UNIDAD I.

FUNCIONES POLINOMIALES

Propósitos: Avanzar en el estudio de las funciones, introduciendo los conceptos de notación funcional, dominio y rango. Profundizar en la comprensión de las relaciones entre la expresión algebraica de una función polinomial, su comportamiento, aspecto y características principales de su gráfica.

RENÉ DESCARTES (1596 – 1650)

Filósofo y matemático francés, se dice que uno de sus sueños inspiró el nacimiento de la Geometría analítica, y, por tanto, también de la Matemática moderna, esto fue en 1619. Durante sus numerosos viajes, Descartes se ocupó de otra serie de estudios aparte de la filosofía y matemática, como son: la óptica, la química, la física, la anatomía, la embriología, la medicina, las observaciones astronómicas y la meteorología. En el año 1637, cuando Descartes tenía 41 años, sus amigos le indujeron a que permitiera la impresión de su obra maestra con el siguiente título: *Discurso sobre el método de conducir rectamente la razón y buscar la verdad en las ciencias. Además, la dióptrica, meteoros y geometría, ensayos en este método*.

Su obra se conoce con el nombre abreviado *El discurso del Método.* Fue publicada el 8 de junio de 1637. Este es pues, el día en que la Geometría analítica surgió al mundo. Esta obra de entre media docena que elaboró, es una de las más grandes contribuciones que se han hecho a la Matemática. Descartes rehizo la Geometría e hizo posible la Geometría moderna.

Descartes no revisó la Geometría Analítica; la creó. La importancia de la geometría de Descartes radica en el hecho de usar un sistema de coordenadas.

Murió el 11 de febrero de 1650, a los 54 años de edad, sacrificado por la impetuosa vanidad de una tozuda muchacha.

(Grandes Matemáticos, autor Eric Temple Bell)

1. PRESENTACIÓN

Las funciones polinomiales tienen una relación muy estrecha con la resolución de ecuaciones algebraicas, o la determinación de las raíces de polinomios. Esta actividad está entre los problemas más antiguos de la matemática. Sin embargo, la elegante y práctica notación que utilizamos actualmente se desarrolló a partir del siglo XV.

Hay una diferencia entre la aproximación de raíces y el descubrimiento de fórmulas concretas para ellas. Se conocen fórmulas de polinomios de hasta cuarto grado desde el siglo XVI. Pero, las fórmulas para polinomios de quinto grado fueron irresolubles para los investigadores durante mucho tiempo. En 1824, Niels Henrik Abel demostró que no puede haber fórmulas generales para los polinomios de quinto grado o mayores. Este resultado marcó el comienzo de la teoría de Galois que se ocupa del estudio detallado de las relaciones existentes entre las raíces de los polinomios.
Las funciones polinómicas son aquellas que surgen de evaluar los polinomios sobre las variables en las que están definidos. Son una clase de *funciones suaves*, esto es, son infinitamente diferenciables (tienen derivadas de todos los órdenes finitos). Debido a su estructura simple, los polinomios son muy sencillos de evaluar, y se usan ampliamente en análisis numérico o para integrar numéricamente funciones más complejas.

Dentro de los aprendizajes estipulados en el programa de estudios se debe poner mucha atención y enfatizar en algunos conceptos clave como:

a) Función
b) Dominio
c) Rango
d) Función polinomial
e) Ceros
f) La diferencia entre ecuación y función
g) Características principales de la gráfica de una función polinomial

Consideramos que estos puntos son fundamentales para lograr los propósitos generales del curso mencionados en la introducción, ya que el concepto de función se ha abordado en los cursos anteriores de forma intuitiva en esta unidad se debe formalizar, comprender y dominar tanto el concepto como su notación.

1.1 SITUACIONES QUE DAN LUGAR A UNA FUNCIÓN POLINOMIAL

Aprendizajes:

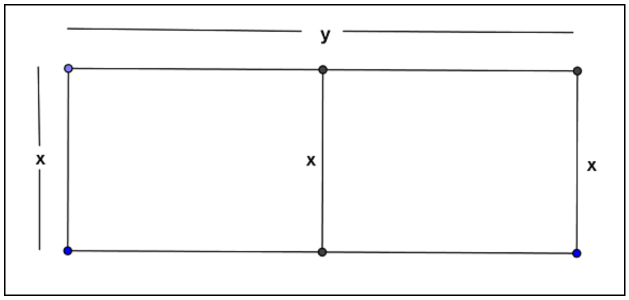
- *Explorar en una situación o problema que da lugar a una función polinomial, las condiciones, relaciones o comportamientos, que le permitan obtener información y sean útiles para establecer la representación algebraica.*
- *Modela situaciones que den lugar a una función polinomial.*

El profesor puede sugerir algunas actividades en las cuales el alumno trabajará situaciones que dan lugar a una función polinomial, como los que a continuación se presentan. Estas guían al alumno para que los vayan completando y obtengan el aprendizaje requerido en este tema. (Pueden dejarse de tarea)

Actividad 1) Un agricultor tiene 200 metros de malla de alambre para construir dos corrales rectangulares adyacentes iguales. Observa que los corrales tienen un lado común. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de los corrales para que tengan la mayor área posible?

Solución:

El siguiente dibujo representa los dos corrales que el agricultor quiere construir.



a) Señalar la respuesta correcta en: Los 200 metros de malla de alambre que tiene el agricultor corresponden a:

a) El perímetro de los corrales b) El área de los corrales

b) Escribe la expresión que resulta para el perímetro de los corrales considerando la longitud de la malla de alambre y las variables asignadas a las dimensiones de los corrales.

Expresión del perímetro: ________________________

c) Escribe la expresión correspondiente al área de los dos corrales considerando las variables asignadas a las dimensiones de los corrales.

Expresión del área: _____________________________

d) De la expresión del perímetro del corral, despeja la variable y

Resultado: ____________________________________

e) Si x = 5 metros, el valor de y = ____________, y el valor del área de los corrales es, área = ______________.

f) Sustituye el despeje de y en la expresión del área de los corrales y escribe la expresión resultante:

Área = __________________

g) Al observar la expresión del área de los corrales vemos que su valor depende de la variable: _____

h) En la siguiente tabla, asigna diversos valores a la variable x, y calcular los valores correspondientes para el área del corral.

x	área

Observa que los valores del área de los corrales depende de los valores que tome la variable x, que de acuerdo a las condiciones físicas del problema corresponde al ancho de los corrales.

Actividad 2) Encontrar dos números positivos cuya suma sea 40 y cuyo producto sea el mayor posible.

Solución:

a) Designa una variable para cada uno de los números buscados.

Primer número = ____ Segundo número = ____

b) ¿Cuál es la expresión que representa el producto de los dos números?

Respuesta = ____________________

c) Escribe la expresión que representa que la suma de los números es 40.

Respuesta = ____________________

d) Despeja de la expresión que representa la suma, a una de las variables.

Respuesta = ____________________

e) Sustituye la variable despejada en la expresión que representa el producto de los dos números y simplifica la expresión que resulta, la expresión final es.

Respuesta = ____________________

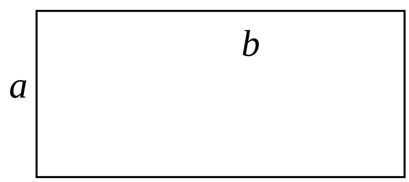
Observa que los valores del producto dadas las condiciones del problema dependen de uno de los números buscados, y que una vez asignado un valor para dicho número el valor del producto es uno solo.

Completa la siguiente tabla de valores anotando en la cabecera de la primera columna el nombre de la variable de la cual depende el producto, en la cabecera de la segunda columna escribe “producto”, asigna diversos valores para la variable y calcula los correspondientes del producto.

Actividad 3) Se tiene un alambre de 120 centímetros de largo, con el se quiere construir un rectángulo. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones si queremos que el rectángulo tenga la mayor área posible?

Solución:

La siguiente figura representa el rectángulo que se quiere construir.



a) De acuerdo a los datos del problema escribe la expresión que represente el perímetro del rectángulo.
Respuesta: ________________________

b) Escribe la expresión que represente el área del rectángulo usando las variables asignadas a sus lados.
Respuesta: _________________________

c) De la expresión del perímetro del rectángulo despeja la variable b.

Respuesta: _________________________

d) Sustituye el despeje en la expresión del área y simplifícala.

Respuesta: _________________________

Observa que los valores del área dependen de los valores que tome la variable a, y que para cada valor de a el valor del área es único.

e) De acuerdo a las condiciones del problema indica cuáles son los posibles valores que puede tomar la variable a.
Respuesta: __________________________

f) Completa la siguiente tabla de valores dando valores a la variable a y calculando los correspondientes para el área del rectángulo.

a	0.5	2	8	25			
área							

Conclusiones de estas tres actividades:

Escribe la expresión final que representa cada uno de los problemas que se trataron:

Actividad 1) ________________________________

Actividad 2) ________________________________

Actividad 3) ________________________________

Observa que en cada una de las expresiones el valor de una de las variables depende del valor que tome la otra variable, investiga el nombre que recibe cada una de ellas.

1. ________________________________
2. ________________________________

3. El conjunto de valores que puede tomar la variable que no depende de la otra se llama: __________________________, y el conjunto de valores que puede tomar la variable cuyos valores dependen de la otra se llama: _____________.

Para cada problema hemos establecido lo que se llama **función de una variable**, investiga la definición de una función y compárala con los resultados a los que llegamos.

Una pregunta que puede resultar de lo anterior es la siguiente, ¿qué expresiones algebraicas con dos variables representan una función?

Actividad 4) Julia prepara gelatinas y las vende en una escuela. El costo inicial para empezar sus ventas fue de $ 20.00. Cada gelatina le sale a $ 2. 50 y las vende a $ 5. 00. Si x representa el número de gelatinas vendidas:

a) Completar la tabla, donde C(x) representa el costo como una función de x, y I(x) es el ingreso en función de x.

x	0	1	2	3	4	5	10	20	50	75	100	200
C(x)	20	22.5	25									
I(x)	0	5	10									

b) De acuerdo a la forma en que llenaste la tabla ¿C(x) y I(x) representan funciones lineales? ____

c) Escribe la expresión (regla de correspondencia) que representa al costo C como una función de x : ________________________

d) Expresa al ingreso I como una función de x: ______________________

e) ¿Hasta cuando Julia obtendrá ganancias? _____________________________

f) ¿Quién es la variable independiente en ambos casos?

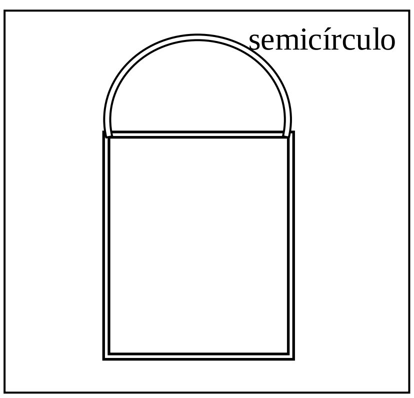
____

g) ¿Puede esta variable tomar valores negativos o valores con decimales?

____

Nota para el profesor: Se recomienda hacer énfasis tanto en el Costo de preparación de las gelatinas como en el Ingreso que obtiene Julia dependen del número de gelatinas que venda así que el Costo y el Ingreso son las variables dependientes, mientras que el número de gelatinas representa a la variable independiente; y las representan funciones de la forma $y = mx + b$ o sea funciones lineales.

Actividad 5) La ventana que se muestra en la figura consta de un rectángulo con un semicírculo en la parte superior. Exprese el área A de la ventana como una función del ancho x indicado, si se sabe que el perímetro de la ventana es de 30 metros.



Solución:

Coloca otra letra para la altura del rectángulo, por ejemplo h.

1. El radio del semicírculo es: $r =$
2. Escribe la expresión para el perímetro de la ventana: P = 3 lados del rectángulo + el contorno del semicírculo,

La expresión para P será: $P =$

3. Iguala la expresión anterior a 30 m que es el valor del perímetro y despeja a h:
4. El área de la ventana es: A = área del rectángulo + área del semicírculo

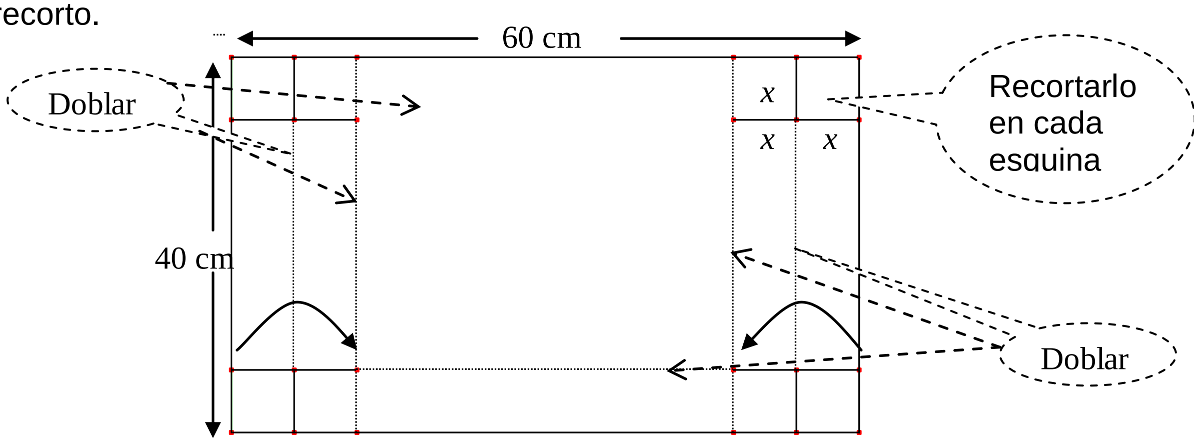
   $A =$
5. Realiza las operaciones necesarias y simplifica la expresión anterior donde las únicas variables son el área A y el ancho de la ventana x

   $A =$
6. ¿Cuál es la variable independiente y cuál es la dependiente?

7. ¿Qué valores puede tomar cada una de estas variables según las condiciones del problema?

Nota para el profesor: Hacer énfasis en que el área A de la ventana está en función de su ancho x, y en la expresión resultante el exponente más grande que lleva la variable independiente x es 2 por lo que tenemos una función cuadrática.

Actividad 6) Con un pedazo rectangular de cartulina de 60 cm de largo por 40 cm de ancho se puede construir una caja abierta (sin tapa) que se sujete por si misma. Primero recortando un cuadrado de longitud x de cada esquina de la cartulina, como se muestra en la figura. Después doblando los rectángulos de ambos lados hacia dentro y cortando la misma longitud x solamente sobre la horizontal, para poder formar la caja doblando los cuatro lados de manera que los cuadrados se inserten en el dobles. Expresa el volumen V de la caja en términos de la longitud x del cuadrado que se recorto.



Solución:

1. De la figura vemos que la base de la caja va a tener un largo de: __________________ y un ancho de: ________________
2. La altura mide: ________________

3. El volumen de una caja se calcula con la fórmula: Volumen = (   ) (   ) (   )
4. Si sustituimos el largo, ancho y altura en términos de $\boldsymbol{x}$ nos queda:

$$V(x) = (\qquad)(\qquad)(\qquad)$$

Esta expresión representa el volumen de la caja como función de la longitud x del cuadrado que se recorto.

5. ¿Qué valores le podemos asignar a x?

6. Si realizamos los productos indicados en la expresión de V la podemos expresar como

$$V(x) =$$

Y aquí vemos claramente una **función cúbica** ya que el mayor exponente de x es 3.

Ejercicios 1.1

1. Una persona de 1.80 m de altura camina hacia un farol de 6.0 m como se muestra en la figura 1. Expresa la longitud L de su sombra como una función de su distancia x desde el farol.

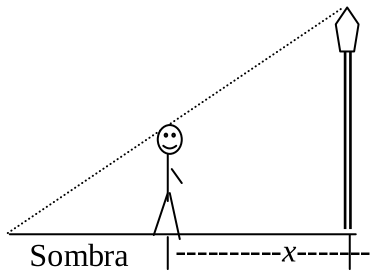


Figura 1

figura 2

2. Se desea construir una pista de atletismo con dos segmentos rectos y dos semicirculares, como se muestra en la figura 2. El radio de cada segmento semicircular es r. La longitud de la pista debe ser de 1 km. Expresa el área A cubierta por la pista como una función de r.

3. Un tubo de ensayo esta formado por una semiesfera y un cilindro como se muestra en la figura 3. Si el radio de la semiesfera es de x cm y el largo del tubo $(2x + 10)$ cm, entonces la capacidad del tubo de ensayo es:

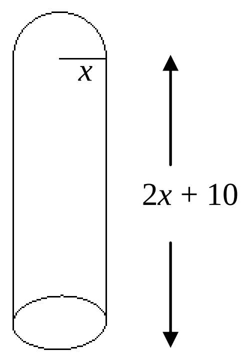


Figura 3

4. Se quiere construir una caja abierta a partir de un pedazo de cartón de 20 cm por 40 cm, cortando cuadrados de lado x en cada esquina y doblando los costados. Expresa el volumen V de la caja como una función de x.

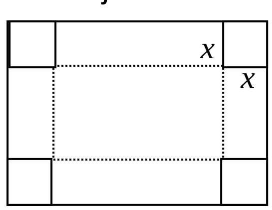
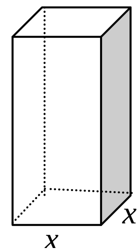


Figura 4

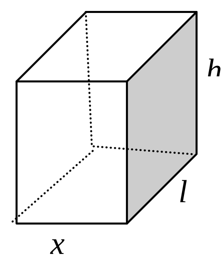
5. Una caja de cartón tiene una base cuadrada y cada una de las cuatro aristas de la base tiene una longitud de x cm como se muestra en la figura 5. La longitud total de las 12 aristas de la caja es de 360 cm. Expresa el volumen de la caja como una función de x.

Figura 5



6. Una caja cerrada de forma rectangular tiene x unidades de ancho, y el largo es el doble del ancho, suponer que h es la altura de la caja. Si el área de la superficie de la caja es de 120 unidades cuadradas, expresar su volumen V en función de x.

Figura 6



1.2 NOCIÓN GENERALIZADA DE FUNCIÓN

Aprendizajes:

- *Establece la noción de función enfatizando la idea de expresar, sujeto a una condición, una cantidad en términos de otra.*
- *Examina ecuaciones algebraicas con dos variables o su gráfica para decidir si se trata de una función o no.*
- *Proporciona el dominio y rango de una función polinomial dada.*

1.2.1) Relación entre dos variables que cumple ciertas condiciones.

Una función es una regla que define una correspondencia entre dos conjuntos de elementos, tal que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto. El primer conjunto se conoce como el **dominio** y el segundo conjunto se conoce como el **rango.**

A la variable que representa un elemento arbitrario del dominio se le conoce como **variable independiente** y a la variable que representa un elemento arbitrario del rango se le llama **variable dependiente.**

Una función puede representarse en diferentes formas como son:

a) Verbal (mediante una descripción con palabras)
b) Algebraica (por medio de una fórmula explícita)
c) Visual o gráfica (con una gráfica)

d) Numérica (a través de una tabla de valores)

Ejemplo) Representar en las cuatro formas el ejemplo 1 de la sección anterior, El costo de preparación y los ingresos de venta de gelatinas.

Verbal (Descripción con palabras)

- El Ingreso que se obtiene es directamente proporcional al número de gelatinas vendidas, con una constante de proporcionalidad de 5

- El costo de preparación de las gelatinas varía en forma lineal con respecto al número de gelatinas con un costo inicial de $20.00, y $2.50 por cada gelatina.

Algebraica (con una formula o ecuación)

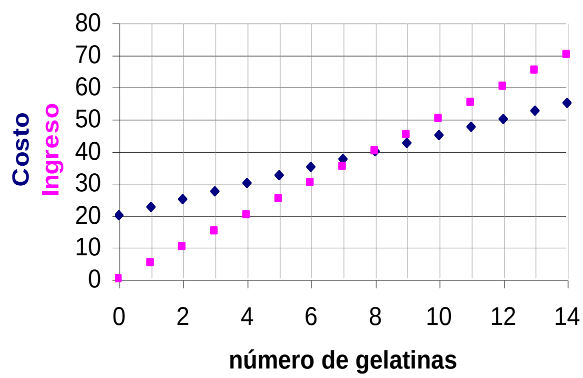
$I(x) = 5x$

$C(x) = 20 + 2.5x$

Numérica (por medio de una tabla)

Número de Gelatinas	Costo ($)	Ingreso ($)
0	20	0
1	22.50	5
2	25.00	10
3	27.50	15
4	30.00	20
5	32.50	25
6	35.00	30
12	50.00	60
14	55.00	70

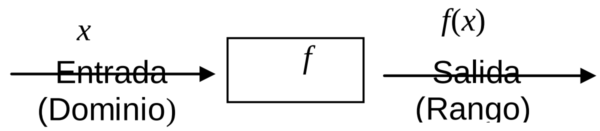
Visual (por medio de una gráfica)



Ejercicio) Realizar lo mismo para los ejemplos 2 y 3 de la sección anterior.

1.2.2) Conjuntos asociados: dominio y rango.

Es útil comparar una función como una máquina que siempre que se le alimenta con un valor x de su dominio (entrada) produce un valor de $f(x)$ de su rango (salida) de acuerdo con la regla de la función.



Se puede citar como ejemplo las funciones de la calculadora, ya que es un ejemplo de una función como una máquina.

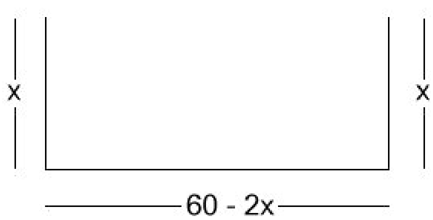
Cuando se nos presenta una relación entre dos variables en forma numérica o con una tabla, lo que utilizamos son parejas ordenadas de elementos. En donde el primer componente representa un elemento del dominio, y el segundo componente corresponde al rango. Con la propiedad de **que no existan dos pares ordenados que tengan el mismo primer componente y un segundo componente distinto.**

Nota para el profesor: Para la comprensión de este concepto, se sugieren las siguientes actividades para los alumnos. Estas pueden ser de tarea, ya que están redactadas para que ellos por si solos las resuelvan.

Actividad 1) Se quiere recoger el agua de lluvia de una casa con techo de dos aguas para lo cual vamos a poner un canalón de forma rectangular para recoger el agua, las dimensiones de la lamina para hacer el canalón son de 8 metros por 60 centímetros, ¿cuáles deben ser las dimensiones del doblez que se debe realizar de cada lado para que el volumen de agua captado sea el mayor posible?.

Solución:

Como la longitud del canal es constante el volumen de agua captado depende del área transversal del canalón, así que si doblamos de cada lado una longitud x, las dimensiones del rectángulo que se forma son:



El área de un corte del canalón como se ve en la figura, esta dada por $A(x) = x(60 - 2x)$
Haciendo las multiplicaciones indicadas, se llega a la siguiente expresión:

$$A(x) = 60x - 2x^2$$

a) ¿Qué pasa para $x = 0$?: ____

b) ¿Qué pasa para $x = 30$?: ____

c) ¿Qué pasa para valores entre 0 y 30?:__________________________________

d) De las respuestas dadas en las tres preguntas anteriores el **dominio** de la función es el conjunto: ____

Una forma para encontrar el rango de la función es llevar la expresión de la función a su forma estándar.

Se factoriza el – 2 en el lado derecho de $A(x) = 60x - 2x^2$

$$A(x) = -2(x^2 - 30x)$$

Se completa el trinomio cuadrado perfecto de la expresión de la derecha.

$$A(x) - 2(-15)^2 = -2(x^2 - 30x + (-15)^2)$$

$$A(x) - 450 = -2(x - 15)^2$$

La regla de correspondencia en forma estándar de la función buscada es:

$$A(x) = -2(x - 15)^2 + 450$$

Como recordaras las funciones de este tipo tienen un máximo, ya que el coeficiente cuadrático es negativo y tenemos una parábola que abre hacia abajo.

e) ¿Para qué valor de x la función alcanza su valor máximo? ________________

f) Tomando en consideración los resultados obtenidos el **rango** de esta función es el conjunto ________________________.

Actividad 2) Determinar el dominio y el rango de la función $f(x) = x^3$.

Observa que en la definición de esta función únicamente se hace uso de multiplicaciones ya que la potencia 3 indica que hay que multiplicar la base por si misma tres veces.

a) Ahora completa la siguiente tabla de valores positivos de x para observar el comportamiento de la función.

x	1	7	15	30	50	100	10^{10}	10^{15}
$f(x)$								

b) Un problema para llenar la tabla fueron los números muy grandes, ¿qué otras dificultades hubo para obtener los valores de la función?:

____

c) Ahora completa la siguiente tabla de valores negativos de x para observar el comportamiento de la función.

x	-2	-5	-20	-40	-60	-100	-10^{10}	-10^{20}
$f(x)$								

d) Un problema para llenar la tabla fueron los números muy pequeños, ¿qué otras dificultades hubo para obtener los valores de la función?:

____

e) Tomando en cuenta los resultados anteriores, ¿Cuál sería el **dominio** de la función dada?:____

f) Y de acuerdo a los valores de la función obtenidos, el **rango** de la función dada es el conjunto?: ____

Actividad 3) Determinar el dominio y el rango de la función $f(x) = x^4$.

a) Procederemos de forma similar a la actividad anterior, vamos a completar dos tablas para observar el comportamiento de la función.

x	1	5	15	30	50	100	10^{10}	10^{15}
$f(x)$								

b) ¿Qué problemas tuviste para el cálculo de los valores de la función?: ____________
____

c) ¿Habrá algún valor de x para el cual no se pueda calcular el valor de $f(x)$?:______
____

d) Completa la tabla:

x	-2	-5	-20	-40	-60	-100	-10^{10}	-10^{20}
$f(x)$								

e) De acuerdo a los valores obtenidos el **dominio** de la función es: ________________

f) Y el **rango** de la función es: ____

PARA COMPLEMENTAR EL TEMA SE PUEDE CONSULTAR LOS VIDEOS QUE ESTÁN EN LAS SIGUIENTE PÁGUINA WEB:
http://www.youtube.com/watch?v=xyWKJwHby94&NR=1

Ejercicio 1.2.2

Encontrar el dominio y el rango para cada una de las siguientes funciones.

Funciones lineales:

1) $f(x) = -3x + 6$ 2) $g(x) = 4x - 3$ 3) $h(x) = 0.5x + 4$ 4) $d(x) = -0.2x - 6$

Funciones Cuadráticas:

5) $t(x) = x^2 - 2x + 8$ 6) $w(x) = -4x^2 + 16x - 20$ 7) $v(x) = 3x^2 - 6x + 12$

Otras funciones polinomiales:

8) $k(x) = x^5$ 9) $l(x) = -x^6$ 10) $m(x) = -2x^3$

1.2.3) Regla de correspondencia.

Una regla de correspondencia nos indica como se van asociar los elementos del dominio con los elementos del contradominio, donde el contradominio es un conjunto que contiene al rango.

Dado que una función se puede representar de diversas formas, a veces es necesario pasar de una forma a otra para entenderlas mejor. Esto, no siempre resulta ser sencillo, ya que no todas las relaciones entre dos cantidades tienen reglas de correspondencia matemáticas. Y teniendo en cuenta que no todas representan funciones, ya que para que una relación sea función se debe de cumplir que para cada valor de la variable independiente le debe de corresponder uno y solo un valor de la variable dependiente.

Esta idea ha surgido y se ha practicado en los ejercicios y actividades anteriores.

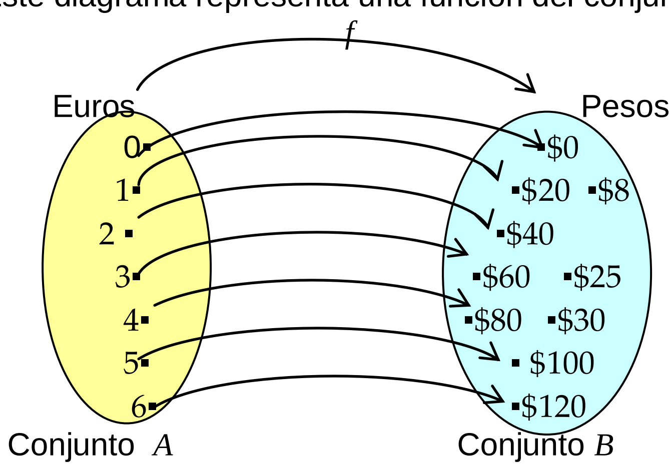
1.2.4) Notación funcional $f(x)$.

Una función f de un conjunto A respecto a un conjunto B es una regla de correspondencia que asigna, a cada elemento x del conjunto A, exactamente un elemento y del conjunto B. Al conjunto A se le llama el ***dominio*** de la función f, y al conjunto B se le llama ***contradominio*** que contiene al **rango** de la función f.

En general cuando tengamos una regla de correspondencia en donde para cada x se le asocia una y, se dice que y es la imagen o rango de x bajo una función « f », y esto lo escribimos como $y = f(x)$, que se lee: «y es igual a f de x»**, tener cuidado en que el alumno no lo confunda con f veces x**.

Nota para el profesor: Esta notación ya se ha abordado anteriormente, pero para reforzarla se proponen algunos ejemplos más donde se involucra este concepto y su evolución. Se recomienda dejarlos de tarea para los alumnos.

Ejemplo 1. Este diagrama representa una función del conjunto A al conjunto B



Dominio	Contradominio
$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$B = \{\$0, \$20, \$40, \$60, \$80, \$30, \$8, \$100, \$120, \$25\}$

Cumple las características para que sea función, ya que:

1. Todo elemento de A quedó relacionado, no sobró ninguno.
2. A cada elemento de A le corresponde uno y sólo uno de B, es decir, a ninguno del conjunto A le corresponden dos o más del conjunto B.

Observación: No necesariamente todos los elementos de B deben de quedar relacionados.
Si llegase a suceder que un elemento de A se relaciona con dos o más de B entonces **no sería función**.
Pero si dos o más elementos de A estén relacionados con uno de B, en este caso **si sería función**.
Su rango es el conjunto $R = \{\$0, \$20, \$40, \$60, \$80, \$100, \$120\}$
Esta función la podemos representar por el siguiente conjunto de parejas ordenadas: $\{(0, \$0), (1, \$20), (2, \$40), (3, \$60), (4, \$80), (5, \$100), (6, \$120)\}$
Observa que en cada pareja el primer elemento pertenece al conjunto A, y el segundo elemento es del conjunto B.

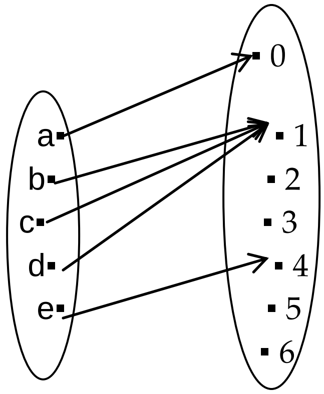
Usando la notación de función tenemos que
$f(0) = \$0$
$f(1) = \$20$
$f(2) = \$40$
$f(3) = \$60$
$f(4) = \$80$
$f(5) = \$100$
$f(6) = \$120$

Ejemplo 2. Suponer que $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. ¿Cuál de los siguientes incisos representa a una función?

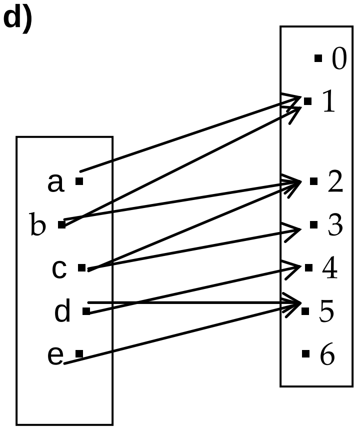
a) $\{(a, 1), (b, 3), (c, 5), (d, 6)\}$

b) $\{(a, 0), (b, 2), (c, 4), (d, 6), (e, 6)\}$

c)



d)



Solución:
a) No es función, ya que no todos los elementos del conjunto A quedaron relacionados, faltó relacionar al elemento e.
b) Si es función, ya que todo elemento de A quedó relacionado con exactamente uno de B, no importa que los elementos d y e se relacionen con el mismo de B.
c) Si es función, ya que no importa que varios elementos de A estén relacionados con el mismo de B.
d) No es función, ya que varios elementos de A se relacionan con dos de B .

La representación de funciones mediante conjuntos finitos como en los ejemplos 1 y 2 son muy usados en matemáticas discretas. En álgebra, es más frecuente representar funciones por medio de ecuaciones o modelos matemáticos también llamada regla de correspondencia que involucran a las dos variables.

PARA COMPLEMENTAR EL TEMA SE PUEDE CONSULTAR LOS VIDEOS QUE ESTÁN EN LAS SIGUIENTES PÁGUINAS WEB.
http://www.youtube.com/watch?v=297_p8zVfrk&NR=1
http://www.youtube.com/watch?v=b2qgEYQx0uY&NR=1
http://www.youtube.com/watch?v=f2qmNdC4NUU&feature=related

Ejemplo 3. Determinar si las siguientes ecuaciones representan a y como función de x.

a) $x^2 + y = 4$ **b)** $-x + y^2 = 4$

Solución:
a) Al despejar a y en $x^2 + y = 4$ tenemos: $y = -x^2 + 4$
Que nos dice que, para cada valor de x le corresponde sólo uno de y, es decir cumple la definición de función.

Sugerencia para el profesor: Enfatizar que cuando tengamos este tipo de expresiones, primero se despeja la variable dependiente y. Y esta nueva expresión $y = -x^2 + 4$ se puede escribir como $f(x) = -x^2 + 4$, es decir $y = f(x)$ donde $f(x)$ se lee como "f de x" (aclarar que se puede usar otra letra en lugar de f).

b) Al despejar a y en $-x + y^2 = 4$ tenemos:
$$y = \pm\sqrt{x + 4}$$
El signo $\pm$ nos indica que para un valor de x le corresponden dos de y, uno positivo y el otro negativo.
Por ejemplo: Si $x = 0$ al sustituir tenemos que $y = \pm\sqrt{0 + 4} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$, es decir para $x = 0$ le corresponden $+2$ y -2 que son dos valores de y, esto quiere decir que $-x + y^2 = 4$ no cumple con la definición de función.

Y se concluye que en este caso y **no es función** de x.

Ejemplo 4.
Si tenemos la función $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$ encontrar $g(0)$, $g(-1)$, $g(2)$ y $g(-2)$.
Solución:

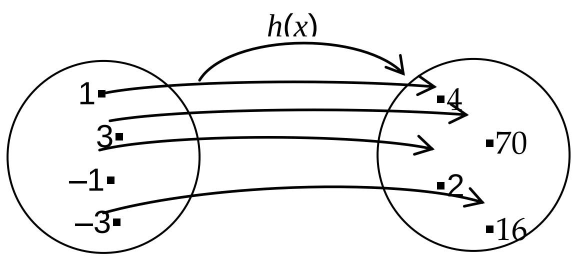
$g(0) = 3(0)^2 - 2(0) + 1 = 0 - 0 + 1 = 1$ entonces $g(0) = 1$.
$g(-1) = 3(-1)^2 - 2(-1) + 1 = 3(1) + 2 + 1 = 6$ entonces $g(-1) = 6$.
$g(2) = 3(2)^2 - 2(2) + 1 = 3(4) - 4 + 1 = 9$ entonces $g(2) = 9$.
$g(-2) = 3(-2)^2 - 2(-2) + 1 = 3(4) + 4 + 1 = 17$ entonces $g(-2) = 17$.

Ejemplo 5.
Si tenemos la función $h(x) = x^3 + 5x^2 - 2$ cuyo dominio es el conjunto $\{1, 3, -1, -3\}$, encontrar su Rango.
Solución:
Para cada elemento del dominio se encuentra su respectiva $h(x)$ sustituyendo en la regla de correspondencia.

$h(1) = 1^3 + 5(1)^2 - 2 = 1 + 5 - 2 = 4$
$h(3) = 3^3 + 5(3)^2 - 2 = 27 + 5(9) - 2 = 27 + 45 - 2 = 70$
$h(-1) = (-1)^3 + 5(-1)^2 - 2 = -1 + 5(1) - 2 = -1 + 5 - 2 = 2$
$h(-3) = (-3)^3 + 5(-3)^2 - 2 = -27 + 5(9) - 2 = -27 + 45 - 2 = 16$

Así el Rango de $h(x)$ es el conjunto $\{4, 70, 2, 16\}$.

Esto también se puede representar por medio del siguiente diagrama.

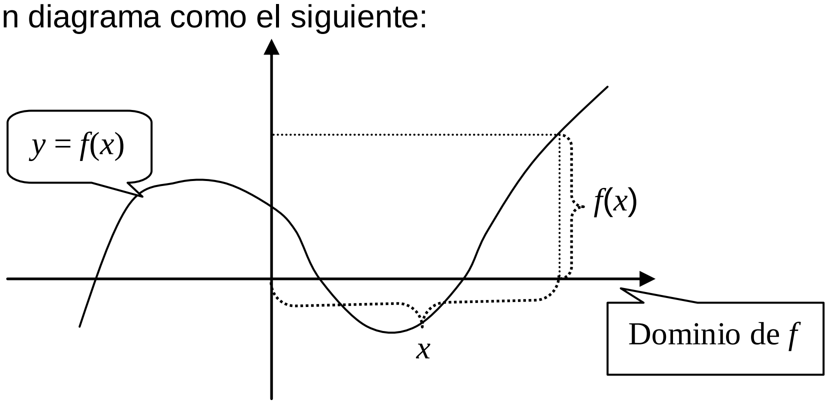


Sugerencia para el profesor: Cuando se involucre la representación gráfica de una función, es recomendable hacer ver que se cumplen las condiciones de la definición de función.

Por ejemplo:

La gráfica de una función f, es el conjunto de todos los pares ordenados $(x, f(x))$ en los que x toma los valores del dominio de f.

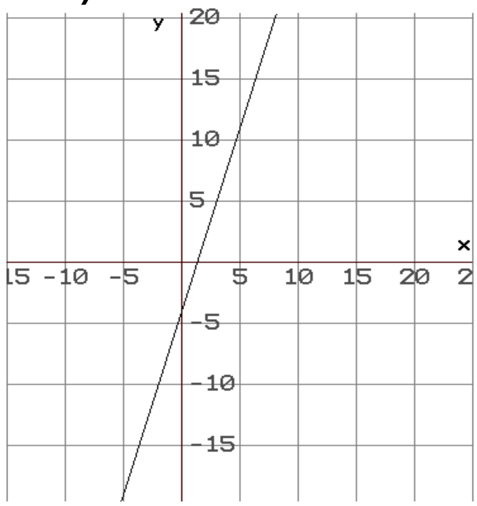
Y se puede mostrar un diagrama como el siguiente:



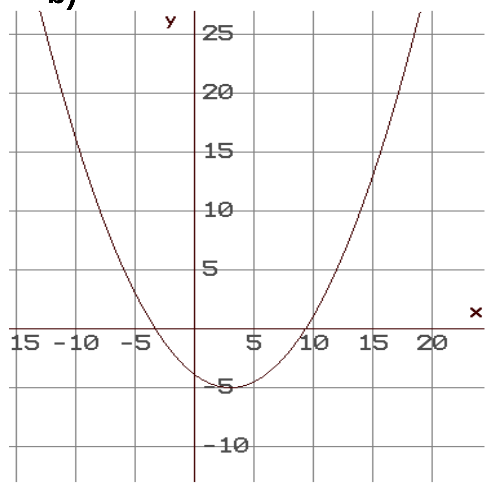
Ya que este puede ser una forma de ayuda para determinar el dominio y rango de la función.

Ejemplo 6. Para cada una de las siguientes gráficas determinar su dominio y su rango.

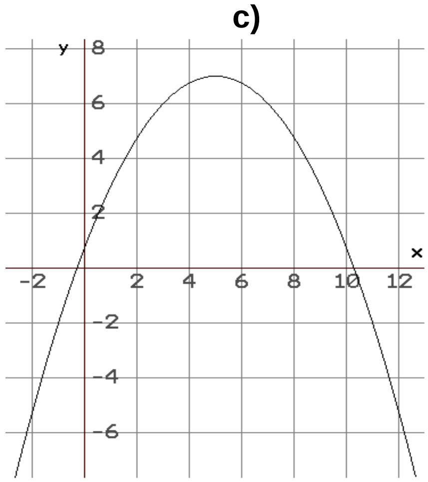
a)



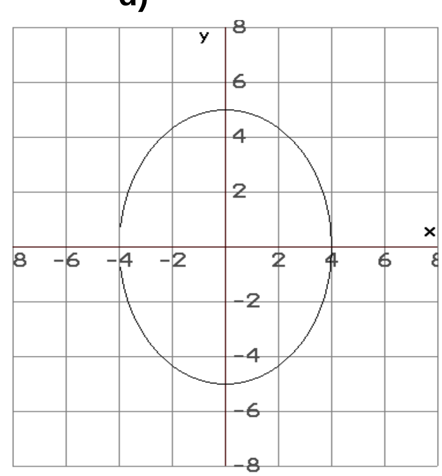
b)



c)



d)



Solución:

a) En esta gráfica los valores que puede tomar la variable x están sobre el eje de las X's y puede ser cualquiera, es decir de $-\infty$ a $+\infty$, este es su ***Dominio***.
Su ***Rango*** son los valores que toma la variable y sobre el eje de las Y's y en la gráfica se observa que son todos los reales, es decir desde $-\infty$ hasta $+\infty$.

b) En esta gráfica los valores que puede tomar la variable x están sobre el eje de

las X's y puede ser cualquiera, es decir de $-\infty$ a $+\infty$, este es su ***Dominio***.
Su ***Rango*** son los valores que toma la variable y sobre el eje de las Y's y en la gráfica se observa que van desde -5 hasta $+\infty$.

c) En esta gráfica los valores que puede tomar la variable x están sobre el eje de las X's y puede ser cualquiera, es decir de $-\infty$ a $+\infty$, este es su ***Dominio***.
Su ***Rango*** son los valores que toma la variable y sobre el eje de las Y's y en la gráfica se observa que van desde $-\infty$ hasta $+7$.

d) En esta gráfica los valores que puede tomar la variable x, están sobre el eje de las X's y son de -4 a 4, este es su **Dominio**.
Y los valores en el eje de las Y's son desde -5 a 5, y ese es su **Rango**.

Sugerencia para el profesor: Es pertinente que en este punto se de a conocer la prueba de la línea vertical.

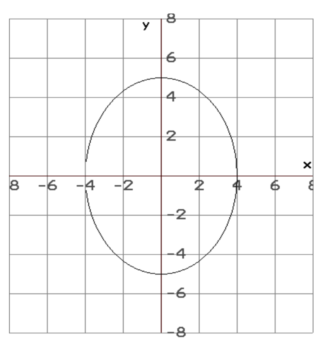
Prueba de la línea vertical para funciones:

Un conjunto de puntos en un plano coordenado es la gráfica de y como una función de x si y sólo si ninguna línea vertical intersecta la gráfica en más de un punto.

Ejemplo 7. De las cuatro gráficas en el ejemplo 7, decir cuales representan una función.

Solución:

Las gráficas de los incisos **a)**, **b)**, y **c)** del ejemplo 6, representan cada una a una función, ya que toda línea vertical sobre la gráfica la intersecta sólo una vez, puedes verificarlo con las líneas verticales de la cuadrícula del plano donde están trazadas.
En cambio la gráfica del inciso **d)** no representa a una función porque puedes encontrar una línea vertical sobre ella que la intersecta dos veces.



Ejemplo 8. Para cada una de las siguientes ecuaciones decir si y es una función de x, y dar el dominio y rango, trazar sus gráficas.

a) $y = +\sqrt{5x - 10}$ **b)** $2x^2 - 3y = 1$ **c)** $x^2 y - 3y = 2$

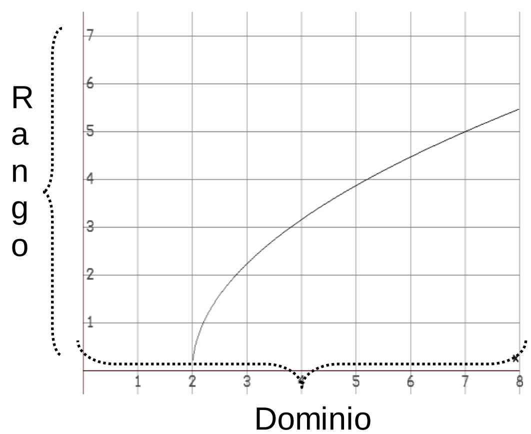
Solución:

a) Para que todo valor de x en el dominio le corresponda su pareja y, el radicando no debe de ser negativo, es decir $5x - 10 > 0$
despejando a x tenemos: $x > 2$

Quiere decir que para todo valor de x estrictamente mayor que 2 le corresponde sólo un valor de y, ya que la raíz cuadrada sólo es positiva, entonces esta ecuación si nos define una función y su dominio es todos los números mayores que 2 y lo escribiremos como el intervalo $(2, \infty)$.

Haciendo una pequeña tabulación su gráfica es:

TABULACIÓN	
x	y
2	0
3	2.23
4	3.16
5	3.87
6	4.47
8	5.47



En la gráfica podemos visualizar que el **rango** es de 0 hasta ∞, es decir el Intervalo $[0, +\infty)$.

b) Primero despejamos a la variable y en $2x^2 - 3y = 1$.

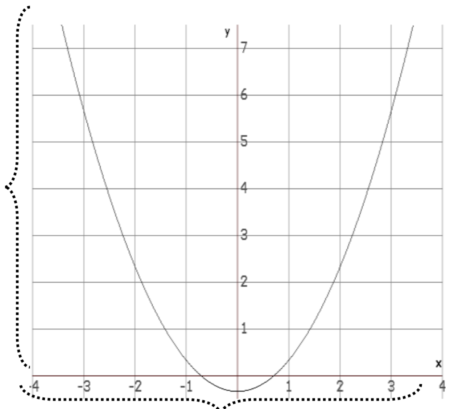
$$y = \frac{2x^2 - 1}{3}$$

Observamos que para cualquier valor de x hay exactamente un valor correspondiente para y de tal forma que esta ecuación define una función, su dominio son todos los reales.

Encontraremos algunos puntos de la gráfica en una pequeña tabulación del lado izquierdo y la gráfica del lado derecho.

x	y
0	$-\frac{1}{3} = -0.33$
1	$\frac{1}{3} = 0.33$
–1	$\frac{1}{3} = 0.33$
2	$\frac{7}{3} = 2.33$
–2	$\frac{7}{3} = 2.33$

R
a
n
g
o



Dominio

En la gráfica se observa que el rango es desde $-\frac{1}{3}$ y se va hacia $+\infty$, es decir el intervalo $[-\frac{1}{3}, +\infty)$.

Ya que su punto mínimo es $(0, -\frac{1}{3})$

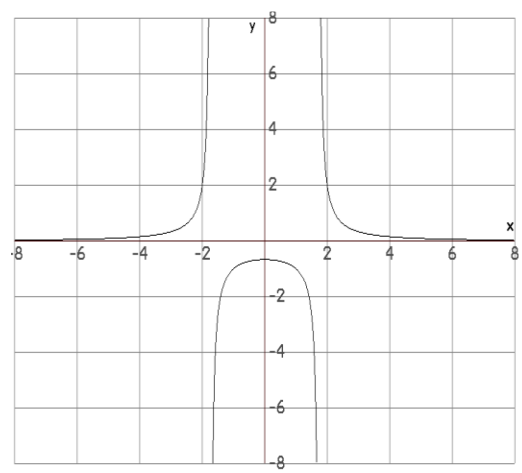
c) Primero despejamos a la variable y en $x^2 y - 3y = 2$

$$y = \frac{2}{x^2 - 3} \quad \text{con } x \neq \pm\sqrt{3}$$

Esto quiere decir que para que $x^2 y - 3y = 2$ sea función, el dominio es de $-\infty$ a $+\infty$ menos $\pm\sqrt{3}$, en notación de intervalo dominio = $(-\infty, +\infty) - \{\pm\sqrt{3}\}$

Para trazar su gráfica se usa una tabulación como la que se ve a continuación.

0	– 2/3
1	–1
–1	–1
2	2
–2	2
4	2/13 = 0.15
–4	2/13 = 0.15
1.8	8.3
–1.8	8.3
1.5	–2.6



Nota para el profesor: En este tipo de gráficas es difícil visualizar cual es el rango, se le puede indicar al alumno que dé un intervalo aproximado, en este caso de 0 a – 2/3 sobre el eje de las Y's no hay gráfica, es decir el rango está en los intervalos $(-\infty, -2/3] \cup (0, +\infty)$.

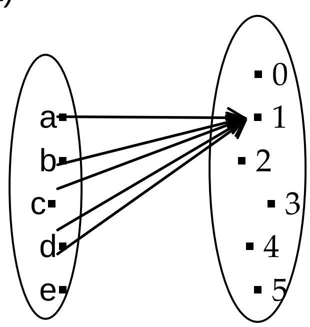
Ejercicio 1.2

1) Si $\mathcal{A}$ = {0, 1, 2, 3 } y $\mathcal{B}$ = {*a, b, c, d, e* }, determina cual de los siguientes conjuntos de pares ordenados representa a una función de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$, justifica tu respuesta.

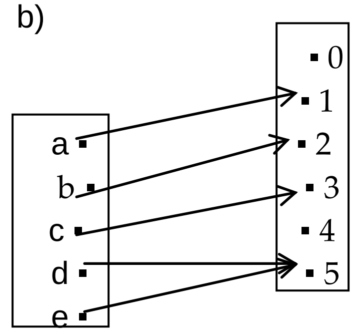
a) {(0 , *b*), (1 , *e*), (2 , *d*), (3 , *a*)}
b) {(1 , *d*), (0 , *e*), (3 , *e*), (2 , *a*)}
c) {(0 , *e*), (1 , *b*), (2 , *d*), (3 , *a*), (1 , *c*)}
d) {(0 , *a*), (1 , *d*), (2 , *b*), (3 , *e*), (2 , *b*)}
e) {(0 , *d*), (1 , *e*), (3 , *b*), (0 , *d*)}

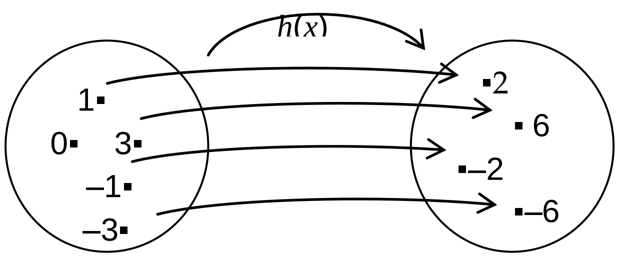
2) De los siguientes diagramas decir cual representa una función y cual no, justifica tu respuesta.

a)



b)





c)

3) De las siguientes ecuaciones cuáles definen a y como una función de x.

a) $y - x^2 = 9$ b) $2y - 8x = 4$ c) $y^2 - x = 1$ d) $x^2 + y^2 = 25$

4) a) Una función está dada por $f(x) = -x^3 + x - 1$, encontrar $f(-1)$, $f(0)$ y $f(2)$.

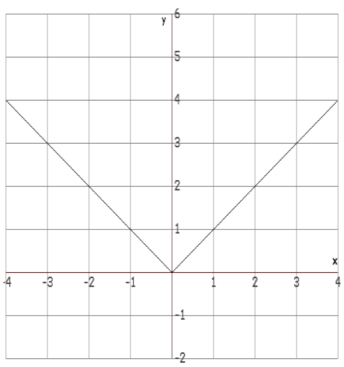
b) Una función está dada por $F(x) = \dfrac{2 - x^2}{x + 3}$, encontrar $F(-1)$, $F(0)$ y $F(2)$.

5) Encontrar el rango de las siguientes funciones cuyo dominio y regla de correspondencia son:

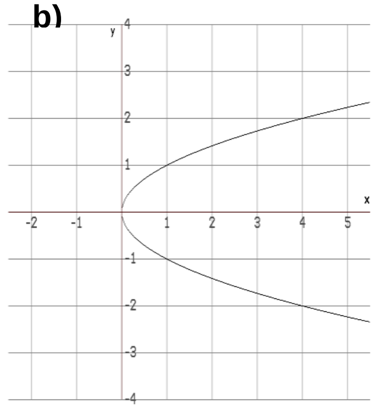
a) $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $g(x) = 3x^2 - 5$ b) $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $G(x) = (2x + 1)^2 - x$

6) En las siguientes gráficas encuentra el dominio y el rango, y haciendo la prueba de la línea vertical decir cuales representan a una función.

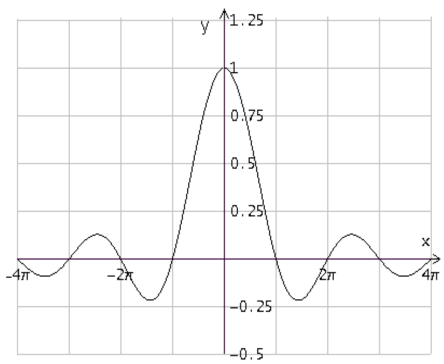
a)



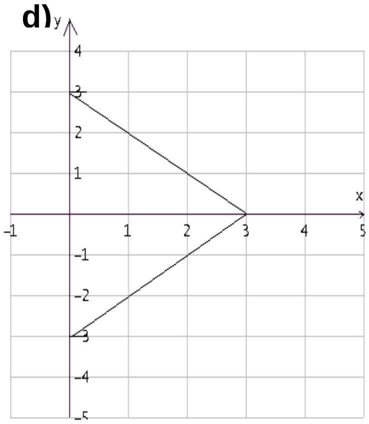
b)



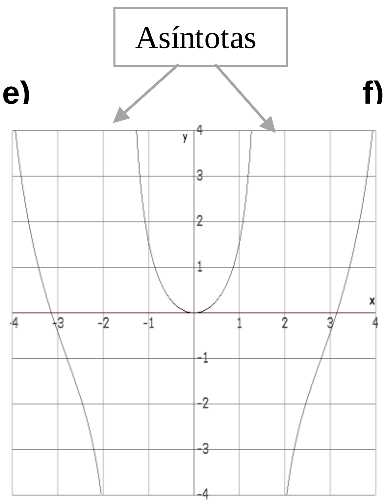
c)



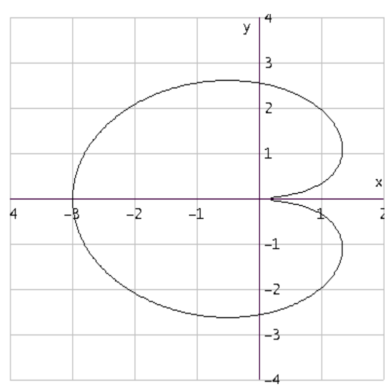
d)



e)



f)

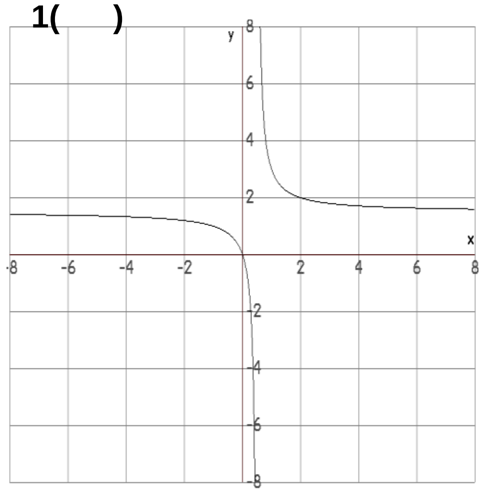


7) Para cada una de las siguientes ecuaciones decir si y es una función de x, después asocia cada gráfica con su ecuación. Dar el dominio y el rango de cada una.

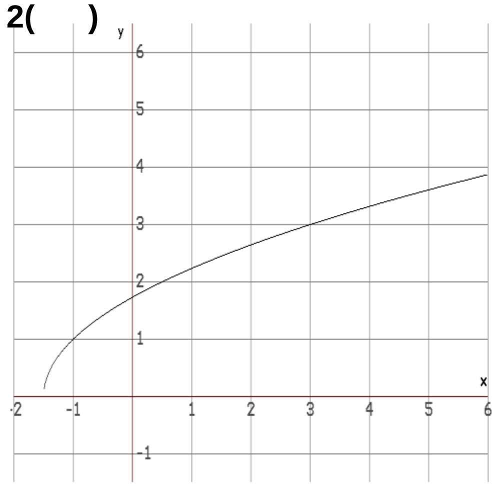
a) $y = +\sqrt{2x+3}$ **b)** $2x^2 - y = 5$ **c)** $x^2 y - 2y = -3$

d) $y = -\sqrt{x^2 - 2}$ **e)** $2x + y^2 = 3$ **f)** $(2x - 1)\, y = 3x$

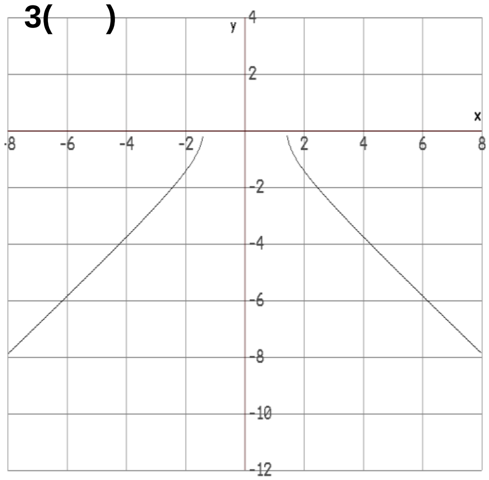
1(   )


y
x
-8 -6 -4 -2 2 4 6 8
8 6 4 2 -2 -4 -6 -8

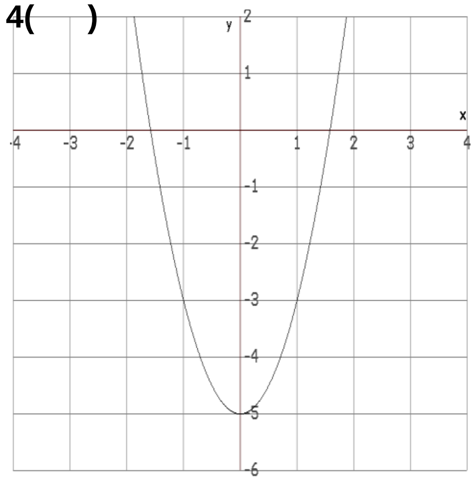
2(   )


y
x
-2 -1 1 2 3 4 5 6
6 5 4 3 2 1 -1

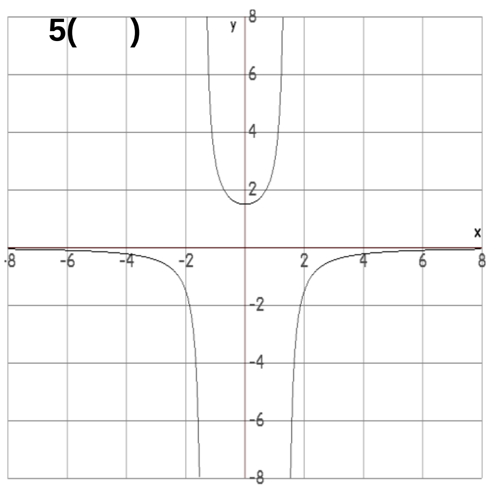
3(   )


y
x
-8 -6 -4 -2 2 4 6 8
4 2 -2 -4 -6 -8 -10 -12

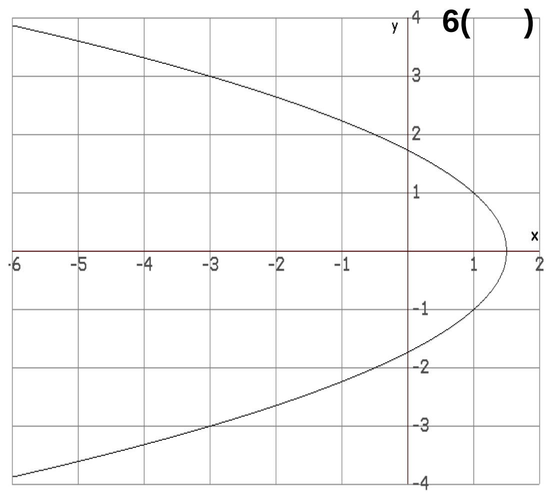
4(   )


y
x
-4 -3 -2 -1 1 2 3 4
2 1 -1 -2 -3 -4 -5 -6

5(   )


y
x
-8 -6 -4 -2 2 4 6 8
8 6 4 2 -2 -4 -6 -8

6(   )


y
x
-6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2
4 3 2 1 -1 -2 -3 -4

1.3 CONCEPTO DE FUNCIÓN POLINOMIAL

Aprendizajes:

- *Comprende el significado de la notación funcional y lo utilizará para representar y evaluar funciones polinomiales.*
- *Determina la concavidad de la gráfica en funciones del tipo* $f(x) = ax^n + c$ *con* $a, c \in \mathbb{R}$, *en base al signo de* ***a*** *y a la paridad de* **n**.
- *Relacionará a la ecuación* $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ *como un caso particular de la función polinomial asociada.*

1.3.1) Notación $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Una función polinomial es aquella en donde la variable se eleva a una potencia entera no negativa, es decir, una función f es polinomial si se puede expresar como un polinomio de la forma: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$ donde los coeficientes $a_0, a_1, \ldots\ldots a_n$ son constantes y n es un entero positivo. En general a las funciones polinomiales las llamaremos simplemente funciones

Por ejemplo:

Cuando **n=0** tenemos $f(x) = a_0$, representa una función constante (recta horizontal).

Cuando **n=1** tenemos $f(x) = a_1 x + a_0$ representa una función lineal cuya gráfica es una línea recta con pendiente a_1 y ordenada al origen a_0.

Si **n = 2** tenemos $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ representa una función cuadrática o de segundo grado, la cuál estamos acostumbrados a verla de la forma $y = ax^2 + bx + c$ o $f(x) = ax^2 + bx + c$ y su gráfica es una parábola.

Cuando **n = 3**, tenemos $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ representa a una función cúbica, y su gráfica la conoceremos más adelante.

Y así sucesivamente, para cuando **n** se va incrementando.

Algunos ejemplos de funciones polinomiales son:

$$P(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 2$$
$$Q(x) = 2x^3 - 4x^2 - 5x^4 + x - 3$$
$$R(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 5x + 1$$
$$S(x) = 3x^2 + 8x^5 - x^3 - 4x^6 + 2x$$

Por otro lado las funciones:

$F(x) = \dfrac{2}{x} + 3x$, $G(x) = \dfrac{2-x}{x^2-1} + 2x^3$, $H(x) = x^2 + \sqrt{5x} - 6$,

$J(x) = x + \sqrt{3-2x}$, $K(x) = 3x^5 - 2\cos x$

No son polinomiales, ya que en unas la variable esta dividiendo, en otras la variable se encuentra dentro de un radical o la variable es parte de otra operación.

Nota para el profesor: Para que el alumno practique y pueda distinguir una función polinomial, se pueden utilizar ejercicios similares al siguiente.

Ejercicio 1.3.1
Indica si las siguientes funciones son polinomiales o no, justificando tu afirmación.

1) $f(x) = x - 3x^4 - 5x^2 + 3$ ____________________________________

2) $g(x) = 5x^3 + 7x^5 + 8$ ____________________________________

3) $h(x) = x - x^2 - 9\sqrt{x} + 1$ ____________________________________

4) $j(x) = \sqrt{9}x - x^4 - 7x^2 + \sqrt{12}$ ____________________________________

5) $k(x) = x^3 + 7x^5 + 8\operatorname{sen}x$ ____________________________________

6) $l(x) = x^2 - \dfrac{3}{5x} + 9x$ ____________________________________

7) $m(x) = x^4 - \dfrac{5}{2}x^7 + 9x^5 + 6x^2$ ____________________________________

8) $n(x) = 2x^3 + 7 + \log x$ ____________________________________

9) $p(x) = \sqrt{x - 3x} + 5$ ____________________________________

10) $q(x) = x - 6x^4 + 5x^9 - 2x^7 + 2$ ____________________________________

1.3.2) Grado de una función polinomial.

El grado de una función polinomial nos lo da el exponente mayor de la variable independiente x, o sea el mayor valor de $\boldsymbol{n}$.

Ejercicio 1.3.2
Decir el grado de cada función polinomial del ejercicio anterior.

1.3.3) Gráfica de funciones polinomiales de la forma:

$f(x) = ax^3 + c$ con $a, c \in \Re$

$f(x) = ax^4 + c$ con $a, c \in \Re$

Nota para el profesor: antes de trabajar estas formas, es recomendable trabajar con funciones de la forma $f(x) = x^n$, y conducir a los alumnos a las formas deseadas como se muestra a continuación.

Cuando n es un número entero positivo tenemos a las funciones polinomiales. Si n = 1 y a =1 tenemos la función $f(x)= x$ que como ya se vio anteriormente es una línea recta que pasa por el origen a la que se le llama función identidad.
Si $n = 2$, tenemos una función cuadrática que nos representa una parábola y que también ya fue vista, cuando $n = 3$ tenemos una función cúbica, de la cual se hará un análisis parecido al que se hizo con la función cuadrática y así sucesivamente, n puede tomar valores ya sean pares o impares.
En esta sección se analizaran a estas funciones en su conjunto, como una familia de curvas, para que el alumno se de cuenta de su comportamiento en algunos intervalos.

Se puede trabajar la siguiente actividad dirigida al alumno:

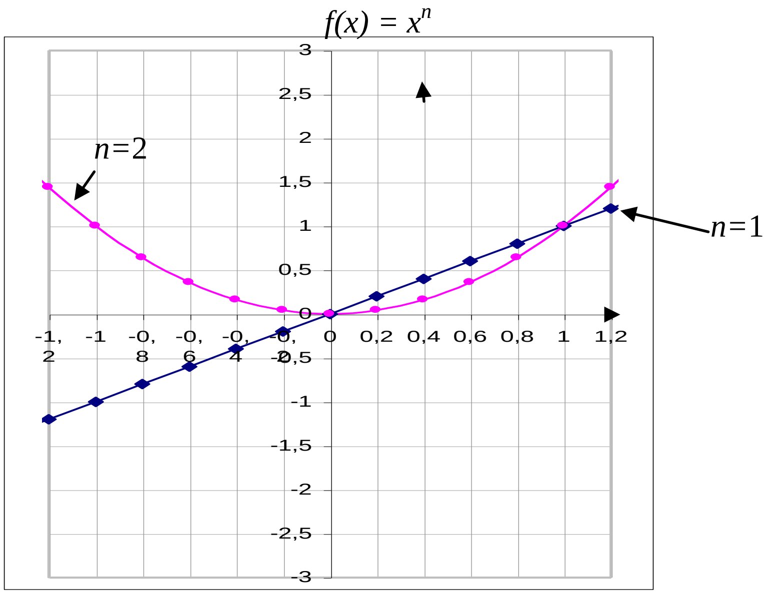
Actividad 1) Empecemos por hacer una tabla donde se muestren los valores de x y los de su correspondiente $f(x)$ o y, cuando n va desde 1 hasta 6, para que observemos lo que pasa con la forma de la curva cuando n toma valores impares o pares.

Cuando $x = 1$ la función toma el valor de 1 o sea $f(1) = (1)^n$ = 1 no importa el valor de n, cuando x es positiva también $f(x)$ es positiva; pero si $x = -1$, ya no sucede lo mismo, ya que si n es par ($n = 2, 4, 6,....$), $f(-1) = 1$ y para cualquier valor negativo de x su correspondiente $f(x)$ es positiva, si n es impar ($n = 1, 3, 5,...$), $f(-1) = -1$ y para cualquier valor de x negativo, $f(x)$ es negativo.

En el intervalo de -1 a 1 démosle varios valores y luego valores enteros no muy grandes, ya que te vas a dar cuenta que crece demasiado y no las podrías graficar juntas, sobre todo con la misma escala, así que mejor completa la siguiente tabla.

x	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
0.2	0.2	0.04	0.008	0.0016		
0.4	0.4	0.16	0.064		0.01024	0.004096
0.6	0.6		0.216	0.1296	0.07776	
0.8		0.64	0.512			
1				1	1	
1.2		1.44		2.0736	2.48832	2.985984
1.4			2.744	3.8416		
1.6		2.56	4.096			16.777216
1.8		3.24		10.4976	18.89568	
2		4		16	32	64
-0.2		0.04	-0.008			
-0.4				0.0256	-0.01024	
-0.6			-0.216		-0.07776	0.046656
-0.8		0.64	-0.512	0.4096		
-1				1	-1	
-1.2		1.44	-1.728		-2.48832	2.985984
-1.4				3.8416	-5.37824	
-1.6			-4.096	6.5536		16.777216
-2	-2		-8	16	-32	64

Para que logremos observar el comportamiento de todas estas funciones no hay necesidad de colocar la escala de acuerdo a los valores que tenemos en la tabla porque como se observa, cuando x toma valores entre -1 y 1, la función $f(x)$ toma valores también entre -1 y 1, para los demás valores observamos que $f(x)$ es positiva o negativa pero con un valor muy grande, vamos a considerar que cuando x tiene valores de 1.2 o -1.2 los valores de las funciones son accesibles y las puedes trazar en el siguiente plano en donde ya se encuentran marcadas x y x^2



Como podrás darte cuenta, cuando n es par se comportan igual a la parábola abriendo hacia arriba. Para valores negativos de x decrecen hasta $x = 0$ y para valores positivos crecen, o sea que, bajan, tocan el origen y suben. Son simétricas con respecto al eje Y, ya que $f(-x) = f(x)$ por lo que se dice que cada una de ellas es una **función par**.

a) ¿Que sucede cuando n es impar? ___________________________________

____

____

____

b) ¿Qué puntos tienen en común todas las gráficas? ________________________

c) En el intervalo de 0 a 1 ¿cuál de las curvas crece más lentamente? __________

d) ¿Cuál de las curvas crece más rápidamente en el intervalo de 1 en adelante?

____

e) ¿Cuál de las curvas decrece más lentamente en el intervalo de menos infinito hasta menos uno? ____

Otra de las cosas que podemos decir de las gráficas anteriores es que cuando el exponente es par no cambian de concavidad (abren hacia arriba) y cuando el exponente es impar al cruzar el origen cambia la concavidad (era hacia abajo y al cruzar es hacia arriba), también al aumentar el exponente se pegan al eje x o se hacen más planas alrededor del origen, ya sea de un solo lado (exponente par) o de los dos lados (exponente impar).

f) En cuanto al dominio de cada una de ellas que puedes decir:________________

____

g) ¿Qué pasa con el rango correspondiente a cada una de ellas?

____

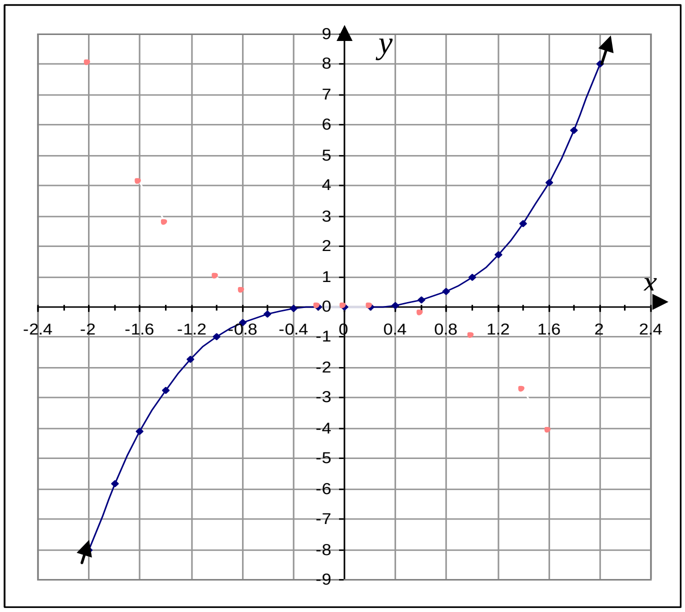
Las intersecciones de las gráficas con el eje X son los **ceros** de la función o las **raíces** (soluciones) de la ecuación, que resultan cuando la función se iguala a cero. Observando la tabla y las gráficas vemos que cuando $x = 0$, su imagen en todas las funciones también vale cero. Así que $x = 0$ es una raíz sencilla o simple para la función lineal (pasa por el origen directamente), $x = 0$ es una raíz doble para la función cuadrática (no cruza al eje x es cóncava hacia arriba), $x = 0$ es una raíz triple para la función cúbica (cruza pero cambia su concavidad) y así va aumentando su multiplicidad según el exponente.

REFLEXIÓN

Si a cualquiera de estas funciones se les cambiara de signo ¿qué crees que pasaría?, puedes hacerlo en tu cuaderno o a lo mejor te das cuenta que les va a pasar lo mismo que a la función cuadrática que ya estudiaste en el segundo semestre y simplemente contestes que se van a voltear sobre el eje x.

Actividad 2) Analicemos a $f(x) = -x^3$, completando la tabla y después guiándote con esta, traza su gráfica comparándola con la que ya está trazada que es $f(x) = x^3$.
Observación: Ya hiciste la tabla para $f(x) = x^3$ sólo cámbiale de signo a $f(x)$ y obtienes el valor para $f(x) = -x^3$.

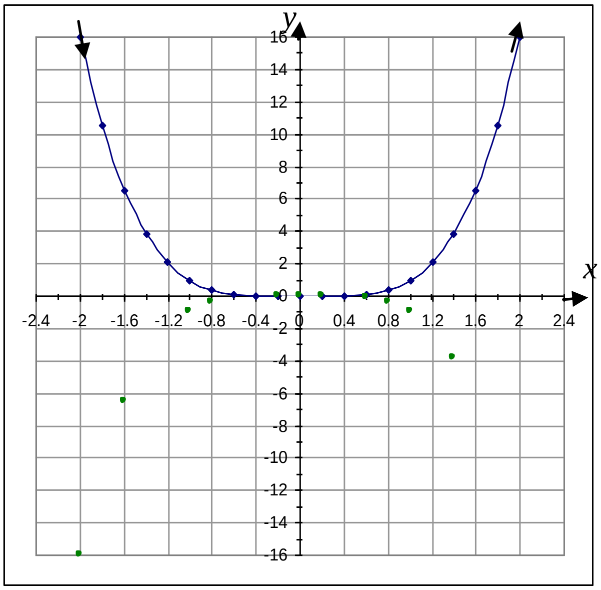
x	$f(x) = -x^3$	x	$f(x) = -x^3$
0	0		
0.2	$-(0.2)^3 = -0.008$	- 0.2	$-(-0.2)^3=0.008$
0.4		- 0.4	
0.6	- 0.216	- 0.6	
0.8		- 0.8	0.512
1	-1	- 1	1
1.2		- 1.2	
1.4	- 2.744	- 1.4	2.744
1.6	- 4.096	- 1.6	4.096
1.8		- 1.8	
2		- 2	8



Sucedió lo que intuíamos, **se invirtió sobre el eje X (se reflejo en el eje X),** con signo positivo empieza abajo y termina arriba, con signo negativo empieza arriba y termina abajo

Actividad 3) Vamos ahora con $g(x) = -x^4$, completando la tabla y después traza su gráfica comparándola con la que ya está dibujada que es $g(x) = x^4$.
Observación: Ya hiciste la tabla para $g(x) = x^4$ sólo cámbiale de signo a $g(x)$ y obtienes el valor para $g(x) = -x^3$.

x	$g(x) = -x^4$	x	$g(x) = -x^4$
0	0		
0.2	$-(0.2)^4 = -0.0016$	– 0.2	$-(-0.2)^4 = -0.0016$
0.4		– 0.4	
0.6	– 0.1296	– 0.6	
0.8		– 0.8	– 0.512
1	–1	– 1	– 1
1.2		– 1.2	
1.4	3.8416	– 1.4	
1.6		– 1.6	– 6.5536
1.8		– 1.8	
2.0		–2.0	– 16



Nuevamente al trazar la gráfica de la función $g(x) = -x^4$ se puede observar que ahora todos los valores que toma la función son negativos, y esta abre hacia abajo, cambio su concavidad; o sea que **se invierte sobre el eje X o se refleja** como en el caso anterior.

Ejercicio 1.3.3

1) Traza las gráficas de $f(x) = \pm x^5$ y $g(x) = \pm x^6$ en tu cuaderno.
2) Discute con tus compañeros y concluye como es afectada la concavidad de la gráfica con respecto al signo que lleva el término, así como también con respecto al exponente.
3) En cada una de las funciones que pasa con el dominio y el rango.

1.3.4 Comportamientos de las funciones de la forma $f(x) = ax^n + c$

a) DESPLAZAMIENTO VERTICAL

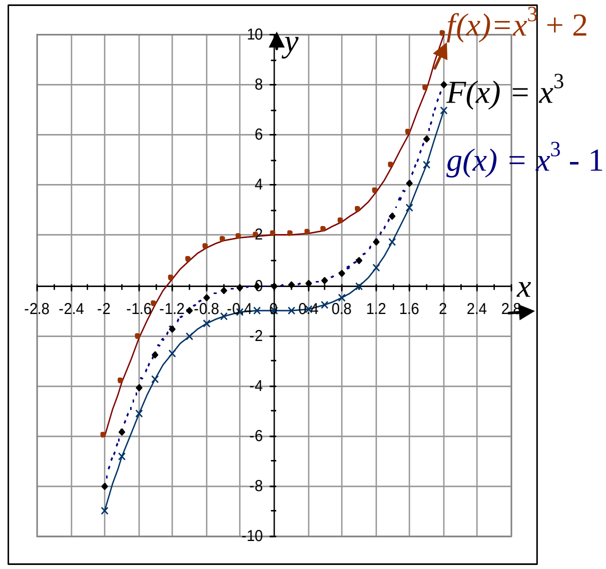
Nota para el profesor: A pesar de ya haber trabajado los desplazamientos con la función cuadrática, es recomendable analizarlo con las funciones de mayor grado. Sugerimos dejar a los alumnos como lectura, los siguientes ejercicios resueltos o también pueden trabajarse en la clase.

Ejemplo 1. Traza la gráfica de cada función sobre un mismo plano

a) $f(x) = x^3 + 2$ b) $g(x) = x^3 - 1$.

Solución:
En la tabla de la función cúbica anterior, le agregamos estas nuevas funciones y evaluamos para los valores de x que están dados:

x	$F(x) = x^3$	$f(x) = x^3 + 2$	$g(x) = x^3 - 1$
0.2	0.008	2.008	-0.992
0.4	0.064	2.064	-0.936
0.6	0.216	2.216	-0.784
0.8	0.512	2.512	-0.488
1	1	3	0
1.2	1.728	3.728	0.728
1.4	2.744	4.744	1.744
1.6	4.096	6.096	3.096
1.8	5.832	7.832	4.832
2	8	10	7
-0.2	-0.008	1.992	-1.008
-0.4	-0.064	1.936	-1.064
-0.6	-0.216	1.784	-1.216
-0.8	-0.512	1.488	-1.512
-1	-1	1	-2
-1.2	-1.728	0.272	-2.728
-1.4	-2.744	-0.744	-3.744
-1.6	-4.096	-2.096	-5.096
-1.8	-5.832	-3.832	-6.832
-2	-8	-6	-9



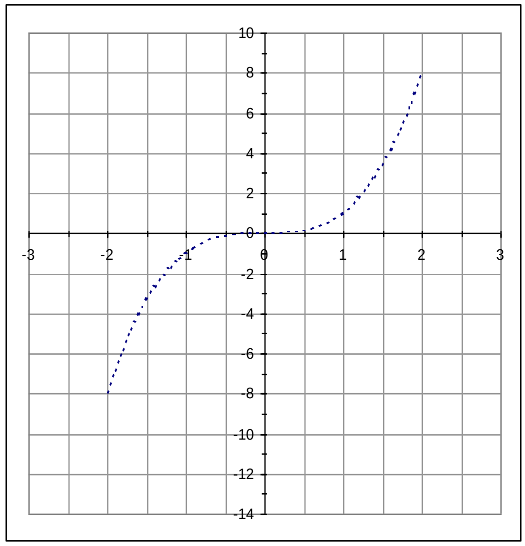
Como te habrás dado cuenta al observar tanto la tabla como la gráfica, si le sumamos suben si le restamos bajan, o sea que se desplazan sobre el eje Y. La función del inciso a) le sumamos 2 a cada punto de la cubica y al inciso b) le restamos 1 a cada punto, no es necesario hacerlo con todos los puntos lo más importante es recordar la forma de la cubica y algunos de los puntos por los que pasa por ejemplo (0,0), (1,1) (2,8), (–1, –1) y (–2, –8) y que si se sigue alejando x a la derecha (infinito) la función sigue creciendo (infinito) y que si x se aleja a la izquierda (menos infinito) la función toma valores grandes pero negativos (menos infinito).

Para delinear la gráfica de este tipo de funciones no es necesario que tabulemos, sino que con base a las que ya conocemos tratemos de hacer un bosquejo de la que se nos pide, así que hay que ir tratando de recordar las formas de las funciones vistas con anterioridad.

Ejercicio 1.3.4 a)

1) En el siguiente plano trazar las gráficas de las funciones que siguen sin tabular, tomando como base la que ya conoces $f(x) = x^3$ que esta delineada en el plano.

a) $F(x) = x^3 - 5$ b) $G(x) = x^3 + 3$ c) $H(x) = x^3 - 2$



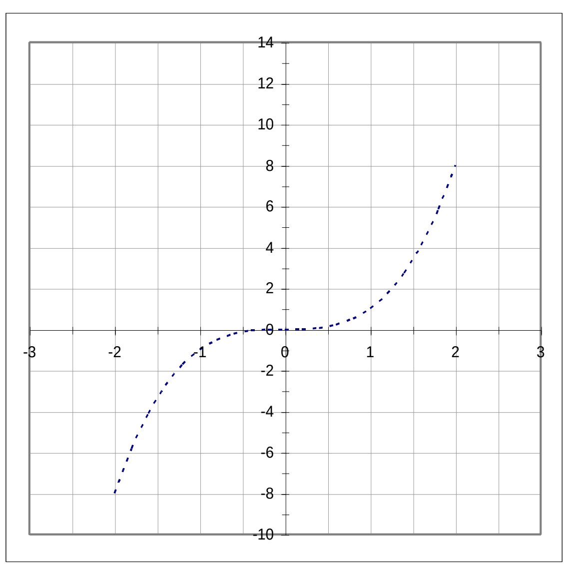
i) ¿Cambia su dominio y rango correspondiente? ___________________________

Ya no cruzan al eje X en el origen, por lo que $x = 0$ ya no es un **cero** de estas funciones. Si observas las gráficas te darás cuenta de que cruzan al eje X directamente y no en la misma forma que la original así que este punto donde cruzan nos da una **raíz** real y como no vuelven a cruzar el eje las otras dos raíces son complejas.

ii) ¿Podrías encontrar la raíz real de estas funciones? ¿Cómo?
____

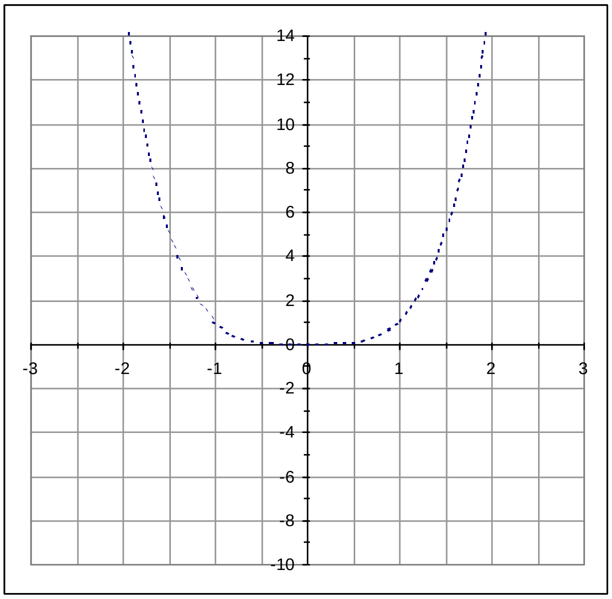
2) Traza en el siguiente plano las gráficas de las funciones dadas sin tabular y escribe su dominio y rango de cada una de ellas.

a) $f(x) = -x^3 + 3$ b) $g(x) = -x^3 - 2$ c) $h(x) = -x^3 + 5$



3) Traza la gráfica de cada función sin tabular y escribe su dominio y rango correspondiente.

a) $f(x) = x^4 - 6$ b) $g(x) = -x^4 + 2$ c) $h(x) = x^4 + 2$



d) Intenta encontrar los ceros reales de estas funciones.

b) DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL

Las gráficas de las funciones se desplazan sobre el eje Y cuando se le suma o resta una cantidad determinada a la función cuyos valores se localizan en el plano sobre el eje Y, ahora para que el desplazamiento sea sobre el eje X le tenemos que sumar o restar una cantidad a la variable x.

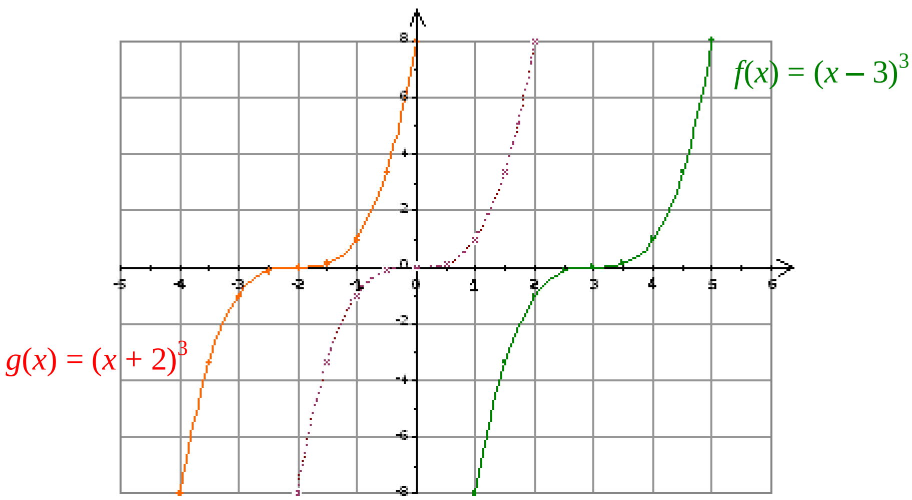
Ejemplo. Trazar la gráfica de cada función

a) $f(x) = (x - 3)^3$ b) $g(x) = (x + 2)^3$

Solución:

Hay que buscar los valores de x que al sustituirlos, el contenido del paréntesis se hace cero. Para ver alrededor de que número tenemos que evaluar, primero evaluemos la función a) alrededor de 3 ya que 3 – 3 = 0 y así vamos a tener los valores en donde nos interesa la función o sea donde hay un cambio en su gráfica. La función b) la evaluamos alrededor de –2 ya que –2 + 2 = 0, démosles valores como sigue:

x	$g(x) = (x + 2)^3$	x	$f(x) = (x – 3)^3$
- 4	-8	1	-8
- 3.5	-3.375	1.5	-3.375
- 3	-1	2	-1
- 2.5	-0.125	2.5	-0.125
- 2	0	3	0
- 1.5	0.125	3.5	0.125
- 1	1	4	1
- 0.5	3.375	4.5	3.375
0	8	5	8

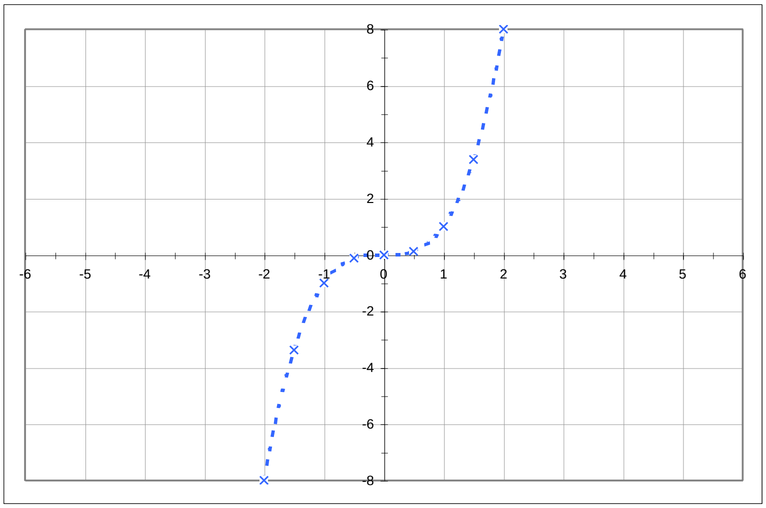


Tanto el dominio como el rango no cambian, ambos siguen siendo todos los números reales. En cuanto a los **ceros** de estas funciones simplemente se desplazan. En $f(x)$ su cero es $x = 3$, es una raíz triple (cruza cambiando de concavidad), y $g(x)$ su cero es $x = –2$ también es una raíz triple.

Ejercicio 1.3.4 b)

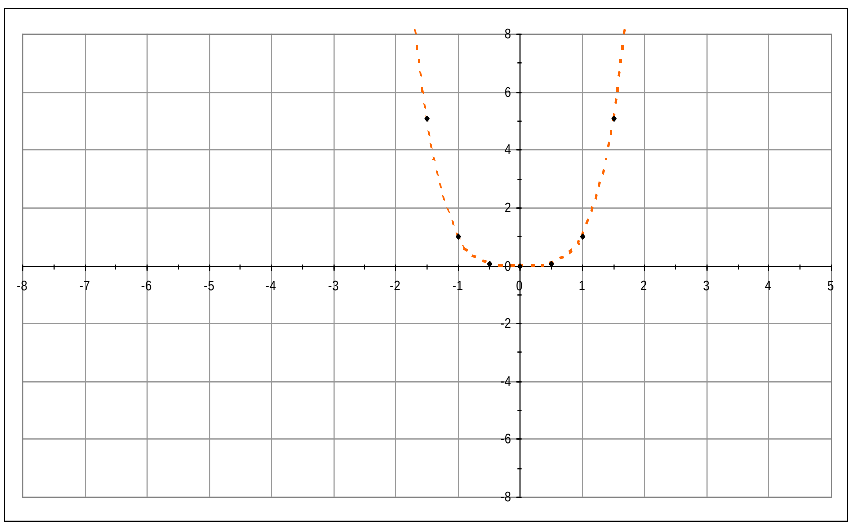
1) En el siguiente plano está la gráfica de la función $f(x) = x^3$, esta te ayudará para que traces las gráficas (sin tabular) de las siguientes funciones.

a) $g(x) = (x + 4)^3$ b) $h(x) = – (x +2)^3$ c) $j(x) = – (x – 4)^3$



2) En el siguiente plano y usando la gráfica trazada, bosquejar la gráfica de cada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (x + 2)^4$ b) $g(x) = -(x - 3)^4$ c) $h(x) = -(x + 5)^4$

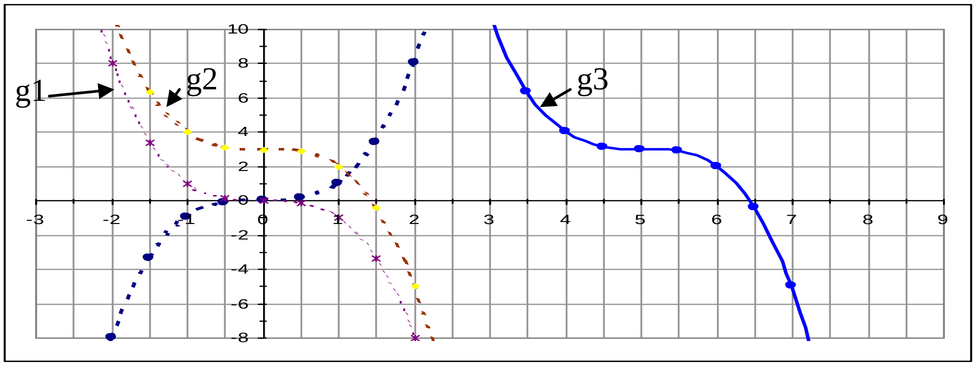


c) COMBINACIÓN DE TRANSFORMACIONES

Ya se puede graficar otro tipo de funciones cúbicas con base a la gráfica de x^3, transformándola según la expresión que se presente. Una forma de hacerlo es la siguiente.

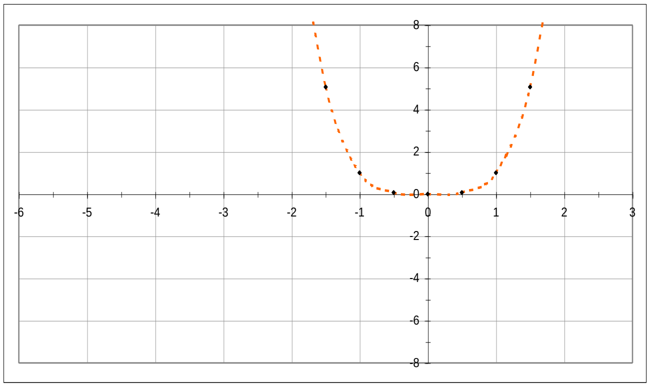
Ejemplo. Trazar la gráfica de la función $F(x) = -(x - 5)^3 + 3$.

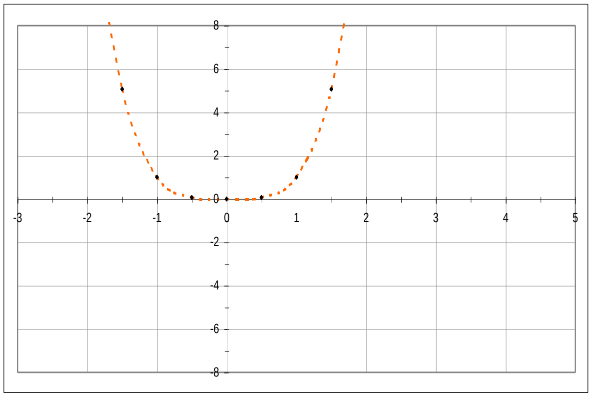
Solución:
El signo negativo que se encuentra fuera del paréntesis hace que se invierta o refleje en el eje x como se ve en la gráfica (g1). Al sumarle 3 al término cúbico, la gráfica debe subir 3 unidades (g2); restarle 5 a x, nos indica que la grafica debe desplazarse 5 unidades a la derecha (g3) y esta última es la gráfica que corresponde a $F(x)$.



El dominio de la función de $F(x)$ son todos los números reales ya que para cualquier valor que se le dé a x siempre se tiene un valor de $F(x)$, y estos valores se encuentran sobre todo el eje Y por lo que su rango también son todos los números reales. En cuanto a sus raíces una de ellas es real porque solo cruza al eje X una sola vez y directamente las otras dos son complejas.

Ejercicio 1.3.4 c)
De forma similar al ejemplo, trazar la gráfica para cada una de las siguientes funciones:
a) $G(x) = (x + 3)^4 - 2$ b) $H(x) = -(x - 2)^4 + 3$





d) ALARGAMIENTO Y COMPRESIÓN VERTICAL

Para que observemos el alargamiento o la compresión vertical de las gráficas de las funciones polinomiales de la forma $f(x) = ax^{n.}$
Si $a > 1$ la forma de las curvas resultan ser más alargadas o angostas.
Si $0 < a < 1$ la forma de las curvas son más anchas (se comprime verticalmente).

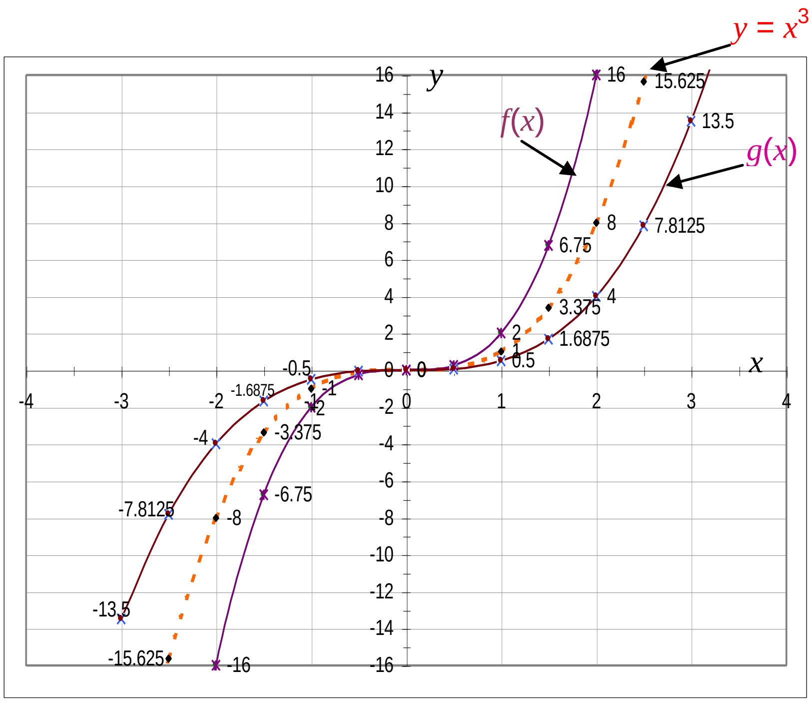
Ejemplo 1. Dibuja la gráfica de cada función

a) $f(x) = 2x^3$ b) $g(x) = \frac{1}{2}x^3$

Solución:

a) Empezamos por trazar la función cúbica $y = x^3$ (g1), y cada valor de y que tengamos lo multiplicamos por 2, como lo indica $f(x)$ (ver g2), puedes ver que se pega más al eje Y tanto arriba como abajo (se alarga verticalmente).

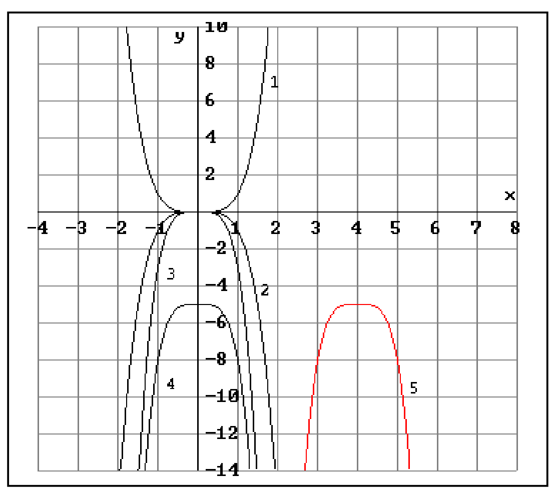
b) Para la función $g(x)$ multiplicamos a y por ½ y ahora la curva se aleja del eje Y o sea que se abre o se hace más ancha (se encoge verticalmente, ver g3))



Ejemplo 2. Bosqueja la gráfica de la siguiente función $F(x) = -3(x-4)^4 - 5$

Solución:

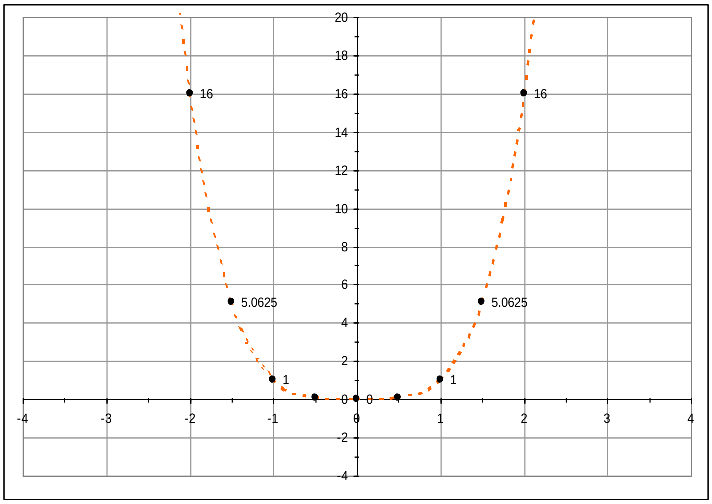
Empezamos por trazar la función cuarta $y = x^4$ (**1**), tanto el signo negativo como el 3 multiplican a x^4, así que el signo refleja a la gráfica en el eje X (**2**) y el 3 la alarga verticalmente (**3**); como se le esta restando 5 baja 5 unidades (**4**) y nos falta dentro del paréntesis estamos restando 4 a x por lo que se debe recorrer 4 unidades a la derecha (**5**) y esta es la gráfica de la función F(x).



Ejercicio 1.3.4 d)

1) Dibujar la gráfica de cada una de las siguientes funciones

a) F(x) = $2x^4$ b) G(x) = $\frac{1}{2}x^4$ c) H(x) = $\frac{1}{3}x^4$



Escribe lo que puedes observar en las gráficas de estas funciones: __________

____

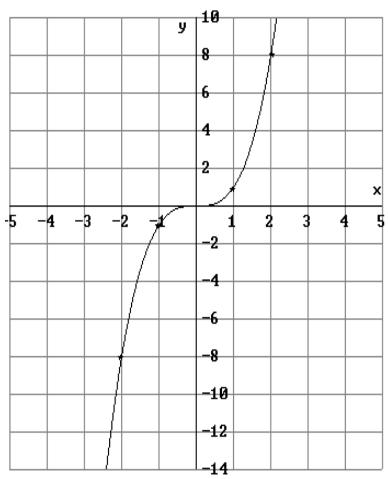
____

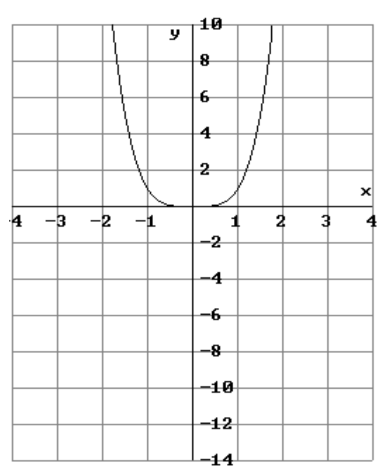
____

2) Traza la gráfica de cada una de las siguientes funciones según en el plano que le corresponda marcándolas con diferentes colores.

a) F(x) = $2x^3 - 3$ b) G(x) = $-2x^4 + 4$ c) H(x) = $3x^4 - 2$ d) J(x) = $-\frac{1}{3}x^3 - 4$

e) K(x) = $-\frac{1}{2}x^4 - 3$ f) L(x) = $3x^3 + 1$

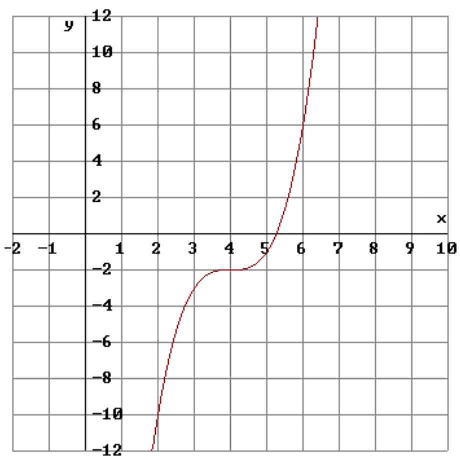




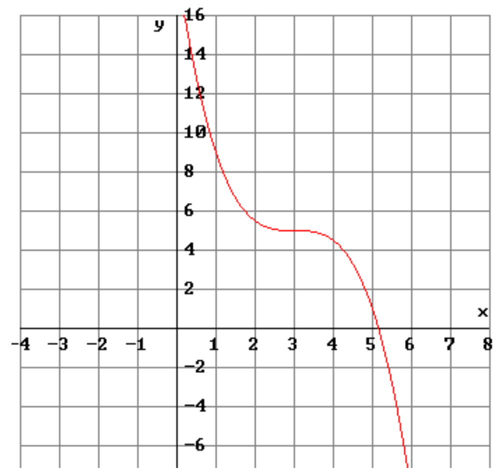
3) Dibujar la gráfica de la función $f(x) = -2(x + 3)^3 - 4$ aplicando las transformaciones vistas.

4) Las siguientes gráficas son el resultado de aplicar una serie de transformaciones a la función $y = x^3$. Describir las transformaciones de manera verbal y escribir la función que representan.

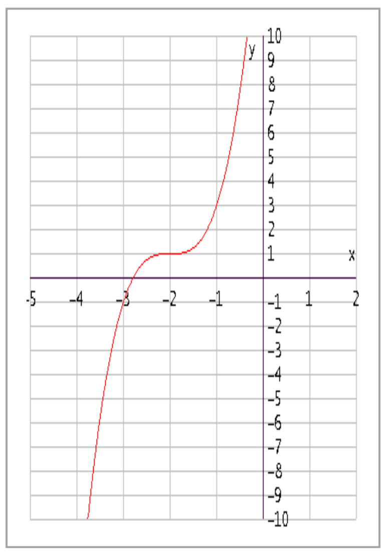
a)



b)



c)



1.3.5 La ecuación como un caso particular de la función polinomial.

Sugerencia para el profesor: Para completar esta parte, se puede ir ejemplificando cada caso, resolviendo las ecuaciones resultantes y al mismo tiempo ir haciendo énfasis en que **las soluciones o raíces de la ecuación son los ceros de la función polinomial**. Es conveniente ir bosquejando sus gráficas ya que esto preparará al alumno para los temas posteriores.

Como ya se estudio, la función lineal es de la forma $f(x) = mx + b$, es una función polinomial de primer grado donde el coeficiente m de x, es la pendiente. Y el término independiente b es la ordenada al origen. Si se hace $f(x) = 0$ se obtiene $0 = mx + b$ que es una **ecuación** de primer grado ya estudiada con anterioridad.

También se estudio a la función cuadrática $g(x) = ax^2 + bx + c$, es otra función polinomial de segundo grado. Si $g(x) = 0$ se obtiene $0 = ax^2 + bx + c$, que es una **ecuación** de segundo grado.

De forma similar una función de tercer grado $h(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, se convierte en **ecuación** si se hace $h(x) = 0$, obteniéndose la ecuación de tercer grado $0 = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

Así sucesivamente toda función polinomial de grado n, $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, se convierte en **ecuación** de grado n si se hace $p(x) = 0$.

1.4 MÉTODOS DE EXPLORACIÓN PARA LA OBTENCIÓN DE LOS CEROS, APLICABLE A LAS FUNCIONES POLINOMIALES FACTORIZABLES DE GRADO 3 Y 4.

Aprendizajes:

- *Resuelve ecuaciones polinomiales que se puedan factorizar utilizando los distintos métodos de exploración señalados en la temática.*
- *Identifica los ceros de una función polinomial como las raíces de la ecuación polinomial asociada.*
- *A partir de las raíces reales de una ecuación polinomial construye una función polinomial y bosqueja la gráfica asociada a ella.*

Los ceros de una función $f(x)$ son las soluciones o raíces de la ecuación que resulta al hacer $f(x) = 0$. Encontrar la solución de una ecuación polinomial en x de la forma:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

Significa encontrar los valores de x que al sustituirlos en la ecuación, esta sea igual a cero.

Existen varios métodos para encontrar las raíces o ceros de una función polinomial de grado mayor a 2. Así como en las de segundo grado hay una fórmula, también la hay para las de tercero y cuarto grado pero son muy largas y complicadas. Y para las de grado mayor de 4 no existe una fórmula que nos de su solución, por lo que estudiaremos algunos métodos generales que nos servirán para encontrar los ceros o raíces de funciones polinomiales de grado mayor que dos.

Nota para el profesor: Los ejemplos y actividades que a continuación se mostraran, se apoyarán en el Teorema Fundamental del Algebra. Ya que existen muchas formulaciones equivalentes de este teorema, las cuales se utilizarán en esta parte de la unidad. Estos enunciados equivalentes son: “Toda ecuación polinómica de grado n, con coeficientes complejos, tiene n raíces en el campo de los complejos”, “Todo polinomio real puede ser expresado como producto de factores lineales reales o cuadráticos reales”.

Uno de los métodos para encontrar las raíces o ceros de una función polinomial es por FACTORIZACIÖN, mostraremos algunas formas de hacerlo.

Ejemplo 1. Encontrar las raíces o ceros de la función $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$

Solución: Se resuelve $x^3 + 2x^2 - 3x = 0$

Factorizando a x tenemos: $x(x + 3)(x - 1) = 0$

Esta igualdad se cumple cuando $x = 0$ o $x + 3 = 0$ o $x - 1 = 0$.
Es decir $x = 0, x = -3$ o $x = 1$, son las raíces o ceros de $f(x)$.
La función nos queda factorizada como: $f(x) = x(x + 3)(x - 1)$

Ejemplo 2. Encontrar las raíces o ceros de la función $g(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

Solución: Tenemos que resolver $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

$$x^2(x + 2) - (x + 2) = 0$$

La factorización completa sería $(x + 2)(x - 1)(x + 1) = 0$

La solución de la ecuación o las raíces de $g(x)$ son: $x = -2$, $x = 1$ y $x = -1$.

La función nos queda factorizada como: $g(x) = (x + 1)(x + 2)(x - 1)$

Ejemplo 3. Encontrar las raíces o ceros de la función $h(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

Solución: Se resuelve $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Haciendo un cambio de variable: $u = x^2$
La ecuación se convierte en $u^2 - 5u + 4 = 0$ que es una ecuación de 2º grado en u, cuya factorización es: $(u - 4)(u - 1) = 0$.
Y su solución es: $u = 4$ y $u = 1$, pero como $u = x^2$ sustituyendo tenemos que $x = \pm 2$ y $x = \pm 1$ son las cuatro raíces de $h(x)$.
La función nos queda factorizada como: $h(x) = (x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)$

Ejemplo 4. Encontrar las raíces o ceros de la función $p(x) = -2x^4 + 7x^3 + 8x^2$.

Solución: Se resuelve $-2x^4 + 7x^3 + 8x^2 = 0$

$$-x^2(2x^2 - 7x - 8) = 0$$

De aquí que $x = 0$ es una raíz doble y las otras dos las encontramos resolviendo la ecuación de segundo grado $2x^2 - 7x - 8 = 0$. Utilizando la fórmula general se tiene que $x_1 = 4.4075$ y $x_2 = -0.9075$.
Las raíces de la función $p(x)$ son: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4.4075$ y $x_4 = -0.9075$

La función nos queda factorizada como: $p(x) = -x^2(2x^2 - 7x - 8)$

Como no toda ecuación polinómica se puede factorizar con números enteros, entonces utilizaremos otros métodos para encontrar raíces enteras y no enteras. Pero antes necesitaremos conocer otros conceptos que se necesitan para utilizarlos.

Estos son: División de polinomios en particular División Sintética, Teorema del Residuo y el Teorema del Factor.

PARA COMPLEMENTAR LA FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS, SE PUEDE VER LOS SIGUIENTES VIDEOS EN:
- http://matematicasies.com/?02-Ecuaciones-Bicuadradas
- http://matematicasies.com/?Polinomios-Factorizar-Mentalmente
- http://matematicasies.com/?Factorizar-polinomios-mentalmente,1410

1.4.1) División de polinomios

La división entre polinomios sigue determinadas reglas, que fueron abordadas en sus cursos de Secundaria. Este método es algebraico y en consecuencia se presta a mayores dificultades para el alumno.

En lo que respecta a nuestro tema de estudio, usaremos la división entre polinomios cuando el divisor sea de la forma $x - c$, por tal razón es conveniente usar el método de la División Sintética, ya que es un método numérico que facilita al alumno la división entre polinomios del tipo que abordaremos.

Nota para el profesor: Se sugiere hacer algunas divisiones entre polinomios con el divisor de la forma $x - c$, para que los alumnos recuerden cada uno de los elementos de la división. También se les puede pedir que vean el video que está recomendado más adelante o se les deja de lectura el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Dividir el polinomio $P(x) = x^3 - 8x^2 + 17x - 10$ entre $Q(x) = x - 3$.

Solución: Al dividir P(x) entre el polinomio Q(x) , estamos haciendo lo siguiente:

$$
\begin{array}{rrl}
 & x^2 - 5x + 2 & \leftarrow \text{Cociente} \\
\text{Divisor} \longrightarrow \quad x - 3 & \overline{\big) x^3 - 8x^2 + 17x - 10} & \leftarrow \text{Dividendo} \\
 & \underline{-x^3 + 3x^2 \qquad\qquad} & \\
 & 0 - 5x^2 + 17x - 10 & \\
 & \underline{5x^2 - 15x \qquad} & \\
 & 0 + 2x - 10 & \\
 & \underline{-2x + 6} & \\
 & 0 - 4 & \leftarrow \text{Residuo}
\end{array}
$$

Es decir $x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = (x - 3)(x^2 - 5x + 2) + (-4)$

Se está usando el **algoritmo de la división** que dice lo siguiente:

Si dividimos a un polinomio P(x) entre otro Q(x), con Q(x) $\neq$ 0, entonces existen dos polinomios únicos C(x) y R(x) tales que:

$$P(x) = Q(x)\,C(x) + R(x)$$

Donde R(x) puede ser 0, o bien el grado de R(x) es menor que el grado de Q(x).

El algoritmo de la división nos muestra que si el residuo **R(x) es cero**, entonces nuestro polinomio queda factorizado como P(x) = Q(x) C(x). Y si Q(x) es de la forma $x - c$, entonces **c es una raíz de P(x)**, este es uno de los resultados más importantes en esta unidad.

En el ejemplo anterior, el polinomio divisor es lineal y su grado es 1. En consecuencia su residuo es de grado cero, es decir, el polinomio residuo es una constante. Es fácil mostrar que P(3) = – 4, es decir, se cumple el **teorema del residuo** antes mencionado. Además podemos afirmar que 3 no es raíz de P(x).

PARA COMPLEMENTAR LA DIVISIÓN ENTRE UN BINOMIO SE PUEDE VER EL SIGUIENTE VIDEO EN LA DIRECCIÓN:
http://matematicasies.com/?Cociente-de-Polinomios-II

Ejercicio 1.4.1
Encuentra el cociente y el residuo en cada una de las siguientes divisiones.

a) $(x^3 - 9x^2 - 7x + 3) \div (x + 2)$ b) $(x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1) \div (x - 1)$

c) $(3x^3 - x^2 + 4x - 5) \div (x + 1)$ d) $(x^5 - 5x^3 + 2x^2 - 8x + 1) \div (x - 3)$

e) $(x^4 + 2x^3 - x^2 + 2) \div (x - 4)$ f) $(x^6 - 3x^4 - x^2 + 5x - 6) \div (x + 5)$

1.4.2) División sintética.

Este método numérico es otra forma de hacer este tipo de divisiones entre polinomios, esta es muy usada para determinar las raíces de un polinomio ya que con esta podemos obtener más información.
Para hacer ver a los alumnos en que consiste este método, se pueden realizar ejercicios similares a los siguientes ejemplos.

Sugerencia: Para mostrar este método se puede utilizar el ejemplo del punto anterior o se deja de ejercicio para el alumno.

Ejemplo 1. Dividir el polinomio Q(x) = $6x - 3 + 5x^3$ entre S(x) = $x - 2$

1º) Se ordenan los términos en forma decreciente con respecto al grado.

$$Q(x) = 5x^3 + 6x - 3$$

2º) Se colocan los coeficientes de Q(x) horizontalmente. Se escribe el número 2 de la expresión lineal $x - 2$ (al principio o al final de la línea). Se traza una recta horizontal debajo de estos números, dejando un renglón:

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 5 & 0 & 6 & -3 \\ & & & & \\ \hline \end{array}$$

3º) Se baja el primer coeficiente que en nuestro caso es 5 y se multiplica por 2, colocando el resultado debajo del siguiente coeficiente.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 5 & 0 & 6 & -3 \\ & & 10 & & \\ \hline & 5 & & & \end{array}$$

4º) Se realiza la suma de 0 + 10 = 10 colocando el resultado debajo de la raya.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 5 & 0 & 6 & -3 \\ & & 10 & & \\ \hline & 5 & 10 & & \end{array}$$

5º) Se repite este proceso, es decir, el 10 se multiplica por 2 y el resultado se coloca debajo del 6, y nuevamente sumamos 6 + 20 = 26.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 5 & 0 & 6 & -3 \\ & & 10 & 20 & \\ \hline & 5 & 10 & 26 & \end{array}$$

6º) El 26 se multiplica por 2 y se coloca debajo de –3, se suman estos dos números y se termina el proceso.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 5 & 0 & 6 & -3 \\ & & 11 & 20 & 52 \\ \hline & 5 & 10 & 26 & 49 \end{array}$$

El último número corresponde al residuo, que es este caso es 49. Y los números restantes son los coeficientes del polinomio Cociente, que es de un grado menor que el polinomio dado y estos coeficientes están en orden decreciente con respecto al grado de x.

Así que el resultado de la división es:

Cociente: $C(x) = 5x^2 + 10x + 26$ y el residuo: $R(x) = 49$.

Ejemplo 2. Dividir el polinomio $R(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7$ entre $S(x) = x + 3$.

Solución: Se procede de forma similar al ejemplo anterior.

1º) Se colocan los coeficientes de x ordenados horizontalmente y se escribe cero para el coeficiente de la potencia faltante. Como se divide entre $x + 3$ escribimos –3.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 1 & 3 & -2 & 0 & 7 \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

2º) Se baja el 1 al tercer renglón

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 1 & 3 & -2 & 0 & 7 \\ & & & & & \\ \hline & 1 & & & & \end{array}$$

3º) Se multiplica por – 3 y se le suma al 3. Y se repite el proceso hasta terminar.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 1 & 3 & -2 & 0 & 7 \\ & & -3 & 0 & 6 & -18 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & 6 & -11 \end{array}$$

El cociente es: $C(x) = x^3 - 2x + 6$ y el residuo es: $R(-3) = -11$

PARA COMPLEMENTAR EL MÉTODO DE LA DIVISIÓN SINTÉTICA SE PUEDE VER UNA PRESENTACIÓN EN LA DIRECCIÓN:
http://www.sectormatematica.cl/regalos2010/divpolin.swf

Ejercicio 1.4.2
Encuentra el cociente y el residuo en cada una de las siguientes divisiones usando división sintética.

a) $(x^3 - 9x^2 - 7x + 3) \div (x + 2)$ b) $(x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1) \div (x - 1)$

c) $(3x^3 - x^2 + 4x - 5) \div (x + 1)$ d) $(x^5 - 5x^3 + 2x^2 - 8x + 1) \div (x - 3)$

e) $(x^4 + 2x^3 - x^2 + 2) \div (x - 4)$ f) $(x^6 - 3x^4 - x^2 + 5x - 6) \div (x + 5)$

1.4.3) Teorema del residuo

Con lo visto anteriormente, es claro que se cumple el Teorema del residuo, este teorema es consecuencia del algoritmo de la división. Este resultado nos será muy útil para encontrar los ceros de las funciones polinomiales.

***Teorema del residuo*:**
"Si un polinomio $p(x)$ se divide entre $x - c$, entonces el residuo es $p(c)$."

Nota: Es recomendable volver a hacer énfasis en que si el residuo es cero, c es una raíz de $p(x)$.

Los siguientes ejercicios muestran la utilidad de este teorema para los propósitos de esta unidad.

Ejemplo 1. Si $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 1$, encontrar $f(5)$. Recuerda que $f(5)$ es el residuo al dividir $f(x)$ entre $x - 5$.

Solución: Hasta el momento se tienen dos formas de hacerlo, una es sustituyendo o evaluando en 5 y la otra es con la división sintética.

1) Por evaluación: $f(5) = 2(5)^4 - 3(5)^3 - 4(5)^2 + 1 = 2(625) - 3(125) - 4(25) + 1 = 776$
2) Con división sintética:

5⌋	2	–3	–4	0	1
		10	35	155	775
	2	7	31	155	776

Residuo = $f(5)$

Ejemplo 2. ¿El – 3 es raíz o cero de $g(x) = -2x^3 + 4x - 3$?

Solución:
Se hace la división de $g(x)$ entre $x + 3$ para encontrar el residuo, si este residuo es cero entonces es raíz.
Utilizando la división sintética se tiene:

– 3⌋	–2	0	4	–3
		6	–18	42
	–2	6	–14	39

Residuo = $g(-3)$

Como el residuo no es cero, entonces –3 no es raíz de $g(x)$.

PARA COMPLEMENTAR LO APRENDIDO EN ESTA PARTE SE PUEDE VER LOS VIDEOS EN LAS SIGUIENTES DIRECCIONES:
http://matematicasies.com/?Polinomios-Teorema-del-Resto,1408

Ejercicios 1.4.3

1) Al dividir F(x) = $x^3 - 7x^2 + 3x - 5$ entre $x - 1$, encontrar el residuo.

2) Al dividir G(x) = $2x^3 + 5x^2 + x - 1$ entre $x - 2$, encontrar el residuo.

3) Al dividir H(x) = $x^4 - 6x^3 + 2x + 4$ entre $x - 3$, encontrar el residuo.

4) Al dividir J(x) = $x^4 + 8x + 7$ entre $x - 4$, encontrar el residuo.

5) Al dividir K(x) = $x^5 - 5x^3 + 2x^2 - 8x + 1$ entre $x - 1$, encontrar el residuo.

6) Si $f(x) = -3x^3 - 4x^2 + 2$, encontrar $f(4)$.

7) Si $g(x) = -2x^4 + x^3 - 3x^2 + 5$, encontrar $g(-3)$.

8) ¿El 5 es un cero de $p(x) = -x^3 + 3x - 2$?

9) ¿El -2 es un cero de $q(x) = -x^4 - 3x^3 + x - 6$?

10) ¿El 3 es un cero de $h(x) = x^5 + 2x^3 - 4x + 2$?

1.4.4) Teorema del factor y su recíproco.

Este teorema está muy relacionado con el teorema del residuo y es fácil de comprobar con el algoritmo de la división.

> ***Teorema del factor y su recíproco*:**
> "Un polinomio $p(x)$ tiene un factor $(x - c)$ si y sólo si $p(c) = 0$"

Este teorema también es equivalente a afirmar que si el residuo es cero, entonces c es una raíz de $p(x)$. Algunos ejemplos que utilizan este teorema son los siguientes.

Ejemplo 1. Aplicar el Teorema del Factor para mostrar que $x - 1$ es un factor de $P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

Solución:
Se efectúa la división sintética para mostrar que $x - 1$ es un factor de $P(x)$

1	1	–5	8	–4
		1	–4	4
	1	–4	4	0

Como el residuo es cero, $x - 1$ es un factor.

Entonces $P(x) = (x-1)(x^2 - 4x + 4)$

$\boxed{P(x) = (x-1)(x-2)(x-2)}$ ⟵ Factorización completa de $P(x)$.

Ejemplo 2. Comprobar que las raíces o ceros de la función polinomial $g(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$ son 0, 2 y –4, y escribir su factorización.

Solución: Una forma de hacerlo es la siguiente, se comprobará que son raíces y al mismo tiempo se irá factorizando.

1º) Como $g(x)$ no tiene término independiente entonces una de sus raíces es cero, esto se puede comprobar muy fácilmente.

Entonces cero es raíz, y $g(x) = x(x^2 + 2x - 8)$.

2º) Si 2 es raíz de $x^2 + 2x - 8$ entonces lo será de $g(x)$, usando la división sintética.

2	1	2	– 8
		2	8
	1	4	0

Esto muestra que 2 es raíz y $g(x) = x(x - 2)(x - 4)$

3º) Este último resultado nos dice que 4 también es raíz, y la factorización completa de la función dada es $g(x) = x(x - 2)(x - 4)$.

PARA COMPLEMENTAR LO APRENDIDO EN ESTA PARTE SE PUEDE VER LOS VIDEOS EN LAS SIGUIENTES DIRECCIONES
http://matematicasies.com/?Raices-y-Factores-de-un-polinomio

Ejercicio 1.4.4

Para cada función polinomial $P(x)$, mostrar que $x - c$ es uno de sus factores para cada valor "c" dado, y factorice por completo a cada $P(x)$.

1) $P(x) = 3x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 2$, para $c = 1$, $c = -2$
2) $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 7x + 6$, para $c = -1$; $c = -3$
3) $P(x) = 6x^4 - 13x^3 + 13x - 6$, para $c = -1$, $c = 1$
4) $P(x) = 3x^3 + x^2 - 8x + 4$, para $c = \frac{2}{3}$
5) $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$, para c = ½
6) $P(x) = 5x^4 - 7x^3 - 28x^2 + 12x$, $c = 2/5$
7) Comprobar que las raíces de la ecuación polinomial $x^3 + 7x^2 + 7x - 15 = 0$ son –3, –5 y 1, y escribir su factorización.

8) Probar que las raíces de la ecuación polinomial $2x^4 + 13x^3 + 13x^2 - 10x = 0$ son –2, –5, 0 y ½ , y escribir su factorización.

9) Escribe la forma desarrollada de $P(x) = (x + 1)^2(x - 3)^2(x + 3)$ y decir cuales son sus cinco ceros.
10) Escribe la forma desarrollada de $P(x) = x(x + 3)^2(x - 1)^3$ y decir cuales son sus seis ceros.

1.4.5) Divisores del término independiente

Si tenemos una función polinomial de la forma $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1x^1 + a_0$, el término independiente es a_0 (una constante) y este puede ser cero o diferente de cero. Es decir, en pocas palabras el término independiente es aquel que no tiene variable.

- Si es cero, la función polinomial es de la forma $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1x$
Que la podemos factorizar como $f(x) = x(a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots + a_1) = (x - 0)\ (a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots + a_1)$
Esto nos dice que una raíz o solución de la ecuación polinomial es 0. Y para encontrar las $n - 1$ que faltan, se tiene que resolver $a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1 = 0$.

- Si no es cero, para encontrar las raíces o ceros de la función polinomial se tiene que utilizar algún método de solución. Ya vimos el método de factorización y dejamos pendiente otros métodos que utilizaran los divisores del término independiente.