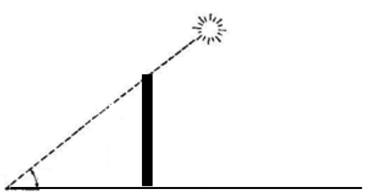
$$x \approx 21.44$$

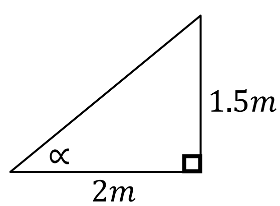
Respuesta: Lo ancho del rio es 21.44 metros.

PARA REFLEXIONAR. Por otra parte, si no se cuenta con un instrumento para medir un ángulo ¿cómo calcularías el ángulo?

Problema 4. ¿Qué ángulo de inclinación tiene el Sol, con respecto a la horizontal, si la sombra que proyecta un palo de 1.5 m es de 2 m de longitud?

Solución:





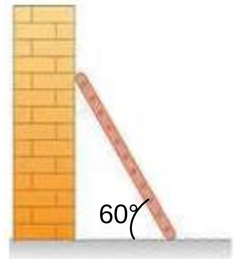
$$tan \propto = \frac{1.5}{2}$$

$$\propto \approx 36.86°$$

Respuesta: El ángulo de inclinación que tiene el Sol con respecto a la horizontal es de 36.86º

PARA REFLEXIONAR. Ahora, al recargar una escalera sobre una pared (donde se supone que todo edificio o pared es perpendicular al suelo) esta forma cierta inclinación con respecto al suelo, ¿cómo le harías para que el pie de una escalera de 2.5 m de larga forme un ángulo de 60º con el suelo?

Problema 5. Según las indicaciones de seguridad, al usar una escalera, esta debe formar un ángulo de 60º con el suelo. ¿A qué distancia de la pared deberíamos apoyar el pie de la escalera de 2.5 m de larga para que se cumpla la nombrada indicación?



Solución: $x = 1.25\ m$

Problema 6. Para subir a la azotea de una casa de 2.3 m de altura, un señor quiere construir una escalera ¿cuánto debe medir de largo la escalera? Si la quiere colocar al nivel de la azotea y que cumpla con la norma de seguridad, señalada en el ejercicio anterior, para no sufrir algún accidente.

Solución: $x \approx 2.65\ m$

Problema 7. Un avión sale de un aeropuerto y se eleva manteniendo un ángulo constante de 10º hasta que logra una altura de 6 km. Determinar a qué distancia horizontal del aeropuerto se encuentra en ese momento.

Solución: $x \approx 34.02\ km$

Problema 8. Encontrar el perímetro de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 12.6 m de radio.

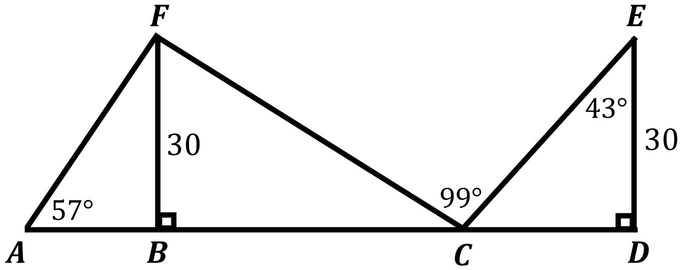
Solución: $x \approx 74.06\ m$

Problema 9. Un triángulo equilátero está inscrito en un círculo de 12 cm de radio. ¿Cuánto mide el lado?

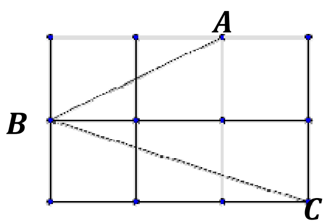
Solución: $x \approx 20.78\ m$

Ejercicios 5.2

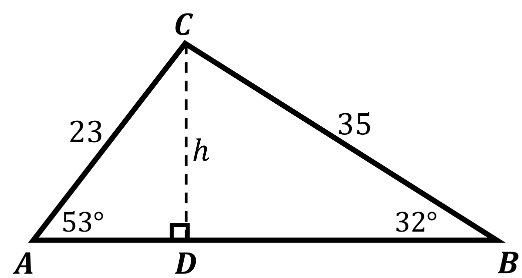
1) Encontrar los elementos que faltan en cada uno de los siguientes triángulos.



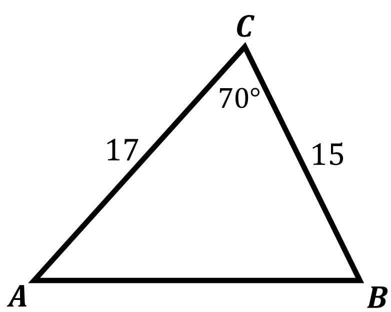
2) La figura muestra una cuadrícula formada por 6 cuadrados de lado 1. ¿Cuánto mide el ángulo ABC?



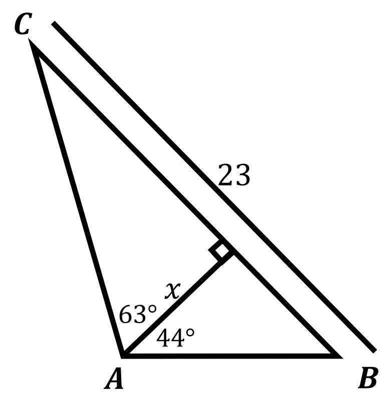
3) Hallar el área del triángulo ABC.



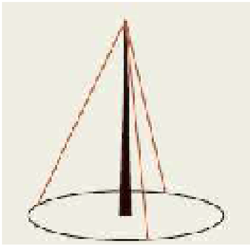
4) Resolver el siguiente triángulo. (Sugerencia: divide el triángulo en dos triángulos rectángulos).



5) Encontrar el valor del lado x.



6) Un poste vertical está sostenido por tres cables que van desde el punto más alto del poste hasta tres puntos ubicados en el suelo. Cada uno de esos puntos está a 12 m del pie del poste. Si cada cable forma con el suelo un ángulo de 75º,
a) ¿Cuántos metros de cable se usaron?
b) ¿Qué altura tiene el poste?



7) ¿Cómo calculas la distancia que hay de la playa hasta la isla? Sugerencia: construye una figura con datos que se puedan obtener.

8) Un río tiene las dos orillas paralelas. Desde los puntos P y Q de una orilla, se observa un punto R de la orilla opuesta. Si las visuales forman con la dirección de la orilla ángulos de 40º y 50º, respectivamente, y la distancia entre los puntos P y Q es 9 m. Determinar el ancho del río.

9) La distancia entre dos edificios es de 60 m. Desde la azotea del más bajo, de 40 m de altura, se observa la azotea del otro con un ángulo de 30º. Calcular la altura del edificio más alto.

10) Cuando el ángulo del Sol (desde la horizontal) es de 56º en Paris, la torre Eiffel forma una sombra de 203 m de largo. ¿Qué altura tiene la torre?

11) Como se muestra en la figura, un teleférico transporta pasajeros desde el punto A, que está a 1.2 km del punto B que se halla en la base de una montaña, hasta un punto P de la cima. Los ángulos a P desde A y B son 21° y 65°, respectivamente.
a) Calcular la distancia entre A y P.
b) Calcular la altura de la montaña.

5.3 RAZONES SENO, COSENO Y TANGENTE DE LOS ÁNGULOS DE $15°$, $30°$, $45°$, $60°$ Y $75°$.

Las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera, no son valores fáciles de calcular si no se tiene una calculadora. Durante muchos años, los estudiantes usaron libros de "Tablas Trigonométricas" para hacerlo. En esta etapa de la unidad aprenderemos cómo calcular el valor de algunos ángulos específicos, que se pueden obtener por ejemplo, por medio de un triángulo equilátero de lado uno para los ángulos de 30º y 60º; o en nuestro caso, por medio de la circunferencia unitaria.

Para obtener los valores del seno, coseno y tangente de 30º, 45º y 60º, resulta fundamental la aplicación del teorema de Pitágoras, y la definición de razón trigonométrica.

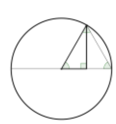
Considerando lo anterior, para obtener las razones trigonométricas de 60º, hacemos lo siguiente:

1. En una circunferencia de radio uno, trazar un ángulo de 60º.
2. Bajar una perpendicular desde A, para formar un triángulo rectángulo AOC.

$\boldsymbol{A}$

$60°$

$\boldsymbol{O}$ $\boldsymbol{C}$ $\boldsymbol{B}$



Observaciones:

1. El triángulo rectángulo que se determina tiene la particularidad de que el cateto adyacente al ángulo es la mitad del radio de la circunferencia. ¿Por qué?
2. Aplicamos Pitágoras y obtenemos fácilmente la medida de los lados y, por tanto, podremos obtener los valores del *seno*, *coseno* y *tangente*.
3. $AO = 1$ por ser radio.

$OC = \frac{1}{2}$ por ser la mitad del radio.

$CA = \frac{\sqrt{3}}{2}$ por T. Pitágoras.

Entonces, $sen\,60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $cos\,60° = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$; $tan\,60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

De esta forma, podemos obtener las razones trigonométricas recíprocas:

$$sen\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad csc\,60° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$cos\,60° = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad sec\,60° = 2$$

$$tan\,60° = \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad cot\,60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Para obtener las razones trigonométricas de 30º, hacemos lo siguiente:

Mirando con detalle la construcción del ángulo de 60º, se observa que el triángulo rectángulo tiene un ángulo de 60º y otro de 30º, en consecuencia, podemos deducir directamente las razones trigonométricas de 30º.

Entonces, $sen\,30° = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$; $cos\,30° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $tan\,30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Y las razones trigonométricas recíprocas, quedan de la siguiente manera:

$$sen\,30° = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad csc\,30° = 2$$

$$cos\,30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad sec\,30° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

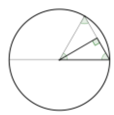
$$tan\,30° = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow \quad cot\,30° = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Otra forma de calcular las razones trigonométricas para este ángulo, y que resulta el mismo triángulo rectángulo, es bisecar el ángulo de 60º, esto es,

A

$30°$

O B



NOTA. Se puede dejar al alumno como actividad para que visualice otra forma de calcularlo.

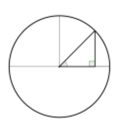
Para obtener las razones trigonométricas de 45º, hacemos lo siguiente:

1. En una circunferencia de radio uno, trazar un ángulo de 45º.
2. Bajar una perpendicular desde A, para formar un triángulo rectángulo.

A

$45°$

O B



Observaciones:
1. El triángulo rectángulo que se determina es isósceles. ¿Por qué?
2. Aplicamos Pitágoras y obtenemos fácilmente la medida de los lados y, por tanto, podremos obtener los valores del *seno*, *coseno* y *tangente*.
3. $OA = 1$ por ser radio.
$AB = OB = \frac{1}{\sqrt{2}}$ por ser triángulo rectángulo isósceles y por T. de Pitágoras.

Entonces, $sen\,45° = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $cos\,45° = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $tan\,45° = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1$

De esta forma, podemos obtener las razones trigonométricas recíprocas:

$$sen\,45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad csc\,45° = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$cos\,45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad sec\,45° = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$tan\,45° = 1 \quad \rightarrow \quad cot\,45° = 1$$

Actividad 1. ¿Cuál es el valor del *seno*, *coseno* y *tangente* de 0º y 90º?

Los resultados obtenidos los podemos resumir en la siguiente tabla:

	$30°$	$45°$	$60°$
$Seno$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$Coseno$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$Tangente$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Actividad 2. Observando la tabla, ¿existe alguna relación para obtener los valores de la *tangente* en cada caso? ¿Existe alguna relación entre los valores del *seno* y *coseno* para obtener el valor de la *tangente* en cada caso?

NOTA. La segunda pregunta se puede omitir, dependiendo el comportamiento de los alumnos.

Si no se obtiene respuesta favorable al respecto, hacer notar que: $tan = \frac{sen}{cos}$.

Entre otras, destacan:

$$sen\,45° = cos\,45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad tan\,45° = 1$$

$$sen\,30° = cos\,60° = \frac{1}{2} \qquad cos\,30° = sen\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tan\,30° = cot\,60° = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad cot\,30° = tan\,60° = \sqrt{3}$$

Ahora bien, con el fin de que al alumno recuerde de una manera sencilla el valor de cada una de las razones trigonométricas de los ángulos más importantes, se sugiere la siguiente regla:

"Numeramos los ángulos en orden creciente, 1, 2, 3. Numerados así, el *seno* de un ángulo será la raíz del número asignado a este divido por 2. De esta forma obtenemos la fila de los *senos*. Para obtener la fila de los *cosenos* no hace falta ningún cálculo, simplemente colocamos la fila que hemos obtenido antes en orden inverso. Y para obtener la de las *tangentes* simplemente se divide el valor del *seno* entre el valor del *coseno*".

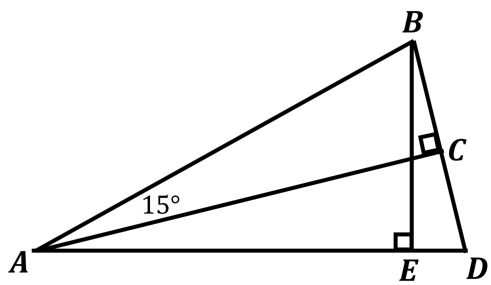
	$30°$	$45°$	$60°$
$sen\,\theta =$	$\sqrt{1}$	2	3
		2	
$cos\,\theta =$	$\sqrt{3}$	2	1
		2	
$tan\,\theta =$	$\sqrt{1}$	2	3
	$\sqrt{3}$	2	1

Por otra parte, ¿cómo calcular el seno de 15º ó 75º? Si bien es cierto, se menciona su análisis en el subtema, sin embargo, como aprendizaje no se menciona como tal en el programa. Aquí, mostramos una forma de calcularlo y se deja a decisión del profesor si lo aplica en el salón de clase.

Para calcular el seno de 15º utilizaremos la siguiente construcción:

Construir un ángulo de 15º (BAC); trazar una perpendicular desde B hasta AC; prolongar BC hasta D de manera que BC = CD; unir A con D, así, obtenemos dos triángulos semejantes ADC y ABC (¿por qué?) y el ángulo BAD equivale a 30º. Trazar BE perpendicular a AD; de tal manera que se ha construido un triángulo rectángulo con un ángulo de 30º, donde

$$BE = \frac{AB}{2}.$$



Luego, se calcula AE en el triángulo ABE utilizando el teorema de Pitágoras:

$AE^2 = AB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}AB^2 \quad \rightarrow \quad AE = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$

Como $ED = AD - AE$, se tiene que $ED = AB - \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)AB$

Ahora, del triángulo BED calculamos BD:

$$BD^2 = BE^2 + ED^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}AB\right)^2 = \left(2-\sqrt{3}\right)AB$$

$$BD = \sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot AB$$

Como BC es la mitad de BD, se tiene que $BC = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}AB$, por lo que el seno de 15º es:

$$sen\, 15° = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}AB}{AB} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Para calcular el coseno de 15º hace falta el lado AC.

Por Pitágoras, $AC = \frac{\sqrt{4-\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2}}{2}AB = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}AB$, por lo tanto, el coseno de 15º es:

$$cos\, 15° = \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}AB}{AB} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

Por ultimo,

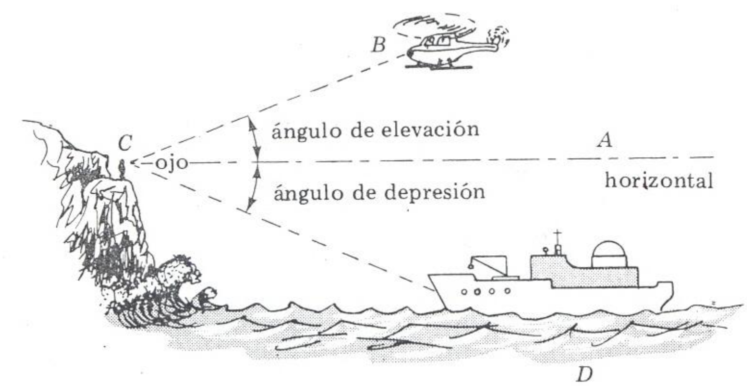
$$tan\,15° = \frac{BC}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}AB}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}AB} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

Mirando con detalle la construcción del ángulo de 15º, se observa que el otro ángulo agudo del triángulo rectángulo es de 75º, en consecuencia, podemos deducir directamente las razones trigonométricas de 75º. Como ya se conocen los lados AB, BC y CA del triángulo ABC, se puede dejar de tarea a los estudiantes esta actividad.

5.4 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

5.4.1 Ángulo de elevación y ángulo de depresión.

Si un observador está mirando un objeto, entonces, la línea del ojo del observador al objeto se llama línea de visión. Si el objeto que está siendo observado está arriba de la horizontal, entonces, el ángulo formado entre la línea horizontal con la visual dirigida al objeto se le llama ***ángulo de elevación***. Si el objeto está abajo de la horizontal, entonces, el ángulo entre la horizontal con la visual dirigida al objeto se le llama ***ángulo de depresión***.



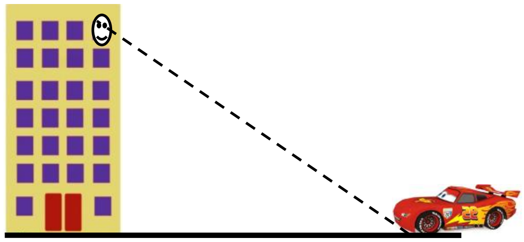
En otras palabras, el nombre que se le da a cada ángulo se debe simplemente a la apreciación que tenga el observador con respecto al objeto, esto es, si se encuentra el observador viendo hacia arriba o hacia abajo, básicamente los nombres se emplean dependiendo del evento en cuestión.

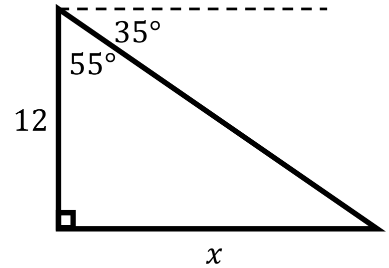
5.4.2 Problemas de aplicación.

Problema 1. Una persona se encuentra en la ventana de un edificio que está a 12 m de altura. Desde ahí, observa a un carro con un ángulo de depresión de 35º. Hallar la distancia entre el edificio y el carro.

Solución:

Realizamos un dibujo de la situación y haciendo abstracción de los objetos, se tiene el triángulo con los datos dados como se ve en la figura:





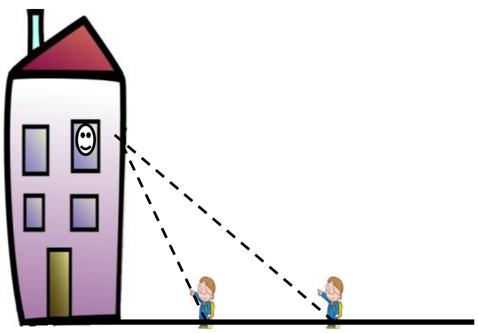
$$\tan 55° = \frac{x}{12}$$

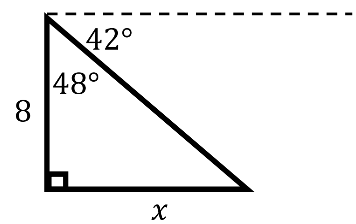
$$x \approx 17.13$$

Respuesta: La distancia entre el carro y el edificio es de 17.13 metros.

Problema 2. Una mujer se encuentra en la ventana de una casa a 8 m sobre el suelo, ella observa a un niño que camina directamente hacia ella, esto genera que el ángulo de depresión hacia el niño cambie de $42°$ a $65°$. ¿Qué distancia ha recorrido el niño?

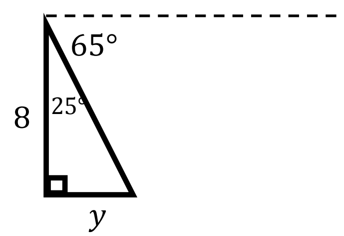
Solución:





$$\tan 48° = \frac{x}{8}$$

$$x \approx 8.88$$



$$\tan 25° = \frac{y}{8}$$

$$y \approx 3.73$$

$$\therefore \quad d = x - y = 8.88 - 3.73 \approx \mathbf{5.15}$$

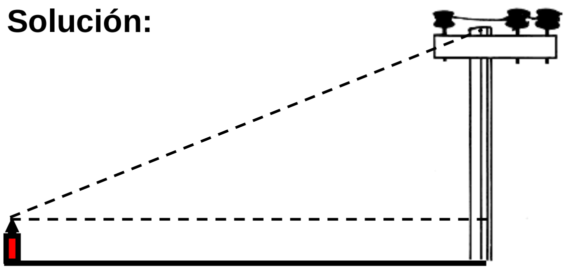
Respuesta: La distancia que recorrió el niño es 5.15 metros.

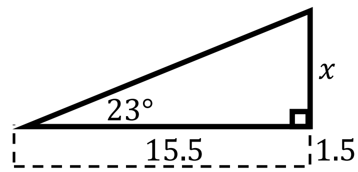
Problema 3. Una persona se encuentra en la ventana de su apartamento que está situada a 10 m del suelo, y observa la parte superior del edificio de enfrente con un ángulo de elevación de 30º y la parte inferior con un ángulo de depresión de 45º. Determinar la altura del edificio señalado.

Solución: $x \approx 15.77\ m$

Problema 4. A 15.5 m de la base de un poste de luz, el ángulo de elevación a su cúspide es de 23º. Calcular la altura del poste, si la altura del aparato con que se midió el ángulo es de 1.5 m.

Solución:





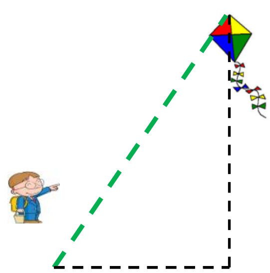
$$tan\,23° = \frac{x}{15.5}$$

$$x = 6.57$$

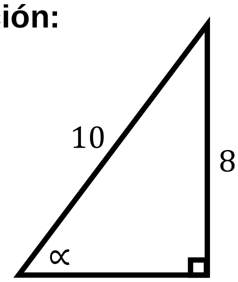
$$Entonces,\;\; la\ altura = 6.57 + 1.5 \approx \mathbf{8.07}$$

Respuesta: La altura del poste es de 8.07 metros.

Problema 5. El papalote de Jaime está sujeto por una cuerda de 10 m de longitud y vuela a 8 m de altura sobre el nivel de sus ojos. ¿Cuál es el ángulo de elevación del papalote?



Solución:



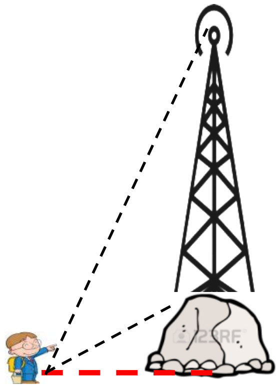
$$sen\ \propto = \frac{8}{10}$$

$$\propto = sen^{-1}\left(\frac{8}{10}\right)$$

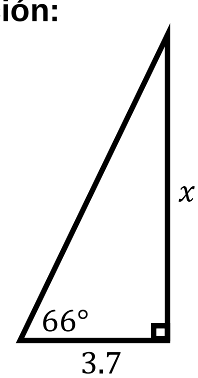
$$\propto \approx \mathbf{53.13}°$$

Respuesta: El ángulo de elevación del papalote es de 53.13º.

Problema 6. Una persona se ubica a 3.7 m del centro de una piedra sobre la cual se encuentra una antena. Esta persona observa el pie de la antena con un ángulo de elevación de 29º y la parte superior de ésta con un ángulo de 66º. Determinar la altura de la antena.

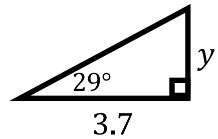


Solución:



$$\tan 66° = \frac{x}{3.7}$$

$$x \approx 8.31$$



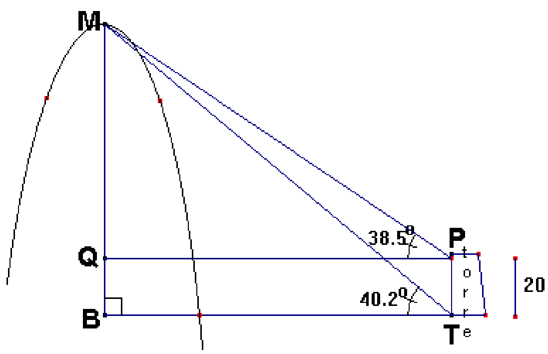
$$\tan 29° = \frac{y}{3.7}$$

$$y \approx 2.05$$

$$\boldsymbol{Altura} = x - y = 8.31 - 2.05$$

Respuesta: La altura de la antena es de 6.26.

Problema 7. Si medimos los ángulos de elevación de una montaña desde lo más alto y desde la base de una torre de 20 m de alto, se obtiene 38.5° y 40.2°, respectivamente ¿Cuál es la altura de la montaña?



Solución: $h_1 \approx 318\, m$

$$h \approx 318 + 20 \approx \mathbf{338}\, m$$

Problema 8. Calcular el ancho de una calle, si un observador situado sobre un edificio de 25 m de alto, ve el otro lado de la misma bajo un ángulo de 60º con respecto a la horizontal.

Solución: $x \approx 14.43\, m$

Problema 9. Dos moscas están a una distancia máxima en una caja, cuyas dimensiones son: 80 cm de largo, 60 cm de ancho y 20 cm de alto. Si una mosca observa a la otra ¿cuál es el ángulo de elevación cuando una mosca debe observar a la otra?

Solución: $\theta \approx 11.30°$

Actividad 1. Calcular medidas inaccesibles al aire libre.

Ahora bien, al ya contar con ciertas estrategias y recursos para abordar una situación, se sugiere invitar al alumno a “poner en práctica” los conocimientos adquiridos, lo cual se centra en el cálculo de distancias inaccesibles por medio de la resolución de triángulos rectángulos.

La actividad se realizará al aire libre, bien en el patio del colegio, un parque, una zona monumental, etc. El único requisito es que sea un espacio abierto en el que haya muchas distancias “que medir”. Donde los materiales y recursos para obtener las medidas serán: un instrumento casero similar al Teodolito y una cinta métrica.

Con esta actividad se pretende que el alumno valore de forma positiva las matemáticas al poder utilizarlas fuera del aula, donde hay múltiples situaciones donde este se puede ver inmerso. Se espera que el alumno después de esta experiencia mejore su visión hacia las matemáticas, que en caso de suceder, facilitaría una disposición favorable en el futuro hacia éstas.

Para la construcción del instrumento casero, ver anexos, o como se indica en la siguiente dirección http://www.cienciafacil.com/TeodolitoSimple.html

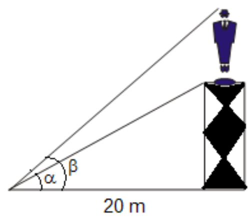
Ejercicios 5.4

1) Calcular la altura de un árbol sabiendo que una persona que mide 1.60 m de altura está parada a 20 m de distancia del árbol, mira la parte más alta de la copa del árbol con un ángulo de elevación de 65º.

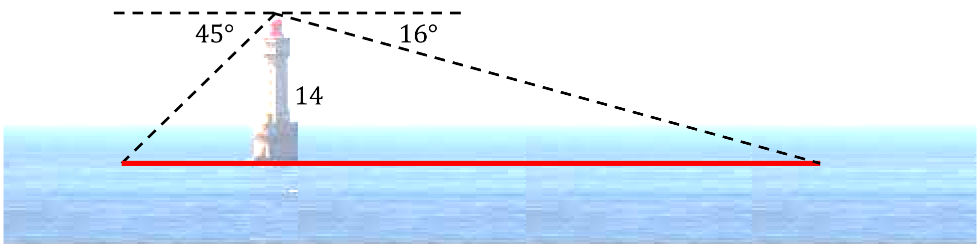
2) Desde la ventana de un edificio de oficinas, se observa una torre de televisión que está a 600 m de distancia (horizontalmente). El ángulo de elevación hacia el extremo

superior de la torre es de 19.6º y el ángulo de depresión hacia la base de la torre es de 21º. ¿Qué altura tiene la torre?

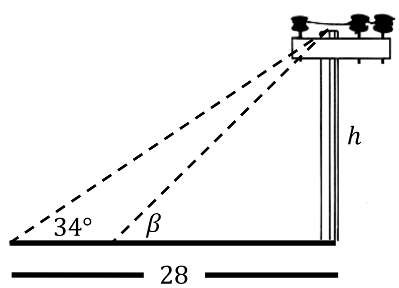
3) A 20 m de la base de una columna, se miden lo ángulos de elevación del borde superior de la columna y el extremo más alto de una estatua. Los ángulos medidos son 42º y 29º. Determinar cuál es la longitud de la estatua.



4) Desde lo alto de un faro, se observan en direcciones opuestas a dos lanchas en el mar con ángulos de depresión de 45º y 16º. Si el faro mide 14 m, ¿qué distancia hay entre las dos lanchas?



5) Si a 28 m de un poste se observa la parte más alta con un ángulo de elevación de 34º y luego nos acercamos al poste a una distancia igual que su altura, el nuevo ángulo de elevación es β. Calcular $tan\beta$.



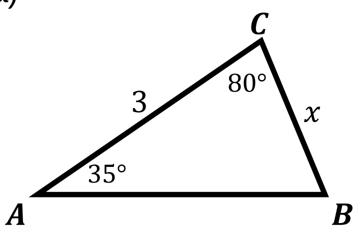
6) Un avión viaja a 1200 metros de altura y desea iniciar su descenso para aterrizar. El ángulo de depresión mide 30º al iniciar el descenso. ¿A qué distancia del inicio de la pista se encuentra el avión?

5.5 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS.

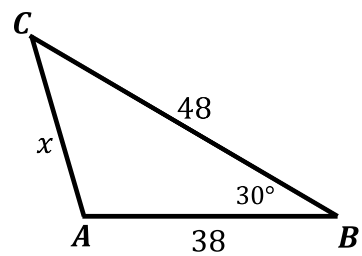
Una manera de iniciar este tema, es proponer triángulos o algún problema donde no se pueda resolver directamente con las razones trigonométricas, con lo cual el alumno se ve en la necesidad de pensar en otro tipo de herramientas que le permita resolverlo o que le ayude a obtener la solución de una manera más directa.

Actividad 1. Encontrar el valor del lado x en los siguientes triángulos:

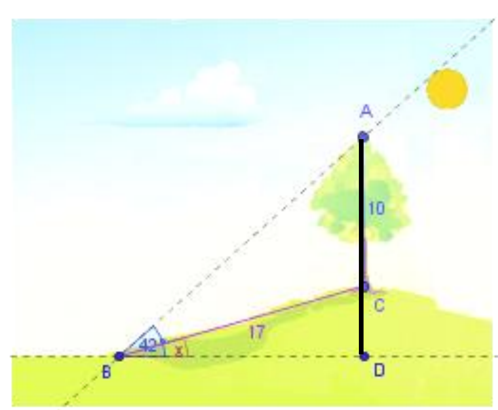
a)



b)



c) Un árbol de 10 m proyecta una sombra de 17 m por una pendiente cuando el ángulo de elevación del Sol es de 42°. Determinar el ángulo de elevación del terreno.

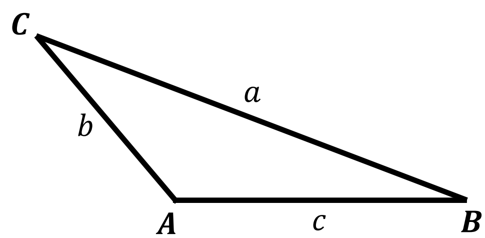


Hasta el momento, sabemos relacionar y calcular los ángulos y los lados de un triángulo rectángulo mediante las razones trigonométricas, o en su caso, el teorema de Pitágoras, pero cómo le hacemos para resolver un triángulo oblicuángulo, es decir, un triángulo que no tiene ángulo recto alguno. Ciertamente, los triángulos de la actividad anterior se pueden resolver, por ejemplo, dividiendo el triángulo en triángulos rectángulos (trazando una altura). Sin embargo, se pueden resolver de una manera más sencilla y directa, utilizando dos nuevas herramientas, que nos proporcionan ciertas relaciones entre las medidas de los lados y los ángulos, estas son: La ley de los Senos y La ley de los Cosenos".

5.5.1 Ley de lo Senos

La ley o teorema de los Senos dice lo siguiente: En cualquier triángulo, la razón entre un lado cualquiera y el seno de su ángulo opuesto es igual a la razón entre un segundo lado y el seno de su ángulo opuesto.
En otras palabras, la ley de los Senos nos dice: "En todo triángulo, los lados son directamente proporcionales a los senos de los ángulos opuestos".

Y se expresa de la siguiente manera:

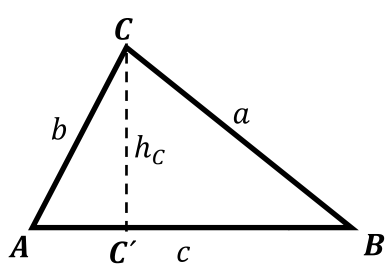


$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C}$$

Por consiguiente, se deduce que la ley de los senos se puede aplicar siempre que se conozcan:
a) Dos ángulos y un lado.
b) Dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos.

La demostración en clase de esta ley es decisión del profesor, considerando tiempos y el desempeño de sus alumnos. Aquí, una forma de cómo deducir la ley de los senos:

Sea ABC un triángulo acutángulo cualquiera.



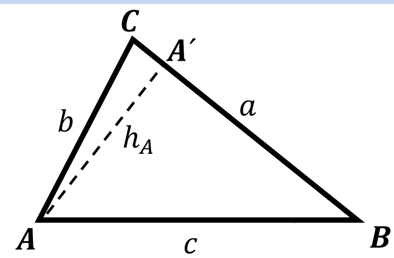
Al trazar la altura h_C desde C con pie en C´, se verifica que en el triángulo rectángulo ACC´ $sen\ A = \frac{h_C}{b}$, donde $h_C = b\,sen\,A$.

Análogamente, en el triángulo BCC´ $sen\ B = \frac{h_C}{a}$, donde $h_C = a\,sen\,B$.

Igualando ambas expresiones resulta: $a\,sen\,B = b\,sen\,A$, que es una expresión equivalente a:

$$\frac{a}{sen\,A} = \frac{b}{sen\,B}$$

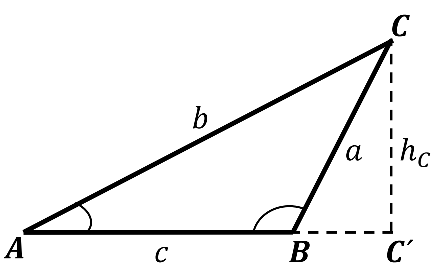
Igualmente, podemos considerar los triángulos rectángulos ACA´ y ABA´ al trazar la altura desde A. Mediante un razonamiento análogo al anterior, se obtiene:



$$\frac{b}{sen\,B} = \frac{c}{sen\,C}$$

De las expresiones obtenidas podemos deducir que: $\dfrac{a}{sen\,A} = \dfrac{b}{sen\,B} = \dfrac{c}{sen\,C}$ ■

Ahora, sea ABC un triángulo obtusángulo cualquiera.



Al trazar la altura h_C desde C con pie en C´, se verifica que en el triángulo rectángulo ACC´ $sen\,A = \frac{h_C}{b}$, donde $h_C = b\,sen\,A$.

Y en el triángulo BCC´ $sen\,CBC´ = sen(180 - B) = sen\,B = \frac{h_C}{a}$, donde $h_C = a\,sen\,B$.

Igualando ambas expresiones resulta: $a\,sen\,B = b\,sen\,A$, que se puede escribir como:

$$\frac{a}{sen\,A} = \frac{b}{sen\,B}$$

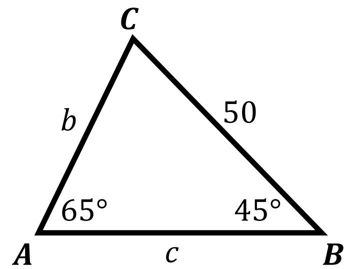
Si consideramos la altura desde A, o bien desde B, y razonando de forma análoga obtenemos nuevamente la expresión del teorema:

$$\frac{a}{sen\,A} = \frac{b}{sen\,B} = \frac{c}{sen\,C} \quad ■$$

De esta manera, se deja ver que el teorema se cumple para cualquier tipo de triángulo oblicuángulo.

Ahora, veamos cómo se aplica esta ley de los senos.

EJEMPLO 1. Resolver el siguiente triángulo:



Solución:

En el triángulo se conocen dos ángulos y un lado opuesto a uno de ellos, por lo que se puede utilizar la ley de los senos.

Para calcular $\angle C$, basta con aplicar el hecho de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º. Por lo tanto,

$$\angle C = 180° - (65° + 45°)$$
$$\angle C = 70°$$

Para calcular b, aplicamos la ley de los senos, escribiendo una igualdad entre dos razones de la siguiente manera, a la izquierda se escribe la razón donde se conoce el lado y su ángulo opuesto, y a la derecha, la razón (o fracción) donde se incluya el tercer elemento conocido, así:

$$\frac{50}{sen65} = \frac{b}{sen45}$$

Al despejar b se tiene:

$$b = \frac{50sen45}{sen65}$$

$$b \approx 39.01$$

Para calcular c, aplicamos nuevamente la ley de los senos:

$$\frac{50}{sen65} = \frac{c}{sen70}$$

donde c,

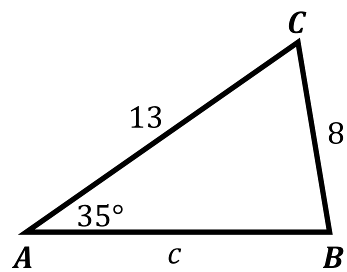
$$c = \frac{50sen70}{sen65}$$

$$c \approx 51.84$$

¿Los resultados son coherentes?

Aquí es muy importante cuestionarse si los resultados obtenidos tienen coherencia, lo cual brindará una idea si lo que se está haciendo está bien. Para ello, basta con recordar la propiedad de que al ángulo mayor se opone el lado mayor, y al ángulo menor se opone el lado menor. Con lo cual se puede evitar alguna confusión con los resultados obtenidos.

EJEMPLO 2. Resolver el siguiente triángulo:



Solución:

En el triángulo se conocen dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos, por lo que también se puede utilizar la ley de los senos.

¿Se puede calcular $\angle C$?

Para calcular $\angle B$, escribimos la igualdad:

$$\frac{8}{sen35} = \frac{13}{senB}$$

donde

$$senB = \frac{13sen35}{8}$$

$$B = sen^{-1}\left(\frac{13sen35}{8}\right)$$

$$\angle B \approx 68.75°$$

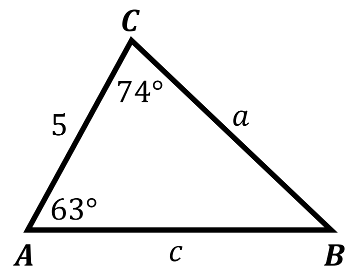
Para calcular el tercer ángulo, $\angle C$, apliquemos el teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo:

$$\angle C = 180° - (35° + 68.75°), \text{ donde } \angle C \approx 76.25°$$

Para calcular el lado c, escribimos: $\dfrac{8}{sen35} = \dfrac{c}{sen76.25}$, donde $c \approx 13.54$

¿Los resultados son coherentes?

EJEMPLO 3. Resolver el siguiente triángulo:



Solución:

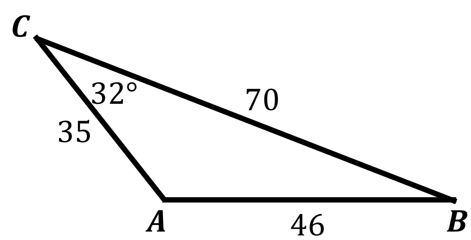
En el triángulo se conocen dos ángulos y un lado que no se opone a ellos, ¿Cómo lo resuelves?

Para calcular $\angle B$, hacemos: $\angle B = 180° - (63° + 74°)$, donde $\angle B = 43°$

Para calcular el lado a, escribimos: $\dfrac{5}{sen43} = \dfrac{a}{sen63}$, donde $a \approx 6.53$

Para calcular el lado c, escribimos: $\dfrac{5}{sen43} = \dfrac{c}{sen74}$, donde $c \approx 7.04$

EJEMPLO 4. Resolver el siguiente triángulo:



Solución:

Sólo falta conocer $\angle A$ y $\angle B$, algunos lo resolverán de la siguiente manera:

Solución 1.

Primero, para calcular $\angle A$:

$$\frac{46}{sen32} = \frac{70}{senA}$$

donde $\angle A \approx 53.74°$

Para calcular $\angle B$:

$\angle B = 180° - (32° + 53.74°)$

donde $\angle B \approx 94.26°$

Solución 2.

Primero, para calcular $\angle B$:

$$\frac{46}{sen32} = \frac{35}{senB}$$

donde $\angle B \approx 23.77°$

Para calcular $\angle A$:

$\angle A = 180° - (32° + 23.77°)$

donde $\angle A \approx 124.23°$

Si la figura está bien hecha,

a) ¿Es correcto aplicar la ley de los senos para calcular los ángulos del triángulo?

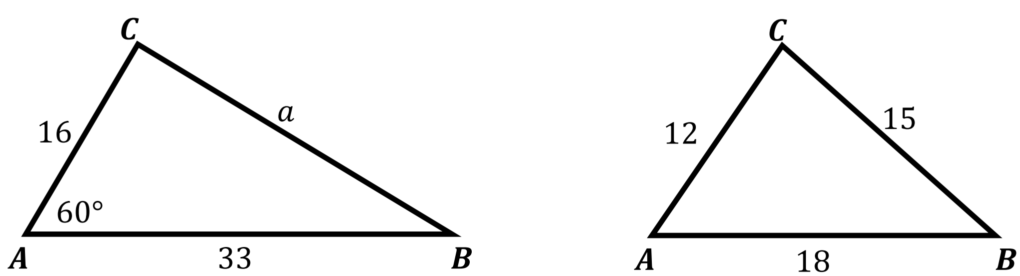
b) ¿Es correcto utilizar la función inversa del seno para despejar un ángulo en una ecuación?

c) ¿Se resolvió de manera correcta el ejercicio, o ambos están equivocados? ¿Quién tiene razón? ¿Por qué?
d) ¿Qué error se cometió? ¿Qué recomendación harías para no cometer el error, si es que lo hay?
e) ¿Tiene importancia el orden en que se calculan los ángulos del triángulo? ¿Cuál es la manera de realizarlo correctamente?

Como se puede ver en el ejercicio anterior, se abre un debate sobre cuál es la respuesta correcta, confusión que se puede resolver si el alumno es precavido y tiene presente en la resolución de un triángulo "mirar" si los resultados obtenidos son coherentes.

Así, además de reflexionar sobre esta situación, el alumno concibe qué ángulo calcular primero, un agudo o un obtuso. Pues al calcular la medida de un ángulo mayor de 90°, el valor de su *arco seno* correspondiente, será un valor menor a 90° lo cual es incoherente. Mientras que si calcula el ángulo agudo obtiene con toda certeza un valor menor a 90°.

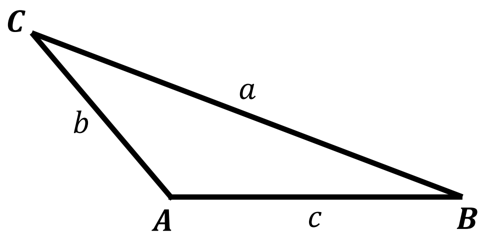
Ahora bien, resuelve los siguientes triángulos:



Como se puede observar, existen situaciones donde la ley de los senos no se puede aplicar de forma directa, como es el caso de tener dos lados y el ángulo comprendido entre ellos o cuando sólo se tienen los tres lados. Para estos casos se aplica la llamada Ley del Coseno.

5.5.2 Ley de los Cosenos.

La ley de los Cosenos dice así: En todo triángulo, el cuadrado de cualquier lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de estos dos lados por el coseno del ángulo que forman. Y se expresa de la siguiente manera:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cosA$$

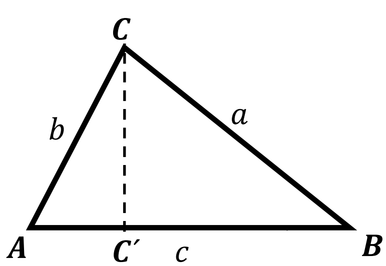
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cosB$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cosC$$

Así, esta ley se aplica cuando se conocen:
a) Dos lados y el ángulo entre ellos.
b) Tres lados.

La demostración en clase de esta ley es decisión del profesor. A continuación, una forma de deducir la ley de los cosenos:

Sea ABC un triángulo acutángulo cualquiera.



Al trazar la altura desde C con pie en C´, se verifica que en el triángulo rectángulo ACC´, $b^2 = CC'^2 + AC'^2$.

entonces, $b^2 = CC'^2 + AC'^2$

$$= CC'^2 + (c - BC')^2$$

$$= (CC'^2 + BC'^2) + c^2 - 2cBC'$$

$$= a^2 + c^2 - 2cBC'$$

En el triángulo BCC´, $cos\,B = \frac{BC'}{a}$ donde $BC' = a\,cos\,B$

entonces, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,cos\,B$

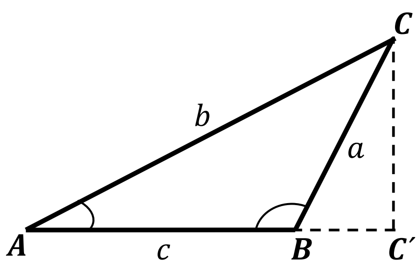
Aplicando el mismo procedimiento a los otros lados del triángulo obtenemos las siguientes relaciones:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cosA$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cosB$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cosC$$

Ahora, sea ABC un triángulo obtusángulo cualquiera.



Al trazar la altura desde C con pie en C´, se verifica que en el triángulo rectángulo ACC´, $b^2 = CC'^2 + AC'^2$.

Entonces, $b^2 = CC'^2 + AC'^2$

$$= CC'^2 + (c + BC')^2$$
$$= (CC'^2 + BC'^2) + c^2 + 2cBC'$$
$$= a^2 + c^2 - 2cBC'$$

En el triángulo rectángulo BCC´, $cos\,CBC' = \frac{BC'}{a}$ donde

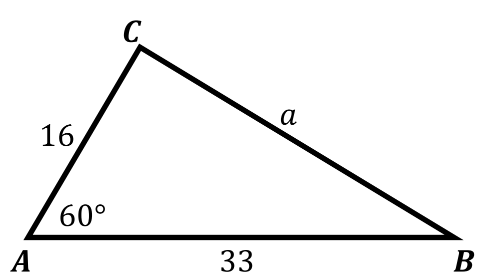
$BC' = a\,cos\,CBC' = a\,cos(180° - B) = -a\,cos\,B$

entonces, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,cos\,B$

Y volvemos a obtener la misma expresión obtenida anteriormente para el lado b. Aplicando el mismo razonamiento para los otros lados se obtienen las mismas relaciones para el teorema o ley de los cosenos. Lo cual deja ver que dicho teorema se cumple para cualquier tipo de triángulo oblicuángulo.

Ahora, veamos cómo se aplica esta ley de los cosenos.

EJEMPLO 1. Resolver el siguiente triángulo:



Solución:

En el triángulo se conocen un ángulo y dos lados adyacentes a éste, por lo que no podemos utilizar la ley de los senos, pero si la ley de los cosenos.

Para calcular a, utilizamos $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cosA$, donde se sustituyen los elementos conocidos y se despeja a:

$$a^2 = (16)^2 + (33)^2 - 2(16)(33)\cos 60°\ , \text{ donde } \quad a = \sqrt{817} \approx 28.58$$

Para calcular $\angle B$, utilizamos $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\, cosB$, donde se sustituyen los elementos conocidos y se despeja $\angle B$:

$$(16)^2 = (28.58)^2 + (33)^2 - 2(28.58)(33)\cos B$$

$$B = cos^{-1}\left(\frac{(16)^2 - \left[(28.58)^2 + (33)^2\right]}{-2(28.58)(33)}\right),$$ donde $\angle B \approx 28.99°$

Para calcular $\angle C$, basta con hacer: $\angle C \approx 180° - (60° + 28.99°) \approx 91.01°$
O utilizar $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\, cosC$, donde se sustituyen los elementos conocidos y se despeja $\angle C$:

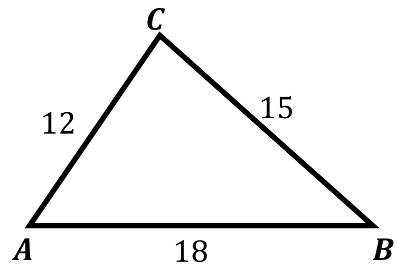
$$(33)^2 = (28.58)^2 + (16)^2 - 2(28.58)(16)cosC$$

$$C = cos^{-1}\left(\frac{(33)^2 - \left[(28.58)^2 + (16)^2\right]}{-2(28.58)(16)}\right),$$ donde $\angle C \approx 91.01°$

Se observa que el tercer ángulo se puede obtener por simple diferencia a 180°, ya que la suma de los ángulos interiores de todo triángulo es 180°, o aplicando nuevamente la ley de los cosenos. Dada la facilidad de calcular el tercer ángulo mediante la primera opción se puede sugerir ésta, ya que ambos caminos utilizan un resultado previo.

Como se utiliza un resultado previo para el cálculo de algún otro elemento, aquí suelen presentarse algunas dificultades, las cuales se derivan, en el mayor de los casos, por utilizar un resultado previo mal calculado. Para evitar esto, se sugiere tener mucho cuidado al momento de calcular aquellos elementos que son utilizados posteriormente.

Por otra parte, si se dan las condiciones, también se pueden calcular los ángulos utilizando la ley de los senos, sin embargo, si se opta por este camino hay que tener cuidado con aquellos resultados incoherentes, los cuales se derivan por calcular los ángulos en orden incorrecto.



EJEMPLO 2. Resolver el siguiente triángulo:

Solución:

En el triángulo se conocen los tres lados, por lo que se puede utilizar la ley de los cosenos.

Para calcular $\angle A$, utilizamos $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\, cosA$, donde se sustituyen los elementos conocidos y se despeja $\angle A$:

$$(15)^2 = (12)^2 + (18)^2 - 2(12)(18)cosA$$

$$A = cos^{-1}\left(\frac{(15)^2 - \left[(12)^2 + (18)^2\right]}{-2(12)(18)}\right), \text{ donde } \angle A \approx 55.77°$$

Para calcular $\angle B$, utilizamos $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\, cosB$, y se sustituyen de la misma forma los elementos conocidos y se despeja $\angle B$:

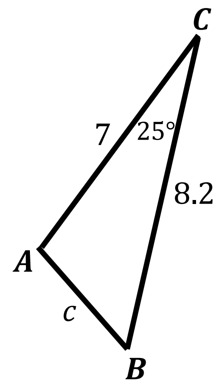
$$(12)^2 = (15)^2 + (18)^2 - 2(15)(18)cosB$$

$$B = cos^{-1}\left(\frac{(12)^2 - \left[(15)^2 + (18)^2\right]}{-2(15)(18)}\right), \text{ donde } \angle B \approx 41.40°$$

O utilizar la ley de los senos, que resulta menos laborioso y se llega al mismo resultado.

Para calcular $\angle C$, hacemos: $\angle C \approx 180° - (55.77° + 41.40°) \approx 82.83°$

EJEMPLO 3. Resolver el siguiente triángulo:



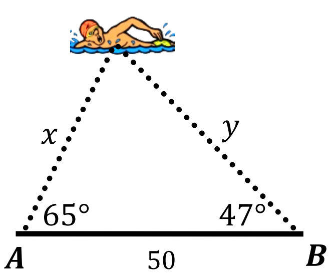
a) ¿Qué pasa si se calcula primero $\angle A$, con la ley de los senos?
b) ¿Y con la ley de los cosenos?

5.5.3 Problemas donde intervienen triángulos oblicuángulos.

Problema 1. Patricio, un salvavidas de Acapulco ubicado en el punto A, observa a un nadador que pide auxilio con un ángulo de 65º, y Rodrigo, un salvavidas ubicado en el punto B, lo observa con un ángulo de 47º. Si ambos están separados a una distancia de 50 m, ¿qué distancia tiene que recorrer cada salvavidas para rescatarlo?

Solución:

Trazando una figura que represente el problema, tenemos:



Para calcular x:

$$\frac{50}{sen\ 68°} = \frac{x}{sen\ 47°}$$

$$x = \frac{50 sen\ 47°}{sen\ 68°}$$

$$x \approx \mathbf{39.43°}$$

Para calcular y:

$$\frac{50}{sen\ 68°} = \frac{y}{sen\ 65°}$$

$$y = \frac{50 sen\ 65°}{sen\ 68°}$$

$$y \approx \mathbf{48.87°}$$

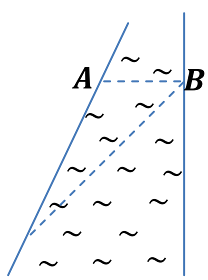
Problema 2. Un biólogo le coloca un dispositivo localizador a un halcón para una investigación. En un momento dado, el halcón vuela 25 km con dirección Sur, después cambia su vuelo con una dirección de 75º al Oeste, recorriendo 35 km. ¿A qué distancia se encuentra del punto de partida?

Solución: $d \approx 37.37\ m$

Problema 3. Dos puestos de observación A y B están colocados a lo largo de la costa (separados por 10 km), para vigilar barcos intrusos que intentan llegar a la costa. Si el vigilante A informa que hay un barco S en un ángulo BAS = 37°, y el B informa que el mismo barco está en un ángulo ABS = 20°. ¿A qué distancia del puesto A se encuentra el barco? ¿A qué distancia de la costa se encuentra el barco (si se supone que la costa es una línea recta a lo largo de los dos puestos de observación)?

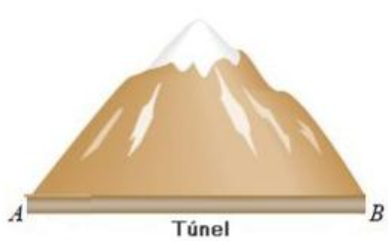
Solución: $dAS \approx 4.07\ km$
$dCS \approx 2.44\ km$

Problema 4. Para determinar lo ancho AB de una parte de un rio, una persona situada en A observa una piedra en B al otro lado del rio con un ángulo de 118º (ver figura), camina 25 m sobre la misma orilla y ahora observa a la piedra en un ángulo de 16º. ¿Cuál es la longitud del ancho del rio en AB?



Solución: $L \approx 9.57\ m$

Problema 5. Se quiere construir un túnel que atraviese una montaña, para ello un topógrafo camina de ambos extremos de ésta hacia un punto P, donde calcula 380 m de un extremo y 290 m del otro extremo hacia dicho punto. Desde P mide el ángulo que se forma con las visuales hacia los extremos, obteniendo 110º. ¿Qué longitud tendrá el túnel?



Solución: $L \approx 430.22\ m$

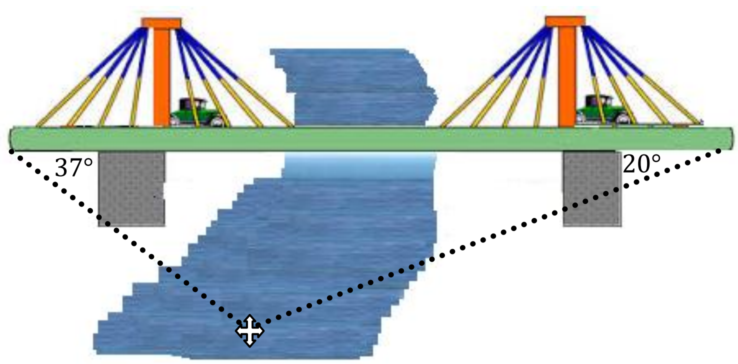
Problema 6. Un árbol se encuentra inclinado 20º con respecto a la vertical y está por caer en dirección a una casa que se encuentra a 15 m de la base del árbol. El dueño de la casa, sale a la puerta y calcula que el ángulo de elevación desde la horizontal es de 52º hasta la parte superior del árbol. ¿Caerá el árbol sobre la casa?

Solución: NO, porque
$\acute{a}rbol \approx 13.93\ m$

Problema 7. Desde la habitación de un hotel, una persona observa un coche frente al hotel de la siguiente manera: desde la parte superior de esta persona el ángulo de depresión hacia el coche es de 30º, y desde la parte inferior de ésta en un ángulo de 25º. Si la persona mide 1.7 m, ¿a qué distancia se encuentra el coche del hotel?

Solución: $d \approx 15.30\ m$

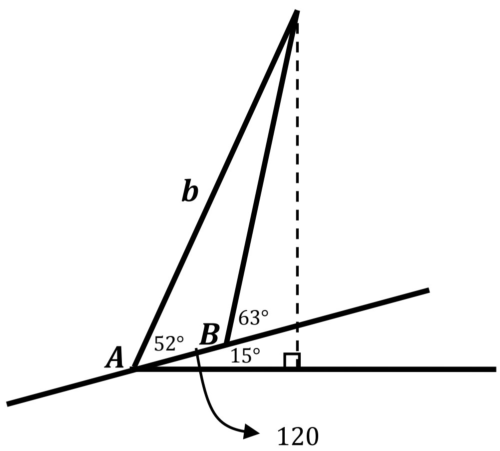
Problema 8. En un puente de la autopista del Sol, de 200 m de largo, desde un extremo se observa a un pescador en el rio Papagayo con un ángulo de depresión de 37º, y desde el otro extremo del puente se observa al mismo pescador en un ángulo de 20º. ¿Qué altura tiene el puente desde la ubicación del pescador?

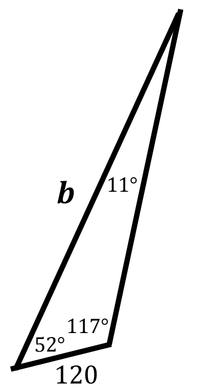


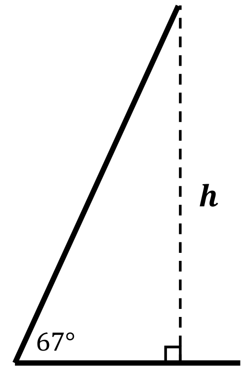
Solución: $h \approx 49.08\ m$

Problema 9. Un camino recto hace un ángulo de 15º con relación a la horizontal. Desde el punto A sobre el camino, el ángulo de elevación a un avión es de 52º. En el mismo instante, desde otro punto B sobre el camino situado a 120 m del punto A, el ángulo de elevación es de 63º. Encontrar la distancia del punto A hasta el avión y la altura a la que vuela el avión con respecto a la horizontal.

Solución:







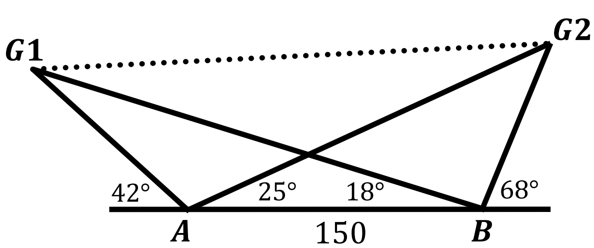
$$\frac{120}{sen\ 11°} = \frac{b}{sen\ 117°}$$

$$sen\ 67° = \frac{h}{560.35}$$

$$b \approx \mathbf{560.35}\ u$$

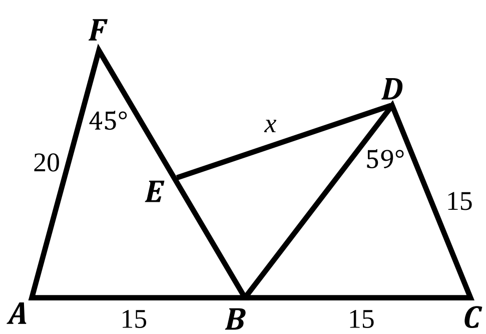
$$h \approx \mathbf{515.80}\ u$$

Problema 10. Dos observadores desde dos puntos distintos A y B, ven dos globos aerostáticos G1 y G2, que están en el mismo plano vertical en el cual están ellos. La distancia entre los observadores es de 150 m, y los ángulos de elevación hacia los dos globos desde los dos puntos son: hacia el globo G1 desde A es de 42º y desde B 16º; hacia el globo G2 desde A es 25º, y desde B 68º (ver figura). ¿A qué distancia se encuentran los globos uno del otro?



Solución: $d \approx 255.94\ m$

Problema 11. ΔBCD es isósceles; ED corta a BF a la mitad. Calcular x.



Solución: $x \approx 15.85$

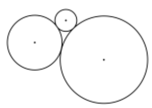
Problema 12. Tres círculos de radio 2, 5 y 8 cm son tangentes uno al otro. Encontrar los tres ángulos formados por las líneas que unen sus centros.

Solución:

$\angle\, circulo\ radio\ 2\ es \approx 98.21°$

$\angle\, circulo\ radio\ 5\ es \approx 49.58°$

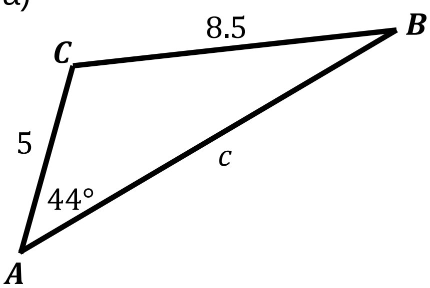
$\angle\, circulo\ radio\ 8\ es \approx 32.21°$



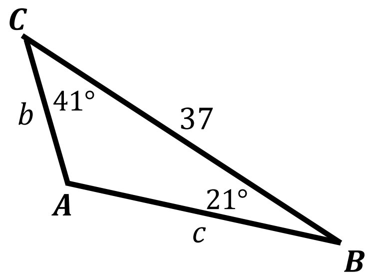
Ejercicios 5.5

1) Resolver los siguientes triángulos:

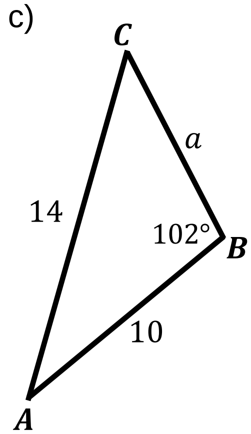
a)



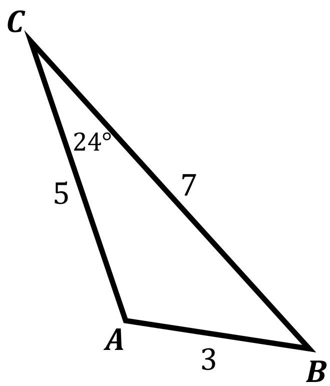
b)



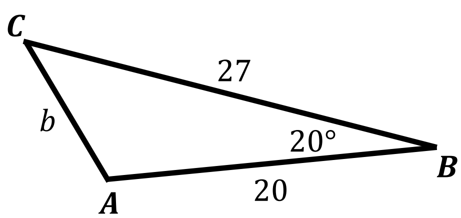
c)

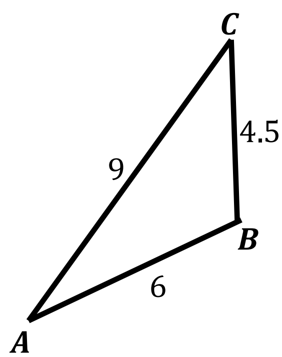


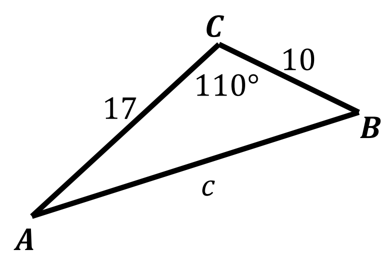
d)



2) Resolver los siguientes triángulos:

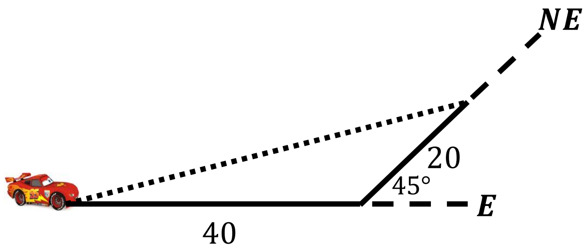




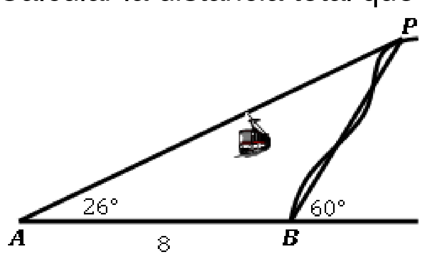


3) Para medir la altura de una cubierta de nubes en un aeropuerto, un trabajador dirige un reflector hacia arriba a un ángulo de 75º desde la horizontal. Un observador a 600 m mide el ángulo de elevación hasta el punto de luz y encuentra que es de 45º. Determinar la altura de la cubierta de nubes.

4) Un automóvil viaja por una carretera en dirección Este durante una hora; luego viaja durante 30 minutos por otra carretera que se dirige al Noreste. Si el automóvil se desplaza a una velocidad constante de 40 km/hora, ¿qué tan lejos está de su posición de partida al terminar el recorrido?



5) Un teleférico transporta pasajeros desde un punto A, que está a 8 km del punto B ubicado en la base de una montaña. El teleférico llega hasta un punto P en la cima de la montaña. Los ángulos de elevación de P desde A y B son 27º y 60º, respectivamente. Calcular la distancia total que recorre el teleférico.

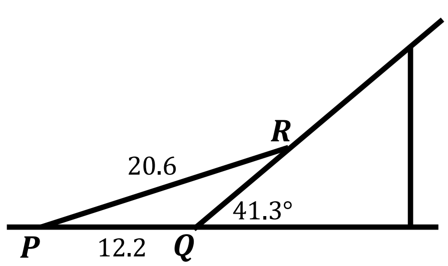


6) Tres amigos se sitúan en un campo de fútbol. Entre Alberto y Jorge hay 25 m, entre Jorge y Ernesto 12 m, y entre Ernesto y Alberto 8 m. ¿Qué medidas tienen los ángulos que se forman entre ellos?

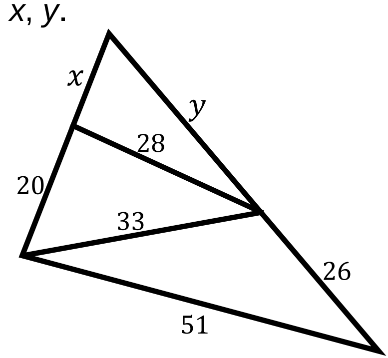
7) Encontrar el perímetro y los ángulos interiores de un pentágono regular inscrito en un círculo de 12.5 m de radio.

8) Encontrar los elementos que se indican en cada caso:

a) Hallar $\overline{QR}$.



b) Hallar *x*, *y*.



5.6 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES:

En trigonometría existen unas ecuaciones muy especiales a las cuales se les han llamado identidades trigonométricas. Esta parte de la unidad se centra en la obtención y manejo algebraico de algunas de ellas, ya que resultan fundamentales para simplificar expresiones que incluyen razones trigonométricas, demostrar una proposición trigonométrica, o para estudios posteriores como el cálculo de integrales indefinidas de funciones trigonométricas.

Una identidad trigonométrica es una igualdad que contiene razones trigonométricas y que es verdadera, para cualquier valor que se asigne al ángulo para el cual están definidas estas razones.
"Las identidades trigonométricas son formas simplificadas que permiten realizar y conocer las diferentes funciones de la trigonometría. Permiten tener diferentes posibilidades para representar cada función trigonométrica (es decir, los valores) de maneras variadas y específicas de acuerdo a cada caso"
(http://www.definicionabc.com/ciencia/identidades-trigonometricas.php#ixzz3YS1KcAot)

Así pues, las identidades trigonométricas sirven para desarrollar el pensamiento deductivo de los estudiantes. En efecto, en proceso de demostración, se hace necesario de partir de las identidades fundamentales y mediante una serie de procedimientos algebraicos como sustituciones, operaciones con fracciones algebraicas, multiplicaciones, factorizaciones y simplificaciones, se debe llegar a una conclusión final.

Las identidades trigonométricas se deducen a partir de las definiciones elementales de las razones trigonométricas mencionadas al inicio de la unidad:

$$sen\,\theta = \frac{y}{r} \qquad csc\,\theta = \frac{r}{y}$$

$$cos\,\theta = \frac{x}{r} \qquad sec\,\theta = \frac{r}{x}$$

$$tan\,\theta = \frac{y}{x} \qquad cot\,\theta = \frac{x}{y}$$

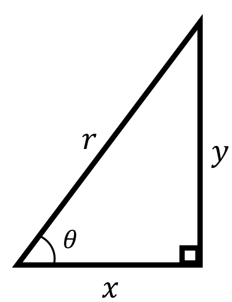


Figura 1

Veamos cómo deducir las identidades fundamentales:

5.6.1 Recíprocas.

Conviene recordar, que dos números son recíprocos si se invierten respectivamente el numerador con el denominador. Por ejemplo, 3/4 y 4/3 son recíprocos; 2/9 y 9/2 son recíprocos.

Por otra parte, al multiplicar dos números recíprocos m y n entre si, se obtiene la unidad, esto es, si m y n son recíprocos se cumple que $m \cdot n = 1$. De donde, por simple despeje, puede escribirse $m = \frac{1}{n}$, o bien $n = \frac{1}{m}$.

En este sentido, puede verse que las razones del *seno* y *cosecante* son recíprocas ya que de su multiplicación se obtiene $\frac{y}{r} \cdot \frac{r}{y} = 1$. Entonces, $sen\,\theta \cdot csc\,\theta = 1$, de manera que: $\boldsymbol{sen\,\theta = \frac{1}{csc\,\theta}}$, y $\boldsymbol{csc\,\theta = \frac{1}{sen\,\theta}}$.

Actividad 1. ¿Qué pasa con el *coseno* y la *secante*?

De la misma forma, *coseno* y *secante* son recíprocas, pues $\frac{x}{r} \cdot \frac{r}{x} = 1$. Entonces, $cos\,\theta \cdot sec\,\theta = 1$, de manera que: $\boldsymbol{cos\,\theta = \frac{1}{sec\,\theta}}$, y $\boldsymbol{sec\,\theta = \frac{1}{cos\,\theta}}$.

Actividad 2. ¿Cuál es el recíproco de *cotangente*? ¿Cuál es el recíproco de la t*angente*?

Siguiendo el mismo razonamiento, *tangente* y *cotangente* también lo son ya que $\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y} = 1$. Entonces, $tan\,\theta \cdot cot\,\theta = 1$, de manera que: $\boldsymbol{tan\,\theta = \frac{1}{cot\,\theta}}$, y $\boldsymbol{cot\,\theta = \frac{1}{tan\,\theta}}$.

En resumen, las identidades fundamentales recíprocas son:

$$\boldsymbol{sen\,\theta = \frac{1}{csc\,\theta}} \qquad \boldsymbol{csc\,\theta = \frac{1}{sen\,\theta}}$$

$$\boldsymbol{cos\,\theta = \frac{1}{sec\,\theta}} \qquad \boldsymbol{sec\,\theta = \frac{1}{cos\,\theta}}$$

$$\boldsymbol{tan\,\theta = \frac{1}{cot\,\theta}} \qquad \boldsymbol{cot\,\theta = \frac{1}{tan\,\theta}}$$

5.6.2 De división.

Sabemos que en el triángulo de la figura 1, $sen\,\theta = \frac{y}{r}$ y $cos\,\theta = \frac{x}{r}$. Ahora bien, si dividimos el *seno* entre el *coseno* se tiene: $\frac{sen\ \theta}{cos\ \theta} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{yr}{xr} = \frac{y}{x} = tan\,\theta$, de manera que, $\boldsymbol{tan\,\theta} = \frac{\boldsymbol{sen\,\theta}}{\boldsymbol{cos\ \theta}}$.

Actividad 3. ¿Qué se obtiene si divides *coseno* entre *seno*?

Al realizar lo mismo, pero al contrario, es decir, si dividimos el *coseno* entre el *seno* se obtiene: $\frac{cos\,\theta}{sen\ \theta} = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{xr}{yr} = \frac{x}{y} = cot\,\theta$ de manera que, $\boldsymbol{cot\,\theta} = \frac{\boldsymbol{cos\ \theta}}{\boldsymbol{sen\ \theta}}$.

En resumen, las identidades fundamentales del cociente son:

$$\boldsymbol{tan\,\theta} = \frac{\boldsymbol{sen\ \theta}}{\boldsymbol{cos\ \theta}} \quad ; \quad \boldsymbol{cot\,\theta} = \frac{\boldsymbol{cos\ \theta}}{\boldsymbol{sen\ \theta}}\ .$$

5.6.3 Pitagóricas.

Reciben este nombre porque se originan del teorema de Pitágoras. Esto es, aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo de la figura 1, se tiene que:

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad (1)$$

dividiendo ésta igualdad entre r^2, se obtiene: $\frac{r^2}{r^2} = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2}$, esto es, $1 = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2}$, que se puede escribir como: $1 = \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2$.

Dado que $\frac{x}{r} = cos\,\theta$ y $\frac{y}{r} = sen\,\theta$, se concluye que: $\boldsymbol{sen^2\,\theta + cos^2\,\theta = 1}$.

Lo cual significa que para cualquier ángulo θ, la suma del *seno* cuadrado de ese ángulo más el *coseno* cuadrado del mismo ángulo siempre es igual a uno.

El alumno puede probarlo con su calculadora, por ejemplo, para $\theta = 27°$, realizar las operaciones $(sen\ 27)^2 + (cos\ 27)^2 = 1$ para comprobar que el resultado es igual a 1.

O sin calculadora, mostrar numéricamente que $(sen\ 60)^2 + (cos\ 60)^2 = 1$.

Ahora, si se divide la igualdad (1) entre x^2, se obtiene: $\frac{r^2}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2}$, esto es, $\frac{r^2}{x^2} = 1 + \frac{y^2}{x^2}$, que se puede escribir como: $\left(\frac{r}{x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2$.

Como $\frac{r}{x} = sec\,\theta$ y $\frac{y}{x} = tan\,\theta$, se concluye que: $\boldsymbol{sec^2\,\theta = tan^2\,\theta + 1}$.

Actividad 4. ¿Qué se obtiene si se divide la igualdad (1) entre y^2?

Si se divide entre y^2, se obtiene: $\frac{r^2}{y^2} = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{y^2}$, esto es, $\frac{r^2}{y^2} = \frac{x^2}{y^2} + 1$, que se puede escribir como: $\left(\frac{r}{y}\right)^2 = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1$.

Dado que $\frac{r}{y} = csc\,\theta$ y $\frac{x}{y} = cot\,\theta$, se concluye que: $\boldsymbol{csc^2\,\theta = cot^2\,\theta + 1}$.

En resumen, las identidades fundamentales Pitagóricas son:

$$\boldsymbol{sen^2\,\theta + cos^2\,\theta = 1}$$

$$\boldsymbol{sec^2\,\theta = tan^2\,\theta + 1}$$

$$\boldsymbol{csc^2\,\theta = cot^2\,\theta + 1}$$

Las identidades antes mencionadas son la base de muchas demostraciones, asimismo, hay otras expresiones que resultan muy importantes y que se pueden utilizar de la misma manera que las identidades fundamentales, pues en realidad siguen siendo las mismas expresiones derivadas por un simple despeje.

Los despejes correspondientes a las identidades recíprocas son:

$$sen\,A = \frac{1}{csc\,A} \qquad sen\,A \cdot csc\,A = 1$$

$$cos\,A = \frac{1}{sec\,A} \qquad cos\,A \cdot sec\,A = 1$$

$$tan\,A = \frac{1}{cot\,A} \qquad tan\,A \cdot cot\,A = 1$$

Los despejes correspondientes a las identidades del cociente son:

$$tan\,A = \frac{sen\,A}{cos\,A} \quad \begin{cases} cos\,A = \dfrac{sen\,A}{A} \\ tan\,A \cdot cos\,A = sen\,A \end{cases}$$

$$cot\,A = \frac{cos\,A}{sen\,A} \quad \begin{cases} sen\,A = \dfrac{cos\,A}{cot\,A} \\ cot\,A \cdot sen\,A = cos\,A \end{cases}$$

Por último, los despejes correspondientes a las Pitagóricas son:

$$sen^2\,A + cos^2\,A = 1 \quad \begin{cases} sen^2\,A = 1 - cos^2\,A \\ cos^2\,A = 1 - sen^2\,A \end{cases}$$

$$sec^2\,A = tan^2\,A + 1 \quad \begin{cases} sec^2\,A - tan^2\,A = 1 \\ tan^2\,A = sec^2\,A - 1 \end{cases}$$

$$csc^2\,A = cot^2\,A + 1 \quad \begin{cases} csc^2\,A - cot^2\,A = 1 \\ cot^2\,A = csc^2\,A - 1 \end{cases}$$

Ahora bien, en cuanto a demostrar identidades trigonométricas el alumno siempre presenta dificultades porque exige la aplicación de diversos conocimientos. Aquí presentamos los pasos generales para demostrar identidades, donde, sin duda, algunos pasos tendrán que ejercitarse un poco más para aplicarlos de manera más efectiva.

1. Conocer las ocho relaciones básicas y reconocer las formas alternativas de cada una.

2. Conocer los procedimientos de adición y sustracción, reducción y transformación de fracciones en fracciones equivalentes.
3. Conocer las técnicas de factorización y de los productos especiales.
4. Usar solamente procedimientos de sustitución y de simplificación que permitan trabajar en un solo lado de la ecuación.
5. Seleccionar el lado de la ecuación que parezca ser más complicado, e intentar transformarlo en el otro miembro de la ecuación.
6. Transformar, independientemente, ambos lados de la ecuación en la misma forma.
7. Evitar sustituciones que introduzcan raíces.
8. Usar sustituciones para cambiar todas las funciones trigonométricas en expresiones que contengan únicamente senos y cosenos, y entonces, simplificar.
9. Multiplicar el numerador y el denominador de una fracción por el conjugado de cualquiera de ellos.
10. Simplificar la raíz cuadrada de una fracción utilizando conjugados para transformarla en el cociente con cuadrados perfectos.

A continuación algunos ejemplos donde se aplican algunos de estos pasos para la demostración de identidades.

EJEMPLO 1. Demostrar que $cot\,A = \frac{cos\,A}{sen\,A}$

Solución:

Sabemos que: $cot\,A = \frac{1}{tan\,A}$ y $tan\,A = \frac{sen\,A}{cos\,A}$

Entonces, $cot\,A = \frac{1}{tan\,A} = \frac{1}{\frac{sen\,A}{cos\,A}} = \frac{cos\,A}{sen\,A}$ ■

EJEMPLO 2. Demostrar que $cos\,A \cdot sec\,A = 1$

Solución:

Sabemos que: $sec\,A = \frac{1}{cos\,A}$

Entonces, $cos\,A \cdot sec\,A = cos\,A\left(\frac{1}{cos\,A}\right) = \frac{cos\,A}{cos\,A} = 1$ ■

EJEMPLO 3. Demostrar que $\frac{sen^2\,A + cos^2\,A}{tan^2\,A + 1} = cos^2\,A$

Solución:

Sabemos que: $sen^2\,A + cos^2\,A = 1$ y $tan^2\,A + 1 = sec^2\,A$

Entonces, $\frac{sen^2\,A + cos^2\,A}{tan^2\,A + 1} = \frac{1}{sec^2\,A} = \left(\frac{1}{sec\,A}\right)^2 = (cos\,A)^2 = cos^2\,A$ ■

EJEMPLO 4. Demostrar que $\frac{sec\,A}{csc\,A} = \frac{1}{cot\,A}$

Solución:

Sabemos que: $sec\,A = \frac{1}{cos\,A}$; $csc\,A = \frac{1}{sen\,A}$ y $cot\,A = \frac{cos\,A}{sen\,A}$

Sustituyendo en, $\frac{sec\,A}{csc\,A} = \frac{1}{cot\,A}$, se tiene:

$$\frac{\frac{1}{cos\,A}}{\frac{1}{sen\,A}} = \frac{1}{\frac{cos\,A}{sen\,A}}$$

$$\frac{sen\,A}{cos\,A} = \frac{sen\,A}{cos\,A} \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 5. Demostrar que $cot^2\,A + 1 = \frac{1}{sen^2\,A}$

Solución:

Sabemos que: $cot^2\,A + 1 = csc^2$ y $\frac{1}{sen^2\,A} = csc^2$

Sustituyendo en, $cot^2\,A + 1 = \frac{1}{sen^2\,A}$, se tiene:

$$csc^2 = csc^2 \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 6. Demostrar que $(sen\,A + cos\,A)^2 = 1 + \frac{2sen\,A}{sec\,A}$

Solución:

Desarrollando el binomio: $sen^2A + 2sen\,A \cdot cos\,A + cos^2A = 1 + \frac{2sen\,A}{sec\,A}$,

Del lado izquierdo se tiene $sen^2A + cos^2A$, que es igual a 1. Sustituyendo esto, se tiene: $1 + 2sen\,A \cdot cos\,A = 1 + \frac{2sen\,A}{sec\,A}$

Que es lo mismo: $1 + 2sen\,A \cdot cos\,A = 1 + 2sen\,A\left(\frac{1}{sec\,A}\right)$

Como $\frac{1}{sec\,A} = cos\,A$, se tiene: $1 + 2sen\,A \cdot cos\,A = 1 + 2sen\,A \cdot cos\,A$ $\blacksquare$

EJEMPLO 7. Demostrar que $\frac{sen^2\,A + cos^2A}{tan^2\,A} = cot^2A$

Solución:

Sabemos que: $sen^2\,A + cos^2A = 1$

Entonces, $\frac{sen^2\,A + cos^2A}{tan^2\,A} = \frac{1}{tan^2\,A} = \left(\frac{1}{tan\,A}\right)^2 = cot^2A$ $\blacksquare$

EJEMPLO 8. Demostrar que $\frac{\tan A - \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen}^3 A} = \frac{\sec A}{1+\cos A}$

Solución:

$$\frac{\tan A - \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen}^3 A} = \frac{\frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} - \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen}^3 A} = \frac{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} A \cos A}{\cos A \operatorname{sen}^3 A} = \frac{\operatorname{sen} A\,(1 - \cos A)}{\cos A \operatorname{sen}^3 A} = \frac{1 - \cos A}{\cos A \operatorname{sen}^2 A}$$

$$= \frac{1 - \cos A}{\cos A\,(1 - \cos^2 A)} = \frac{1}{\cos A\,(1 + \cos A)} = \frac{\sec A}{1 + \cos A} \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 9. Demostrar que $\sqrt{\frac{\sec A - \tan A}{\sec A + \tan A}} = \frac{1}{\sec A + \tan A}$

Solución:

$$\sqrt{\frac{\sec A - \tan A}{\sec A + \tan A}} = \sqrt{\frac{\sec A - \tan A}{\sec A + \tan A} \cdot \frac{\sec A + \tan A}{\sec A + \tan A}} = \sqrt{\frac{\sec^2 A - \tan^2 A}{(\sec A + \tan A)^2}} = \sqrt{\frac{1}{(\sec A + \tan A)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sec A + \tan A} \qquad \blacksquare$$

Ejercicios 5.6

1) Mostrar numéricamente que $sen^2 60 + cos^2 60 = 1$

2) Mostrar numéricamente que $tan\, 45\, cos\, 45 = sen\, 45$

3) Demostrar: $\frac{sec\, A}{csc\, A} = tan\, A$

4) Demostrar: $\frac{1}{csc^2 A} + cos^2 A = 1$

5) Demostrar: $sen\, A(1 + cot^2 A) = csc\, A$

6) Demostrar: $tan^2 A + sen^2 A + cos^2 A = sec^2 A$

7) Demostrar: $tan^2 A + tan\, A \cdot cot\, A = sec^2 A$

8) Demostrar: $cot^2 A + \frac{1}{tan\, A \cdot cot\, A} = csc^2 A$

9) Demostrar: $cot^2 A + sen^2 A + cos^2 A = csc^2 A$

10) Demostrar: $sec^2 A(1 - sen^2 A) = 1$

11) Demostrar: $sen^2 A \cdot sec\, A = \frac{sen\, A}{cot\, A}$

12) Demostrar: $\frac{sen^2 A + cos^2 A}{tan^2 A + 1} = cos^2 A$

13) Demostrar: $\frac{sen\, A}{1 + cos\, A} = \frac{1 - cos\, A}{sen\, A}$

14) Demostrar: $\frac{cos\, A\, cot\, A - sen\, A\, tan\, A}{csc\, A - sec\, A} = 1 + sen\, A\, cos\, A$

Identificación de puntos problemáticos y propuestas de solución.

	PUNTOS PROBLEMÁTICOS	PROPUESTA DE SOLUCIÓN
5.1 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS SENO, COSENO Y TANGENTE PARA ÁNGULOS AGUDOS.	En esta parte, no hay mayor problema. Sin embargo, algunos confunden la definición de las razones trigonométricas.	Para no confundir la definición entre las razones, se sugiere resolver ejercicios en clase (para aclarar y confrontar las dudas). Por ejemplo, se puede preguntar a los alumnos individualmente, al azar, las razones. Asimismo, ejercicios de tarea para reforzar esta parte.
5.2 SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS: CONOCIENDO UN ÁNGULO Y UN LADO; CONOCIENDO DOS LADOS.	Cuando se trata de utilizar razones trigonométricas algunos alumnos presentan dificultades como: no identifican correctamente los lados del triángulo con respecto a un ángulo; confunden la definición de alguna de las razones trigonométricas, por ejemplo, confunden la definición del seno con la del coseno; no despejan correctamente la variable involucrada en las razones trigonométricas; no utilizan de manera correcta la calculadora para hacer algunos cálculos.	El profesor una vez diagnosticado el problema puede afrontarlo prestando mayor atención en esa parte del contenido, debe intentar que el alumno tome conciencia de cuál es el error y de dónde proviene, para así, además, fomentar su actitud crítica en este proceso de aprendizaje. Dar lugar al error en la clase es trabajarlo descubriendo las hipótesis falsas que llevaron a producirlo, buscando los posibles caminos hasta redescubrir los conceptos validados y matemáticamente aceptados, comparando versiones correctas con erróneas, etc. El estudiante debe participar activamente en el proceso de superación de sus propios errores. Proponer algunas páginas Web para los alumnos.
5.3 RAZONES SENO, COSENO Y TANGENTE DE LOS ÁNGULOS DE 15º, 30º, 45º, 60º Y 75º.	En este tema es frecuente que los estudiantes presenten conflictos respecto a	Para no confundir qué triángulo utilizar en cada caso, y qué medidas debe tener. Se sugiere utilizar la circunferencia unitaria. Pero por lo general el alumno siempre

	qué triángulo utilizar para calcular las razones de $30°, 45°$ y $60°$. Por ejemplo, en qué caso utilizar un triángulo equilátero y cuándo un isósceles; qué medidas debe tener el triángulo equilátero; qué medidas el isósceles.	recurre a su calculadora, por tal motivo no se detecta mayor problema.
5.4 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.	Por otra parte, cuando se trata de construir una figura que represente al problema, los alumnos suelen presentar dificultades como identificar, diferenciar, relacionar y asignar aquellos elementos que, en este caso, permitan construir un triángulo rectángulo.	Esto se debe a una deficiente comprensión del enunciado y a la poca familiaridad con este tipo de problemas. Situación que puede mejorar si los problemas les son de interés al alumno, donde las soluciones exijan construir un triángulo rectángulo utilizando diferentes recursos, con lo cual el alumno va formando y ampliando su campo de estrategias ante este tipo de problemas. Se sugiere que el propio estudiante trabaje esta parte, primero, de manera individual, después, socializar sus resultados con su compañero de a lado, y por último, de manera grupal, lo cual ayudará a reorganizar su forma de enfrentar el problema y modificar su estrategia de solución (si esta es errónea).
5.5 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS.	Aquí, además de tener dificultades en hacer una figura que represente el problema, suele presentarse la dificultad en reconocer qué método es el más apropiado para resolver un problema donde intervienen triángulos	Se sugiere que sea el propio alumno quien construya una representación del problema, y orientarlo en caso de que presente dificultades. Esto, con la finalidad de que el alumno aprenda a interpretar y visualizar cierta situación de manera matemática. Se sugiere observar muy bien los datos que se tienen, y encontrar aquellos que se puedan obtener con un simple cálculo. Ya conocidos los elementos posibles, analizar

	oblicuángulos. Esto es, si aplican la ley de los senos o cosenos. Asimismo, algunos presentan dificultades al momento de sustituir los datos en alguna de las razones trigonométricas, así como hacer el despeje de lo que se quiere encontrar. Por otra parte, algunos mostrarán resultados incoherentes.	los casos donde se pueda aplicar la ley de los senos o cosenos. Al seguir presentado estas dificultades, se sugiere que el estudiante repase lo ya visto, se ejercite en casa, así como ir a asesorías que otorga el plantel. Asimismo, como profesor, apoyarlos en lo que se pueda. Situación que puede mejorar si se tiene presente "checar" si los resultados obtenidos son coherentes, y por medio de las actividades propuestas, llegar a percibir qué ángulo calcular primero.
5.6 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES: LAS RECÍPROCAS; LAS DE DIVISIÒN; LAS PITAGÓRICAS.	Cuando se trata de manejar identidades trigonométricas, siempre se generan dificultades, desde recordar alguna identidad; realizar alguna operación entre ellas; hasta pensar en una expresión equivalente.	Sin lugar a dudas, este tema le resulta complicado al estudiante, por el simple hecho de ver expresiones muy complejas, sin embargo, con mucha práctica a la luz de los pasos generales para demostrar una identidad, expuestos en esta guía, se espera que las dificultades vayan disminuyendo.

Bibliografía básica y complementaria.

Fleming, W., y Varberg, D. “Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica”. Prentice Hall, México, 1991.

Smith, S., et al., “Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica”. Addison-Wesley Longman. México, 1998.

Rivaud, J. “Trigonometría” Limusa. México, 1992.

Guzmán, A. (1991). *Geometría y Trigonometría* (Tercera Edición). México, D.F. Publicaciones Cultural.

Ayres, F., Moyer, R. (1991). *Trigonometría.* (Segunda Edición. Ruiz, Ma. Concepción., Trads). Edo. De México, México. McGraw-Hill.

Perelman, Y. (). *Geometría recreativa*. [En línea]. (Abramenco, N. Trads. Preparado por Barros, P., Bravo, A. en Mayo de 2003). Recuperado el 20 de Abril de 2015 en http://www.librosmaravillosos.com/geometriarecreativa/index.html

Páginas Web, vistas el 28 de septiembre de 2014:

http://www.matematicasies.com

http://www.math2me.com

http://es.khanacademy.org