UNIDAD 3
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

***Propósito:** Extender el concepto de razones trigonométricas e iniciar el estudio de las funciones trascendentes a través de las funciones circulares, cuya variación periódica permite modelar fenómenos cíclicos muy diversos. Reforzar el análisis de las relaciones entre gráfica y parámetros que se ha venido realizando, resaltando la importancia de ajustar los parámetros para construir el modelo que se ciña a un fenómeno determinado.*

HIPARCO DE NICEA

El estudio de las funciones trigonométricas se remonta a la época de Babilonia, y gran parte de los fundamentos de trigonometría fueron desarrollados por los matemáticos de la Antigua Grecia, de la India y estudiosos musulmanes.

El primer uso de la función **seno** (*sin*(*x*)) aparece en el *Sulba Sutras* escrito en India del siglo VIII al VI a. C. Las funciones trigonométricas fueron estudiadas por Hiparco de Nicea (180-125 a. C.)

Hiparco es el inventor de la trigonometría para cuyo objeto consiste en relacionar las medidas angulares con las lineales. La necesidad de ese tipo de cálculos es muy frecuente en astronomía. Llevó a cabo sus observaciones en Rodas, donde construyó un observatorio, y en Alejandría.

Hiparco construyó una tabla de cuerdas, que equivalía a una moderna tabla de senos. Con la ayuda de dicha tabla, pudo fácilmente relacionar los lados y los ángulos de todo triángulo plano. Ahora bien, los triángulos dibujados sobre la superficie de la esfera celeste no son planos sino esféricos y el estudio de estos constituye la trigonometría esférica.

Entre sus aportaciones cabe destacar: el primer catálogo de estrellas, el descubrimiento de la precesión de los equinoccios, distinción entre año sidéreo y año trópico, mayor precisión en la medida de la distancia Tierra-Luna y de la oblicuidad de la eclíptica, invención de la trigonometría y de los conceptos de longitud y latitud geográficas.

La aparición de una estrella nova, **Nova Scorpii** en el año 134 a. C. y el pretender fijar la posición del equinoccio de primavera sobre el fondo de estrellas influyo en el para la elaboración del primer catálogo de estrellas que contenía la posición en coordenadas eclípticas de 1080 estrellas.

En el campo de la geografía dividió por primera vez el círculo terrestre en 360º, delineó el enrejado de paralelos y meridianos, definió los *climas* como áreas entre paralelos y abordó los problemas de la proyección de la superficie curva de la Tierra en un mapa plano.

Hiparco inventó instrumentos, especialmente un teodolito, para indicar posiciones y magnitudes, de forma que fuese fácil descubrir sí las estrellas morían o nacían, si se movían o si aumentaban o disminuían de brillo. Además clasificó las estrellas en magnitudes según su intensidad o grado de brillo. Su escala de brillos aparentes es la base en la que se fundamenta la actual clasificación fotogramétrica (dimensiones y posición) de los astros.

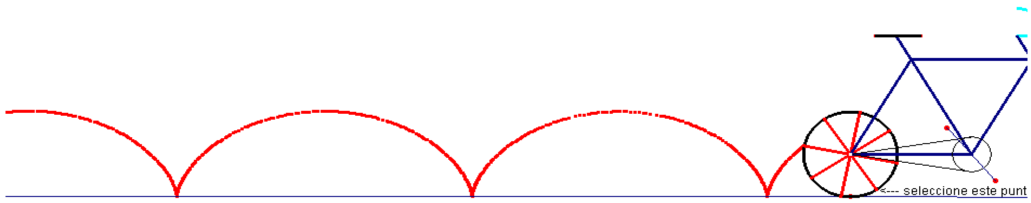
La noción de que debería existir alguna correspondencia estándar entre la longitud de los lados de un triángulo siguió a la idea de que triángulos similares mantienen la misma proporción entre sus lados. Esto es, que para cualquier triángulo semejante, la relación entre la hipotenusa y otro de sus lados es constante. Si la hipotenusa es el doble de larga, así serán los catetos. Justamente estas proporciones son las que expresan las funciones trigonométricas.

3. PRESENTACIÓN

En esta parte es recomendable hacer un resumen de lo ya visto sobre funciones algebraicas del comportamiento de sus gráficas, en las polinomiales como cambia su rango y su gráfica en los extremos con respecto al grado par o impar, así como el número de veces que cruza al eje X o lo toca. En las racionales surgen las asíntotas: verticales, horizontales y oblicuas, y en las radicales (raíz cuadrada) se tienen mitades de: parábolas horizontales, circunferencias, elipses e hipérbolas o dos rectas que se unen en un punto cuando dentro del radical se tiene una parábola con vértice sobre el eje X. También se pueden recordar algunas de sus aplicaciones.

Todo lo anterior para introducir una de las características de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente que forman parte de otro tipo de funciones que son las trascendentes, la periodicidad que es lo que las caracteriza y las hace que tengan una gran utilidad en distintas áreas, como modelos matemáticos que al analizarlos nos describen diferentes fenómenos como son: el día, la noche, las olas del mar, los latidos del corazón, oscilación de péndulos y resortes, ciclos comerciales, movimiento periódico de los planetas, ciclos biológicos, y más fenómenos ondulatorios (la luz, el sonido, la electricidad, el electromagnetismo, los rayos X, temblores, tsunamis o maremotos) etc. Pero hay que dejar claro que no todas las funciones periódicas tienen que ser de este tipo, ya que hay muchísimas funciones periódicas, que no tienen nada de seno ni de coseno.

Por medio de un ejemplo sencillo hacer ver que una función periódica es aquella cuya gráfica se repite a intervalos regulares y esto se debe hacer sin tomar en cuenta conocimientos previos sobre el tema que se elija solamente analizando la trayectoria con respecto al tiempo o al desplazamiento, así que podría ser la trayectoria que sigue el pivote de la llanta de una bicicleta a velocidad constante o el movimiento de un cuerpo en el extremo de un resorte vertical al comprimirlo y soltarlo o el movimiento de un péndulo, la altura que recorre una persona en una rueda de la fortuna al ir dando vueltas, etc.



Al igual que en las unidades anteriores los puntos donde se debe poner atención son: la forma de la gráfica de cada una de estas funciones así como la determinación del dominio y rango, y las asíntotas que aparecen en la función tangente, también en la identificación de la amplitud, periodo y corrimiento de fase tanto en la expresión como en la gráfica para que pueda transitar de una forma a otra en casos sencillos.

A lo largo de la temática se dan sugerencias y se marcan los conceptos en los que hay que tener mayor cuidado.

3.1 SITUACIONES QUE INVOLUCRAN VARIACIÓN PERIÓDICA.

Aprendizajes:

- *Explora, en una situación o fenómeno de variación periódica, valores, condiciones, relaciones o comportamientos, a través de diagramas, tablas, expresiones algebraicas, etc. que le permitan obtener información, como un paso previo al establecimiento de conceptos, y al manejo de las representaciones pertinentes.*

Es recomendable que los ejemplos involucren variación periódica, sin olvidar aquellos que no son de este tipo pero involucran a las funciones trigonométricas y que los alumnos pueden resolver con sus conocimientos previos de otras asignaturas. Por esto se proponen algunos ejercicios que el maestro puede desarrollar en el pizarrón y discutir con los alumnos para ir ampliando sus conocimientos sobre las funciones trigonométricas y sus diversas aplicaciones.

Problema 1) La ecuación $P = 100 + 20 \text{ sen } 2\pi t$ representa la presión sanguínea P de una persona en milímetros de mercurio. En esta ecuación, t es el tiempo en segundos. La presión sanguínea oscila 20 milímetros por arriba y por abajo de 100 milímetros, lo cuál significa que la presión sanguínea de la persona es de 120 sobre 80. Esta función tiene un periodo de 1 segundo, o sea que el corazón de la persona late 60 veces por minuto.

a) Encuentra la presión sanguínea en $t = 0$, $t = 0.25$, $t = 0.5$, $t = 0.75$ y $t = 1$
b) Durante el primer segundo, ¿cuándo estuvo la presión sanguínea en un máximo?
c) Durante el primer segundo, ¿cuándo estuvo la presión sanguínea en un mínimo?

Solución:

a) Sustituyendo los valores de t se realizan los cálculos. (la calculadora en modo de radianes, rad).

$P(0) = 100 + 20\ sen\ (0) = 100$, $P(0.25) = 100 + 20\ sen\ (2\pi(0.25)) = 120$
$P(0.5) = 100 + 20\ sen\ (2\pi\times 0.5) = 100$ $P(0.75) = 100 + sen\ (2\pi\times 0.75) = 80$
$P(1) = 100 + 20\ sen\ (2\pi\times 1) = 100$

b) La presión sanguínea fue máxima en t = 0.25
c) La presión sanguínea fue mínima en t = 0.75

Problema 2) El movimiento de un objeto sobre un resorte vertical, puede describirse mediante una función coseno modificada. El peso suspendido en el resorte está en su punto de equilibrio cuando el resorte esta en reposo. Si se comprime el resorte una cierta distancia sobre el punto de equilibrio y se suelta el peso oscila hacia abajo y hacia arriba del punto de equilibrio. El tiempo que tarda el peso en oscilar desde el punto más alto hasta el punto más bajo y de regreso al punto más alto es su periodo. La ecuación $y = 3.5\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$ describe el desplazamiento vertical del objeto para cualquier tiempo t, al comprimirse 3.5 cm., k es la constante del resorte y m es la masa del objeto.

a) Si k = 19.6 y m = 1.99. Encuentra el desplazamiento vertical después de 0.9 segundos y de 1.7 segundos.
b) ¿Cuándo estará el objeto en el punto de equilibrio por primera vez?
c) ¿Cuánto tardará el peso en completar un periodo?

Solución:

La calculadora debe estar en modo de radianes para resolver este problema.

a) Sustituyendo los valores: $y(0.9) = 3.5\cos\left(0.9\sqrt{\frac{19.6}{1.99}}\right)$ = –3.33 cm

$y(1.7) = 3.5\cos\left(1.7\sqrt{\frac{19.6}{1.99}}\right)$ = 2.04 cm

b) En el punto de equilibrio y = 0, 0 = $3.5\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$,

$\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$= cos^{-1}(0) = 1.5708, t = 1.5708 /3.1384 = 0.5 seg.,

Cuando t = 0.5 segundos esta en el punto de equilibrio.

b) regresa hasta 3.5 cm, y = 3.5 = $3.5\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$, t(3.1383) = cos^{-1}(1) = 2π

t= 2π/3.1384 = 2 segundos

El objeto tarda 2 segundos en bajar y subir, su periodo es 2 segundos.

Problema 3) En la siguiente tabla se tienen las horas de luz del día para los días 20 de cada mes en el D. F.

Mes x	Enero 1	Febrero 2	Marzo 3	Abril 4	Mayo 5	Junio 6

Horas de luz	11.13 h	11.60 h	12.13 h	12.68 h	13.12 h	13.30 h

Mes x	Julio 7	Agosto 8	Septiembre 9	Octubre 10	Noviembre 11	Diciembre 12
Horas de luz y	13.13 h	12.70 h	12.67 h	11.62 h	11.17 h	10.95 h

a) Traza la gráfica de los puntos anteriores
b) Discute con los alumnos si los datos anteriores son válidos para cualquier año. ¿La cantidad de luz del día vuelve a ser la misma cada año?

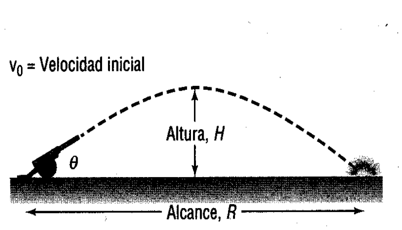
c) Encuentra un modelo que involucre a las funciones seno o coseno para la cantidad de luz del día en el D. F. (**Sugerencia:** se puede continuar la gráfica para x positiva y para x negativa. El periodo es 12 y cumple con $2\pi/b$=P, la amplitud es la mitad de la diferencia entre los valores extremos de y, el desplazamiento vertical es el valor máximo de y menos la amplitud, el corrimiento de fase en la gráfica es $-c/b$).

$$y = a\ sen\ (bx + c) + d \quad \text{o} \quad y = a\ cos\ (bx + c) + d$$

d) Utiliza el modelo para calcular las horas de luz del día en el D. F. el 5 de mayo.

NOTA PARA EL PROFESOR: La siguiente actividad es para que los alumnos la realicen bajo la supervisión del profesor, al igual que los ejercicios que le siguen.

Actividad 1) La trayectoria de un proyectil disparado con una inclinación θ respecto a la horizontal y con una velocidad inicial v_0 es una parábola. Expresa el alcance R del proyectil, es decir, la distancia horizontal que viaja, en función de θ.



Solución.-
En $t = 0$, $x(0) = y(0) =$ _______
La velocidad tiene dos componentes una en _____ y la otra en _______,
$v_{0x} =$ ___________ y $v_{0y} =$ __________
Las ecuaciones de la trayectoria del proyectil son: $x(t) =$ _________= ________________
$y(t) =$ __________ = _______________

Si t_R es el tiempo que tarda el proyectil en recorrer la distancia horizontal R, entonces $y(t_R) =$ ______ y tenemos la ecuación:

$$0 = (v_0\ sen\theta)t_R - (½)g(t_R)^2$$

Despejando a t_R, $t_R =$ ―――――

Sustituyendo en: $x(t_R) = R =$ ________________

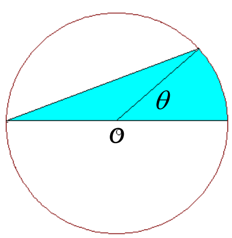
Como $2sen\theta \cdot cos\theta = sen2\theta$, podemos escribir a la distancia horizontal (R) recorrida por el proyectil como una función del ángulo θ: $R(\theta) = \dfrac{v_0^{\ 2}\ sen\,2\theta}{g}$

Ejercicios 3.1.

Ejercicio 1) Expresa la altura máxima H que alcanza el proyectil en función del ángulo de inclinación θ.

Ejercicio 2) Expresa la longitud d de una cuerda de un círculo de radio 6 cm en función del ángulo central θ formado por los radios a los extremos de la cuerda.

Ejercicio 3) La figura muestra un círculo de radio r con centro en O. Encuentra el área A de la región sombreada en función del ángulo central θ.



3.2 GENERALIZACIÓN EN EL PLANO CARTESIANO DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA UN ÁNGULO CUALQUIERA.

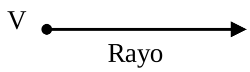
Aprendizajes:

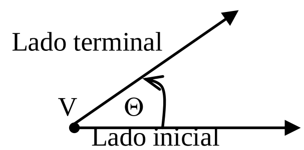
- *Recuerda el significado de las razones trigonométricas para ángulos agudos, en particular, seno, coseno y tangente.*
- *Identifica el ángulo como una rotación de un radio de un círculo. Lado inicial y lado final.*
- *Convierte medidas angulares de grados a radianes y viceversa.*
- *Calcula algunos valores de las razones seno coseno para ángulos no agudos, auxiliándose de ángulos de referencia inscritos en el círculo unitario.*
- *Generaliza el concepto de razón trigonométrica de un ángulo agudo a un ángulo cualquiera.*
- *Expresa las razones trigonométricas como funciones, con los ángulos medidos en radianes.*

A continuación se da un breve repaso sobre los puntos que marca el programa como son, los ángulos positivos y negativos con los cuales el alumno ya esta familiarizado y se sigue con los ángulos de referencia, así como la medida de los ángulos en distintas unidades. En base al círculo unitario se extienden los valores de las funciones trigonométricas para ángulos mayores de 90°, para el mejor desarrollo de estas actividades se deben hacer los esquema sobre hojas de papel milimétrico.

3.2.1 Ángulos positivos y negativos

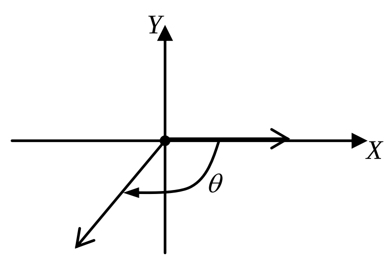
Un ángulo está formado por la rotación de una semirrecta, llamada rayo, alrededor de su extremo.



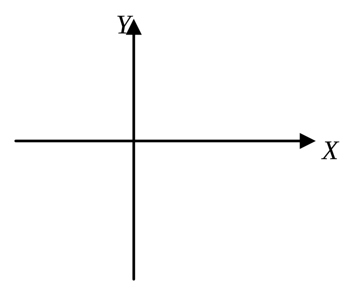


Si la rotación tiene el sentido contrario al de las manecillas del reloj, el ángulo es **positivo**; si la rotación tiene el sentido de las manecillas del reloj, el ángulo es **negativo.** Dibuja un ángulo positivo y otro negativo.

Un ángulo θ se dice que esta en posición estándar si su vértice coincide con el origen de un sistema coordenado rectangular y su lado inicial está sobre la parte positiva del eje X, en la figura se muestra un ángulo negativo en posición estándar dibuja un ángulo positivo en posición estándar.



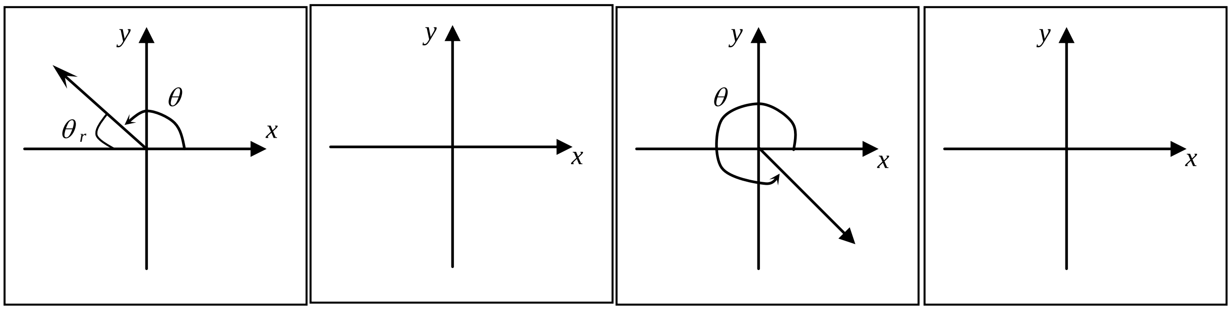
θ negativo en posición estándar



3.2.2 Ángulos de referencia

Un ángulo de referencia es un ángulo agudo (siempre tomado como positivo) que forma el lado terminal del ángulo y el eje horizontal positivo o negativo.

Completa las siguientes figuras, marca los ángulos de referencia para ángulos con lados terminales en cada uno de los cuatro cuadrantes.



La magnitud de un ángulo de referencia se encuentra entre _______ y ________
Encuentra el ángulo de referencia para cada uno de los siguientes ángulos:

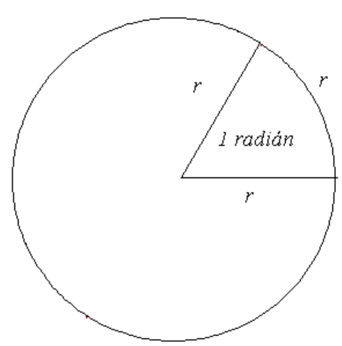
a) 145°, θ_r = ___________ b) – 60°, θ_r = ___________
c) 213°, θ_r = ___________ d) 287°, θ_r = ___________
e) –100°, θ_r = ___________ f) 74°, θ_r = ___________

ANTES DE EMPEZAR ESTA SECCIÓN SE PUEDE RECOMENDAR VER EL SIGUIENTEVIDEO:
http://www.youtube.com/watch?v=rjjAFxHc_0Q&feature=related

3.2.3 Medida de ángulos con distintas unidades

Las unidades más comunes que se usan para medir ángulos son los grados y los radianes. Los grados se basan en la asignación de 360 grados (360°), al ángulo que se forma mediante la rotación completa en sentido contrario a las manecillas del reloj, o sea cuando el lado inicial gira de manera que vuelve a quedar en su posición inicial completa una revolución. Un ángulo de 1° se forma con un giro de 1/360 de una rotación completa (1/360 de revolución).

La medición de un ángulo en radianes se basa en la longitud de un arco de una circunferencia, un radián es el ángulo central subtendido por un arco con una longitud igual a la del radio del círculo



Para un círculo de radio r, un ángulo de θ radianes subtiende un arco cuya longitud s es: $s = r\theta$

Si consideramos un círculo de radio r, un ángulo central de 1 revolución (360°) subtenderá un arco igual a _______________ del círculo. Cómo la circunferencia del

círculo es igual a ___________, usamos s = 2πr y tenemos que para un ángulo θ de una revolución; $2\pi r = r\theta,$ θ =1 revolución = 2π radianes = 360°
Dividimos entre 2, **180° = π radianes**
Con esta relación ya podemos transformar los grados a radianes o viceversa.

1 radián = __________ grados y 1 grado = _________ radianes

PARA UNA MEJOR COMPRENSIÓN DE ESTE TEMA SE PUEDEN CONSULTAR LOS SIGUIENTES VIDEOS:
http://matematicasies.com/?01-Grados-y-radianes
http://www.amschool.edu.sv/paes/t1.htm

Ejercicio 3.2.3.
1) Completa la siguiente tabla:

Grados	30		60	90			150	
Radianes		$\frac{\pi}{4}$			$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$		π
Grados		225		270		315		360
Radianes	$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{11\pi}{6}$	

2) Convierte cada ángulo de grados a radianes (en forma decimal)

a) 17° = _________ b) 73° = __________ c) –51° = ____________
d) 200° = ________ e) –350° = ________ f) 125° = ____________

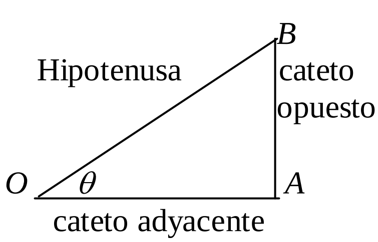
3) Convierte cada ángulo de radianes a grados (en forma decimal)

a) 10.25 rad = ________ b) 3 rad = ________ c) 0.75 rad = __________
d) –2 rad = ___________ e) 2.34 rad =________ f) 6.32 rad = __________

PARA QUE REVISEN LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS RECOMENDAR EL VIDEO:
http://matematicasies.com/?02-Razones-trigonometricas

3.2.4 Cálculo del seno y el coseno para ángulos mayores de 90°

Primero definiremos las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente, como las razones de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo y las abreviaremos como *sen*, *cos*, *tan*, respectivamente.



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

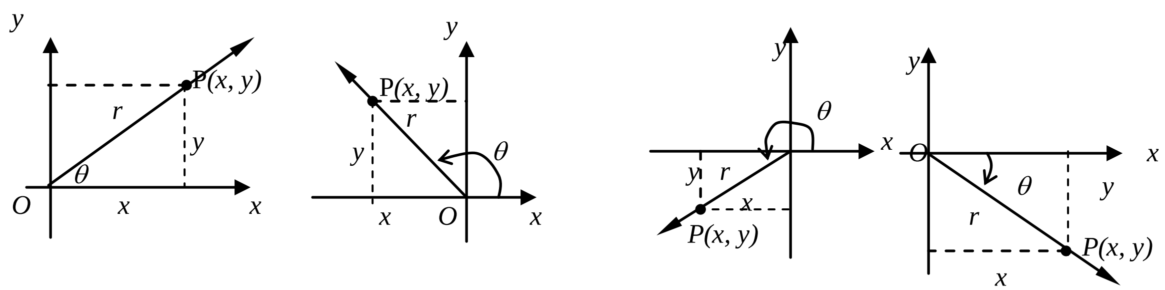
222

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Para definir las funciones trigonométricas para ángulos mayores de 90° se ubica el ángulo en un sistema de coordenadas rectangulares en su posición estándar o normal y se toma un punto P(x, y) en el lado terminal del ángulo diferente del origen, con el ángulo de referencia se forma un triángulo rectángulo de hipotenusa r, igual a la distancia del origen al punto P, entonces las funciones *seno*, *coseno* y *tangente* se pueden definir como:

$$sen\,\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

En las siguientes figuras se muestra la definición para cualquier ángulo θ en posición normal.



Si tenemos las coordenadas del punto P entonces r = ____________
¿Puede r valer cero? ____
Entonces las funciones seno y coseno siempre están ________________ para cualquier ángulo θ, por lo que su dominio es: D = ____________________________
La función tangente tiene como denominador a _____ y la coordenada x es cero cuando el lado terminal del ángulo se encuentra ______________________, entonces su dominio consta de todos los ángulos θ menos {±90°=π/2, ±______=3π/2, ±450°= __π/2, y así sucesivamente}.

Ejercicio) Un punto P(a, b) se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj sobre un círculo unitario, comenzando en (1, 0) recorre una distancia de 29.37 unidades. Explica cómo determinarías las coordenadas del punto P en su posición final, y el cuadrante en el que estará P. Determina el cuadrante y las coordenadas (con 4 decimales), así como el número de vueltas o revoluciones que da el punto.
R: tercer cuadrante, P(–0.4574, –0.8893), 4 vueltas)

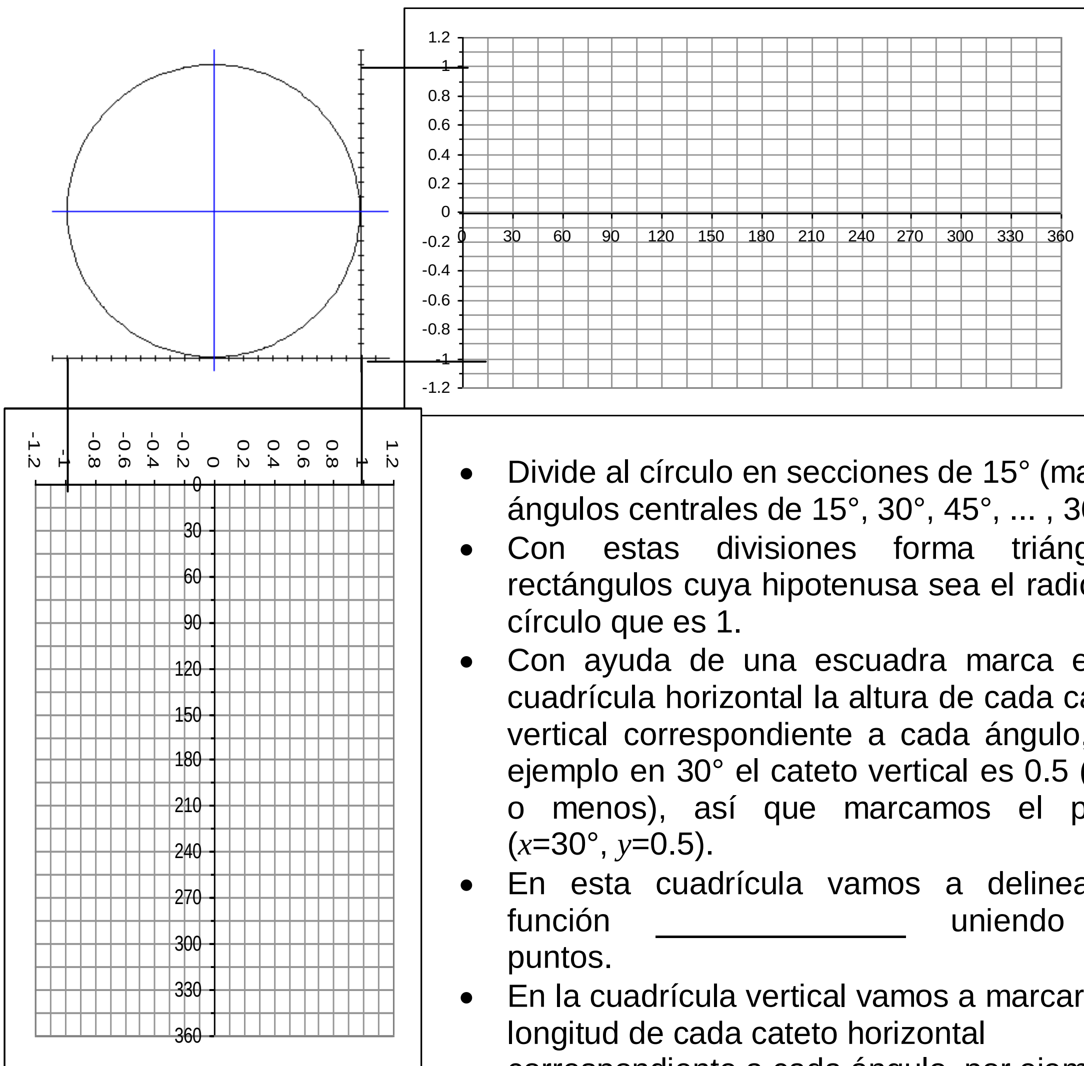
3.2.5 Círculo unitario: extensión de las funciones seno, coseno y tangente para ángulos no agudos.

Al localizar un ángulo en su posición normal y seleccionar el punto P sobre la circunferencia del círculo unitario, r =1, entonces las funciones *seno* y *coseno* se convierten en

$$sen\ \theta = y \qquad cos\ \theta = x$$

Ahora vamos a utilizar un círculo unitario y vamos a variar el valor del ángulo θ para analizar el comportamiento de estas funciones.

A continuación tenemos un círculo unitario, con dos planos uno horizontal y el otro vertical, la escala del círculo y los planos es aproximadamente la misma en el eje Y, y en el je X la escala esta en grados, pero también la puedes expresar en radianes, vas a necesitar tu transportador para marcar los grados y una regla o escuadra; sigue las instrucciones y contesta.



- Divide al círculo en secciones de 15° (marca ángulos centrales de 15°, 30°, 45°, ... , 360°)
- Con estas divisiones forma triángulos rectángulos cuya hipotenusa sea el radio del círculo que es 1.
- Con ayuda de una escuadra marca en la cuadrícula horizontal la altura de cada cateto vertical correspondiente a cada ángulo, por ejemplo en 30° el cateto vertical es 0.5 (mas o menos), así que marcamos el punto (x=30°, y=0.5).
- En esta cuadrícula vamos a delinear la función _______________ uniendo los puntos.
- En la cuadrícula vertical vamos a marcar la longitud de cada cateto horizontal correspondiente a cada ángulo, por ejemplo en 60° el cateto horizontal es 0.5, marcamos el punto (x=60°, y=0.5), así que en esta cuadrícula vamos a delinear la función _______________ uniendo los puntos con una curva suave.

De acuerdo al círculo unitario encuentra el valor del seno y el coseno de los ángulos indicados. (Marca los ángulos con tu transportador)

sen 6° = ________ sen115° = _________ sen 64°= __________

cos 72°= ________ cos 127°= _________ cos 154°= _________

LOS SIGUIENTES VIDEOS SE PUEDEN RECOMENDAR PARA REALIZAR LAS ACTIVIDADES DEL CÍRCULO UNITARIO.
http://www.youtube.com/watch?v=WniEeBmytLo&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=7wi1n_oJIvM&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=-GIo0LEf_Ig&feature=related

Para la función tangente traza un círculo unitario y marca ángulos de 0° a 360° con incrementos de 15° sobre la circunferencia, luego traza las tangentes a la circunferencia en el punto (1,0) y en el punto (–1,0), ahora traza los segmentos que van del origen, pasan por cada punto sobre la circunferencia y se prolongan hasta cortar una de las tangentes a la circunferencia. Para cada triángulo el cateto horizontal siempre mide 1, y el valor de la tangente de cada ángulo es igual a la longitud del segmento que se mide sobre la tangente desde el punto de corte hasta el eje X, y el signo va de acuerdo a los catetos.

¿Qué sucede cuando nos acercamos a 90°? ______________________________
____

¿Qué pasa cuando el ángulo es de 90°? _________________________________

Para ángulos en el primer cuadrante el valor de x es _____________ y el valor de y es __________ por lo que la tangente de estos ángulos es _____________

Cuando pasamos al segundo cuadrante el valor de x es _____________ y el valor de y es positivo, entonces el valor de la tangente de ángulos en este cuadrante es _____________. Para los ángulos del tercer cuadrante la tangente es ____________ y por último para los ángulos del cuarto cuadrante la tangente es ________________.

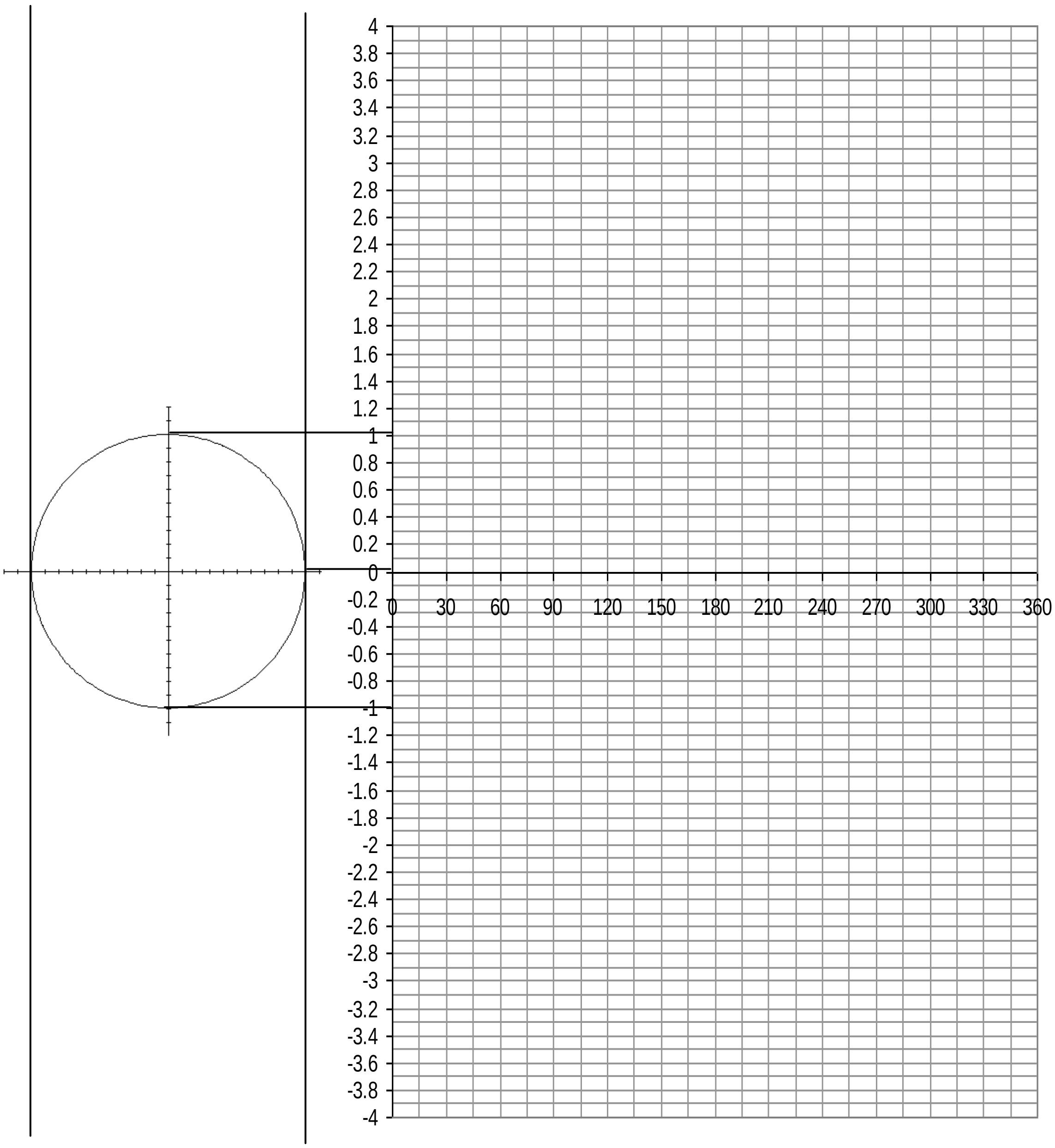
Si unes con una curva suave los puntos marcados sobre el plano tendremos un bosquejo de la función tangente.

En que otros puntos no se puede formar el triángulo rectángulo _______________

¿Qué le sucede a la gráfica de cada una de las funciones anteriores si seguimos dando vueltas? ________________________________

Y si nos vamos en sentido de las manecillas del reloj ¿qué pasa?

____



PARA REPASAR LOS SIGNOS QUE LLEVA CADA FUNCIÓN EN CADA CUADRANTE SE PUEDE DAR LA SIGUIENTE DIRECCIÓN:
http://matematicasies.com/?03-Signo-de-las-razones

En la siguiente sección trazaremos las gráficas de estas funciones con ayuda de la calculadora para hacer un análisis más detallado de sus características como son el dominio, el rango, la existencia de asíntotas, los ceros y la relación entre las funciones. Es conveniente que aunque los ángulos se encuentren en grados también se escriban en términos de π.

Los ejemplos van dirigidos a los alumnos por lo que se pueden trabajar en clase o de tarea, luego hay que hacer una breve discusión para verificar que sus respuestas son correctas y de esta manera avanzar con los ejercicios propuestos.

3.3 GRÁFICA DE LAS FUNCIONES SENO, COSENO Y TANGENTE.

Aprendizajes:

- *Identifica en las funciones del tipo:*

  $f(x) = a \, sen \, (bx + c) + d$ *y* $f(x) = a \cos (bx + c) + d$ $f(x) = a \tan (bx + c) + d$

  La frecuencia, la amplitud, el periodo y el ángulo de defasamiento.

Las funciones trigonométricas son: seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente, las tres ultimas son las reciprocas de las primeras y cada una de estas seis funciones tienen que estar definidas sobre una variable a la que le llamaremos argumento, por ejemplo seno de x ($sen\ x$), coseno de x ($\cos x$) o también le podemos poner letras griegas, seno de θ ($sen\ \theta$), y la variable θ es la que nos define el dominio de cada una de estas funciones. Aquí solamente se analizan las tres primeras.

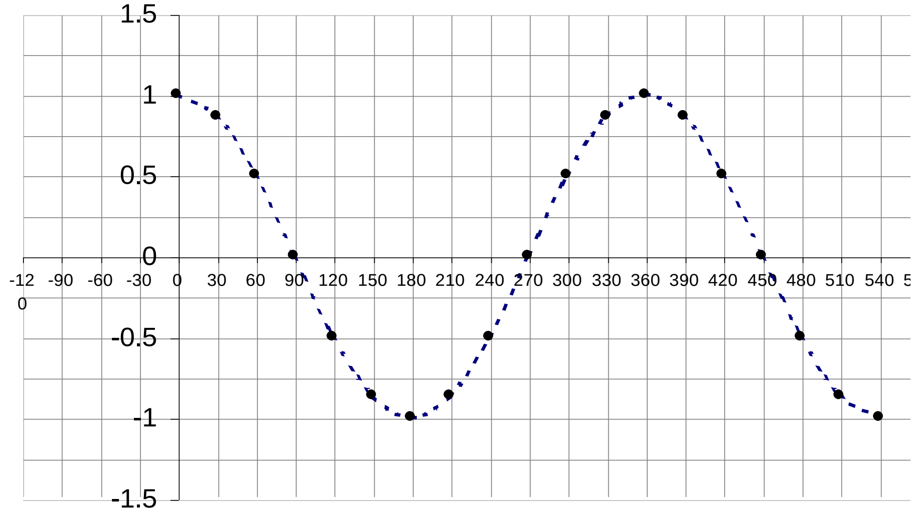
3.3.1 Gráfica de la función coseno de x ($\cos x$)

Empecemos por trazar la gráfica de la función coseno de x que se simboliza como $\cos x$, x es el argumento de la función. El dominio de esta función son todos los valores que puede tomar x, démosle valores en grados, pero recordando que estos grados se pueden transformar a radianes y estos son números reales.

Como ya vimos los grados son positivos si se miden en sentido contrario a las manecillas del reloj y negativos si se miden en el mismo sentido, con ayuda de tu calculadora evaluemos algunos valores de x en grados para delinear a esta función, también puedes darle valores en radianes usando el modo en radianes, trata de reproducir los valores que se encuentran en la siguiente tabla completándola y traza la gráfica.

NOTA PARA EL PROFESOR: Al evaluar la función hay que verificar que realmente los alumnos tengan su calculadora en el modo adecuado, en este caso en grados (Deg). Los ejemplos son para que los alumnos trabajen en clase, pero se deben dirigir y al final sacar conclusiones para que el grupo avance.

x (grados)	$f(x)=cos x$
–90	
–60	
–30	
0	1
30	0.866
60	
90	0
120	
150	–0.866
180	–1
210	
240	–0.5
270	
300	0.5
330	0.866
360	
390	0.866
420	
450	0
480	
510	–0.866
540	



Como puedes observar al marcar la gráfica si sigues aumentando el valor del ángulo la curva se va repitiendo y si le das valores negativos, los valores de la función se van repitiendo, o sea que su gráfica es como una onda que se extiende desde menos infinito hasta infinito, repitiéndose la curva cada _______, esta es la razón por la cual se dice que es **periódica** y su período es de 360°, que en términos de π equivale a 2π. ¿Cuál es el dominio de la función?

D= ___________________________________

También podrás observar que los valores que toma la función no pasan de 1 ni bajan de –1, oscila entre estos valores, por lo tanto el rango de esta función es:

R = _________________________________

Además cruza al eje X en: ______________________________________

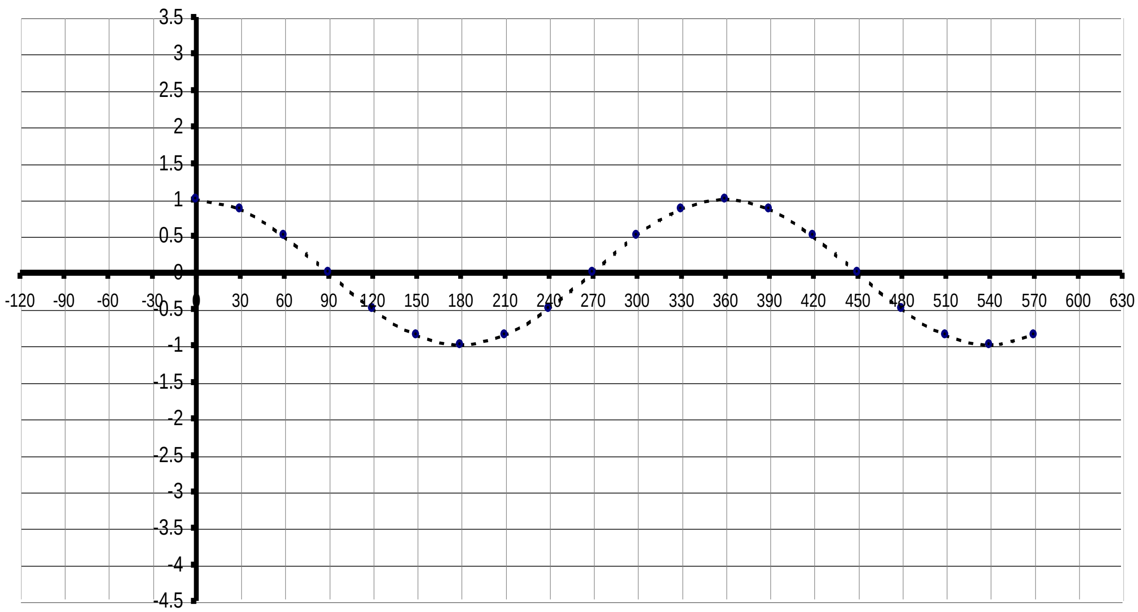
Ahora repetiremos el procedimiento con las funciones vistas en las unidades anteriores, primero veamos que pasa si le sumamos o restamos una cantidad determinada a la función.

Ejemplo 1) Traza la gráfica de las siguientes funciones y encuentra su dominio y rango:

a) $f(x) = cos\,x + 2$ b) $g(x) = cos\,x - 3$

Solución: Completa la siguiente tabla en base a la tabla que ya hiciste para la función $cos\,x$ y localiza los puntos en el plano (traza la gráfica de cada una de las funciones)

x (grados)	$f(x)=$ $\cos x + 2$	$g(x)=$ $\cos x - 3$
–90		
–60		
–30		
0	3	–2
30		
60		
90	2	–3
120		
150		
180	1	–4
210		
240		
270	2	–3
300		
330		
360	3	–2
390		
420		
450	2	–3
480		
510		
540		



Si observas las dos gráficas y las comparas con la original notaras que lo único que paso es que una subió dos unidades y la otra bajo tres unidades, así que el dominio y el rango para cada una de ellas es:

a) $f(x) = \cos x + 2$, D= ____________________ R = ___________________

b) $g(x) = \cos x - 3$, D = ____________________ R = ___________________

Y ambas funciones se siguen repitiendo cada ________, o sea que su periodo es: P = _______.
¿Qué puedes concluir de lo anterior? _________________________________

____

____

____

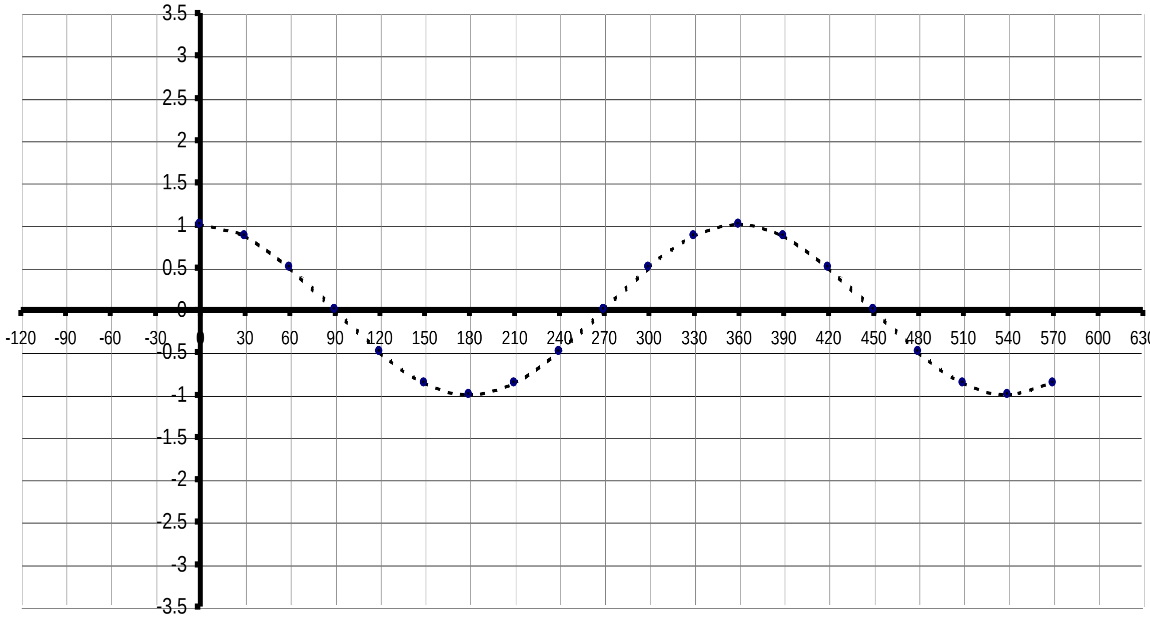
Estas funciones no cruzan el eje X por lo tanto no tienen **ceros,** ¿hasta qué cantidad se le tendría que sumar o restar para que cruzaran o tocaran al eje X? _____________________________________

Ejemplo 2) Ahora vamos a multiplicar por una cantidad, traza las gráficas de las siguientes funciones:

a) $F(x) = 2 \cos x$ b) $G(x) = ½ \cos x$ c) $H(x) = 3 \cos x$

Solución: Completa la tabla y traza las respectivas gráficas en el plano.

x	F(x)=2$\cos x$	G(x)=½ $\cos x$	H(x)=3 $\cos x$
–90			0
–60			
–30			
0	2	0.5	3
30	1.7320		
60	1	0.25	
90			0
120		–0.25	
150	–1.7320		
180	–2		–3
210			
240	–1	–0.25	–1.5
270	0		
300			1.5
330	1.7320		
360	2	0.5	3
390	1.7320		
420			
450	0	0	0
480	–1		
510			
540	–2	–0.5	–3
570			–2.598



Puedes observar que para las tres funciones su periodo sigue siendo
P = ________, o sea que se repite cada 360°; su dominio es el mismo también

D = ____________________________________

Pero el rango cambia para cada una de ellas ahora es:

R_F = _________________________________

R_G = _________________________________

R_H = _________________________________

Cruzan al eje *X* en: ____

A la cantidad por la cual multiplicamos a la función le vamos a llamar **amplitud** y lo que hace esta cantidad es: _______________________________

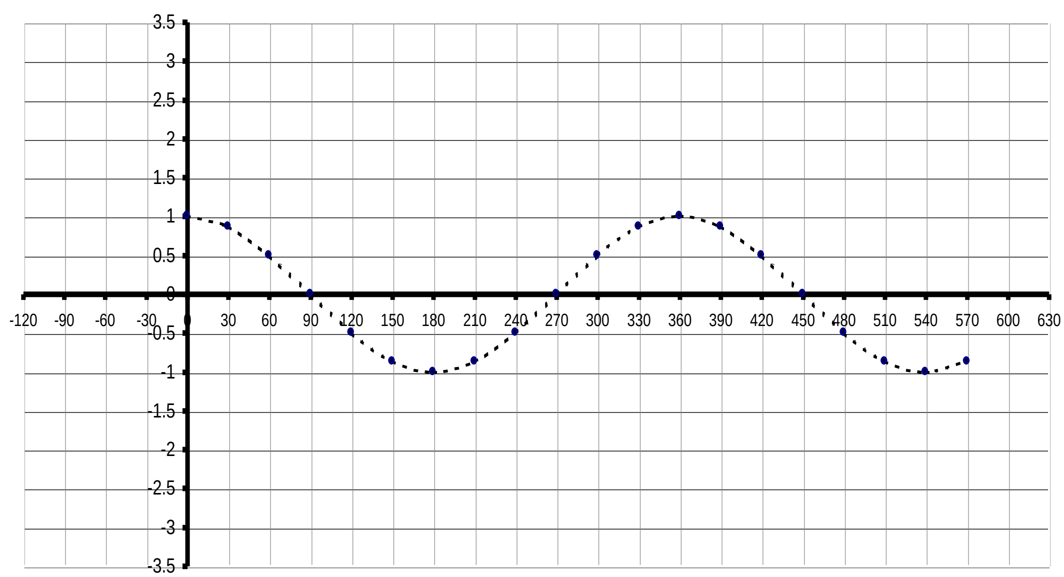
Ahora vamos a ver que pasa si esta cantidad es negativa.

Ejemplo 3) Traza las gráficas de las siguientes funciones y analízalas:

a) $g(x) = -\cos x$ b) $h(x) = -\frac{1}{2}\cos x$ c) $j(x) = -3\cos x$

Solución: Completa la tabla

x (*grados*)	*G*(*x*)= –*cos x*	*h*(*x*)= –½ *cos x*	*j*(*x*)= –3 *cos x*	*x* (*grados*)	*G*(*x*)= –*cos x*	*h*(*x*)= –½ *cos x*	*j*(*x*)= –3 *cos x*
-90			0	270	0		
-60				300			–1.5
-30				330	–1.7320		
0	–2	–0.5	–3	360	–2	–0.5	–3
30	–1.7320			390	1.7320		
60	–1	–0.25		420			
90			0	450	0	0	0
120		0.25		480	1		
150	1.7320			510			
180	2		3	540	2	0.5	3
210				570			2.598
240	1	0.25	1.5				



Ahora la parte positiva se convierte en negativa y la negativa se convierte en positiva, al multiplicar la función por un número negativo la gráfica se ______________________________

Los ceros de la función no cambian ya que siguen cruzando al eje *X* en 90° + n180° con n = ±1, ±2, ...

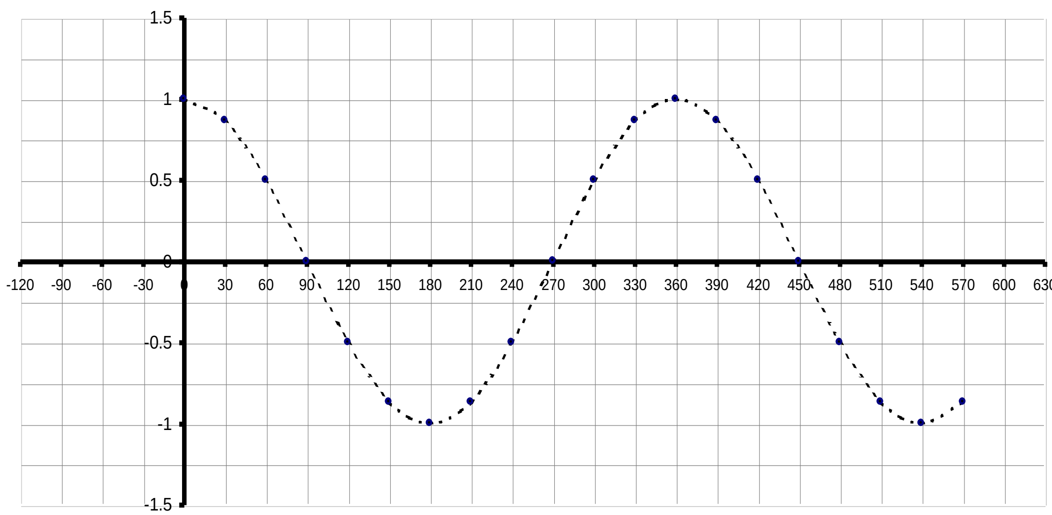
El dominio es el mismo para las tres funciones: D = ____________________
Y el intervalo del rango se hace más ancho o más angosto según sea la magnitud de la amplitud:

R_g = ____________________________
R_h = ____________________________
R_j = ____________________________

Cuándo le agregamos o restamos un valor a x, ¿Crees saber que es lo que pasará? Si no es así haz la siguiente tabla y traza la gráfica.

Ejemplo 4) A la función $\cos x$, al valor de x vamos a sumarle y restarle 30°, vamos analizar las funciones: $F(x) = \cos(x + 30°)$ y $G(x) = \cos(x - 30°)$
Solución: Completa la tabla y traza las gráficas.

X	$\cos x$	$F(x) = \cos(x + 30°)$	$G(x) = \cos(x - 30°)$	x	$\cos x$	$F(x) = \cos(x + 30°)$	$G(x) = \cos(x - 30°)$
–90	0			210		–0.5	–1
–60				240	–0.5		
–30		1	0.5	270	0	0.5	–0.5
0	1	0.8660	0.866	300			0
30	0.8660		1	330	0.8660	1	
60		0		360	1		0.8660
90	0		0.5	390		0.5	1
120	–0.5	–0.8660	0	420	0.5	0	
150				450	0		0.5
180	–1	-0.8660	–0.8660	480		-0.8660	0



Su dominio y su rango siguen siendo los mismos que la función ________

Y cuando le aumentamos 30° la gráfica se recorre ________________________

Cuando le restamos 30° la gráfica se recorre ____________________________

¿Cambia su periodo? _______, P = ________, su amplitud A = ________. ¿Qué podemos concluir? ____

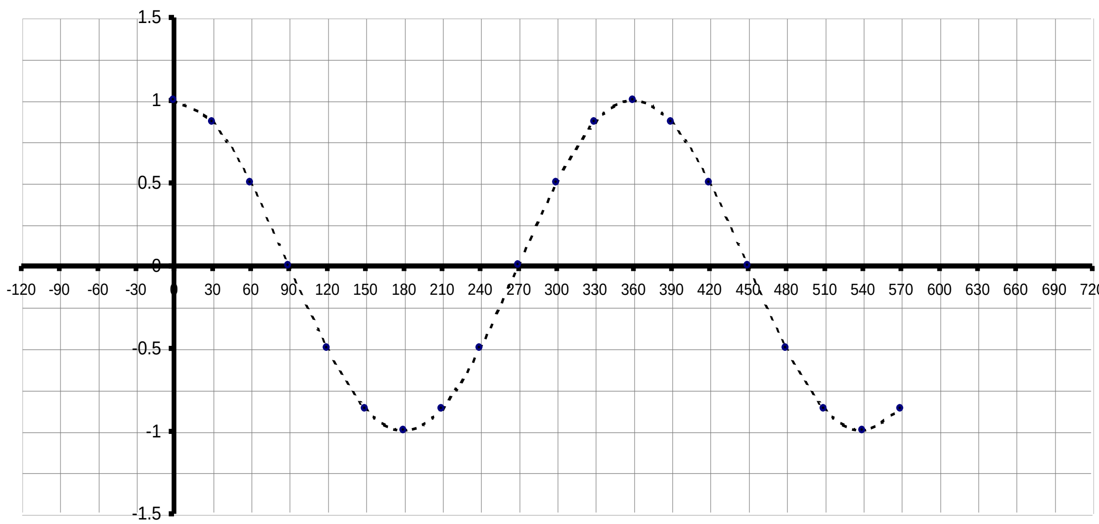
____

Ejemplo 5) Si consideramos una función del tipo $f(x) = \cos(bx)$, que efecto produce el parámetro b en la función, para ver esto; analiza las siguientes funciones:

a) $f(x) = \cos 2x$ b) $g(x) = \cos 3x$ c) $h(x) = \cos(0.5\,x)$

Solución: Completa la tabla y traza la gráfica

x	$\cos x$	$f(x) = \cos 2x$	$g(x) = \cos 3x$	$h(x) = \cos(0.5\,x)$	x	$\cos x$	$f(x) = \cos 2x$	$g(x) = \cos 3x$	$h(x) = \cos(0.5\,x)$
–90					270	0	–1	0	–0.7071
–60					300	0.5	–0.5	–1	
–30					330				
0	1	1	1	1	360	1	1		–1
30	0.8660	0.5		0.9659	390		0.5	0	–0.9659
60	0.5		–1		420	0.5			–0.8660
90	0	–1		0.7071	450	0	–1	0	
120	–0.5		1	0.5	480		–0.5	1	–0.5
150	–0.8660	0.5			510	–0.8660			–0.2588
180	–1	1	–1	0	540	–1	1		
210	–0.8660			–0.2588	570		0.5		0.2588
240	–0.5	–0.5		–0.5	600				



Su dominio es, todos los números reales y los valores que toman las funciones están entre la franja desde –1 hasta 1 así que su rango no cambia y es el intervalo ____________

Si te das cuenta entre 0° y 360° la función $f(x) = \cos 2x$ se duplica o sea que la "uve" se repite dos veces esto quiere decir que su periodo ahora es:
P = ____ = 360°/2; para $g(x) = \cos 3x$ la "uve" se repite cada _______ así que su periodo es P = ________; mientras que para $h(x) = \cos(0.5\,x)$ la "uve" se repite cada _______, por lo que su periodo es P = ______= ________. Con esto podemos afirmar lo siguiente:

Si consideramos la función *cos(bx)*, su gráfica modifica el periodo, de manera que P = ________. O sea que entre 0° y 360° la "uve" se repite *b* veces.

Cambiaron los ceros de cada una de las funciones ________. Enuméralos:

a) ____

b) ____

c) ____

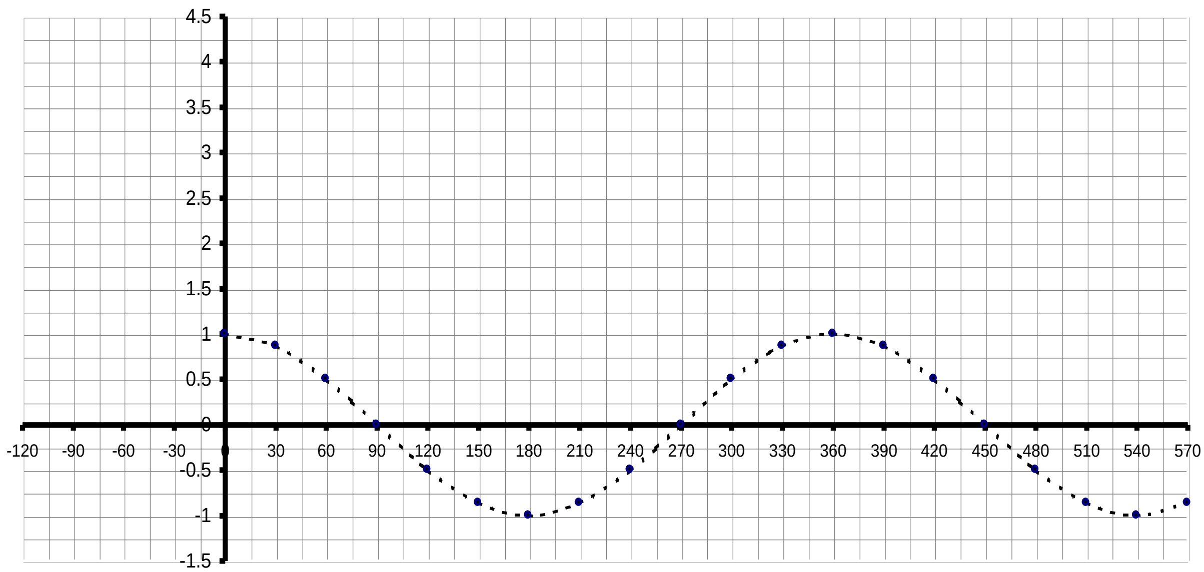
Ejemplo 6) Analiza la función G(x) = – *cos*2x + 3 y traza su gráfica.

Solución: El 2 que multiplica la x cambia su periodo, ahora se repite 2 veces entre 0° y 360°, así que tiene un periodo de: P = _________

El signo menos que multiplica el coseno invierta la gráfica sobre el eje ______, por lo que la "uve" se voltea, el 3 que le sumamos a la función coseno sube 3 unidades la gráfica, cuando x= 0, G(0) = –1 + 3 = 2, ahora a la mitad del periodo x=90°, la función ***cos x*** valdría –1, pero como se invierte es 1 y además le sumamos 3 nos queda G(90°) = 1+3=4; donde termina la "uve" x= 180° en la función ***cos x*** sería 1 pero la invertimos así que es –1 y le sumamos 3 nos queda G(180°) = –1+3= 2 con esto ya la podemos delinear y dar el dominio.

D = _________________________ y el rango, **R =** ________________________

Así que en base a la función ***cos x*** delinea a G(x).



G(x) tiene ceros _________, ya que ______________________________, y su amplitud es _________.

NOTA PARA EL PROFESOR: Hay que hacer énfasis en los cambios que sufre la gráfica al variar los parámetros en cada uno de los ejemplos. También hay que verificar que es una función par.

Ejercicios 3.3.1) Analiza las siguientes funciones en base a la función ***cos x*** y traza sus gráficas:

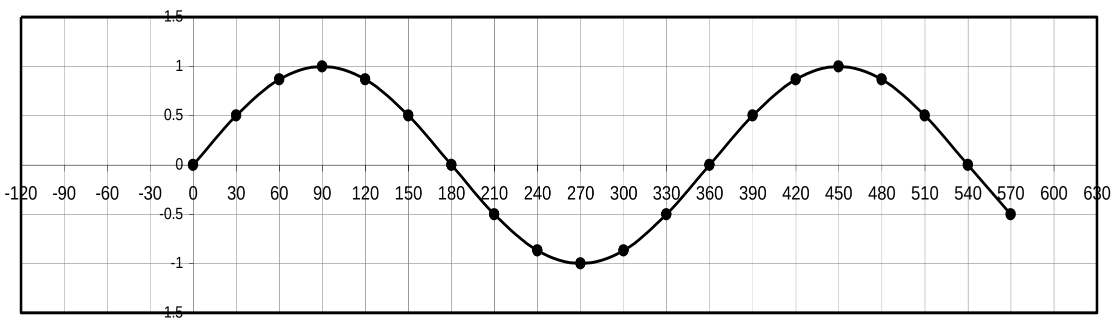
1) $F(x) = 4\cos x$ 2) $G(x) = 5\cos x - 2$ 3) $H(x) = -\cos x + 1$
4) $I(x) = \cos(x + \pi/6)$ 5) $K(x) = -\cos(x - 40°)$ 6) $M(x) = -3\cos x$
7) $N(x) = 2\cos \pi x - 4$ 8) $T(x) = 6\cos(75° - x)$

3.3.2 Gráfica de la función seno de *x* (*sen x*)

Nuevamente vamos a darle valores a *x* en grados y apliquemos la función seno, completa la tabla verificando los valores que se dan y recuerda el modo en que debe estar tu calculadora es en grados (Deg o D):

x	*f*(*x*)=*sen x*	*x*	*f*(*x*)=*sen x*
-90		270	–1
-60		300	
-30		330	–0.5
0	0	360	
30	0.5	390	0.5
60	0.8660	420	0.866
90	1	450	1
120		480	
150		510	
180	0	540	0
210		570	
240	–0.8660	600	

$f(x) = sen\ x$



¿Cuál es el dominio de la función? D = ___________________________________

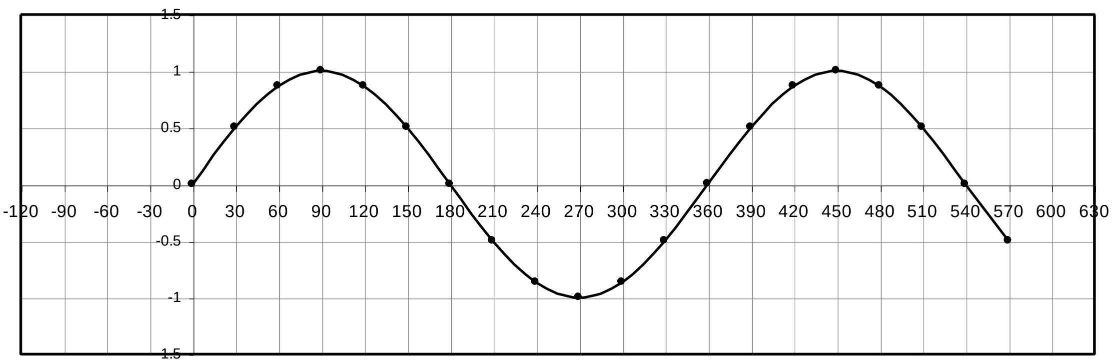
El rango de la función es, R = _____________________________________

La forma de esta función ahora es una onda que empieza en 0° y termina en 360° y vuelve a repetirse hacia delante, en los negativos, empieza en –360° y termina en 0° así que podemos decir que es simétrica con respecto al origen. La gráfica se repite cada

_________ por lo que su periodo es P = _____ = ______. Enumera los ceros de esta

función: ......, -180°, ______, ______, ______, ... a partir de 0° cada ______.

Si sobre esta gráfica trazas la función $g(x) = cos\ x$



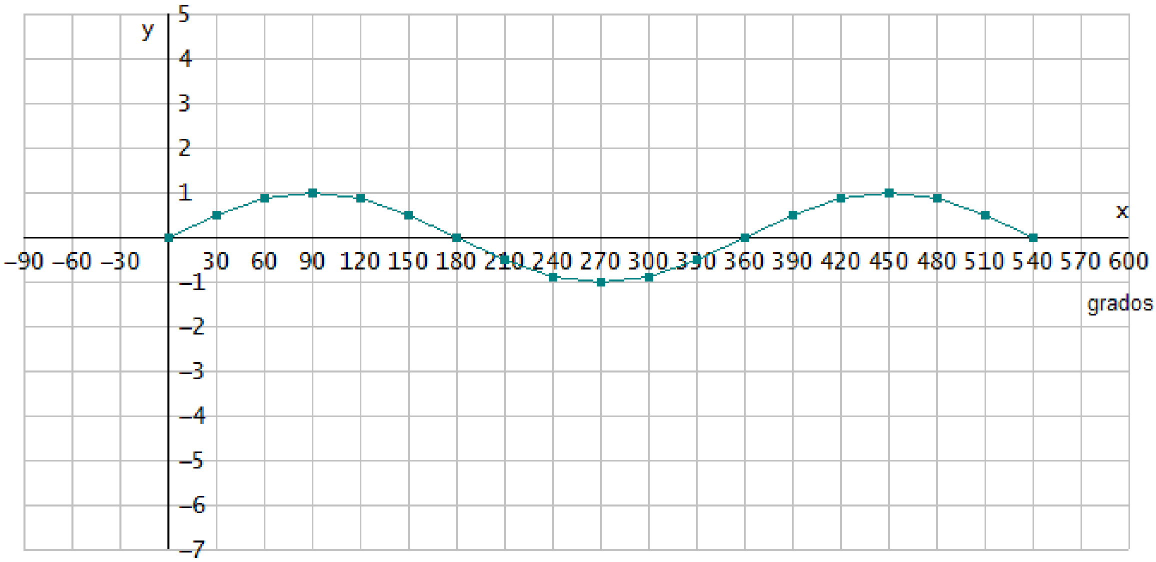
Si te das cuenta es como si recorrieras hacia la derecha 90° la función $cos\ x$, o sea que $sen\ x$ = __________, así que las dos funciones se comportan de manera similar su dominio son todos los números reales y su rango va desde –1 hasta 1 y cada 360° se repiten. Ahora vamos hacer lo mismo que hicimos con la función coseno, solamente que sin hacer las tablas, solamente comprueba para algunos valores.

Ejemplo1) Analiza cada una de las siguientes funciones y traza su gráfica:

a) $f(x) = sen\ x - 5$ b) $g(x) = sen\ x + 3$

Solución: En el inciso **a)** primero le damos un valor a x en grados, luego le aplicamos la función *seno* y al resultado le restamos 5 unidades. Si recuerdas cuando hicimos esto con la función *coseno* de x, simplemente se recorrió sobre el eje Y, (bajo), para hacer la gráfica de la función $f(x) = sen\ x - 5$, baja 5 unidades la gráfica de la función *sen* x que se muestra en la figura.

En el inciso **b)** la gráfica de la función *sen* x se desplaza 3 unidades hacia arriba, al subir cada punto 3 unidades se tiene la gráfica de $g(x) = sen\ x + 3$.



El dominio es D_f = ______________________ y el rango, R = __________________

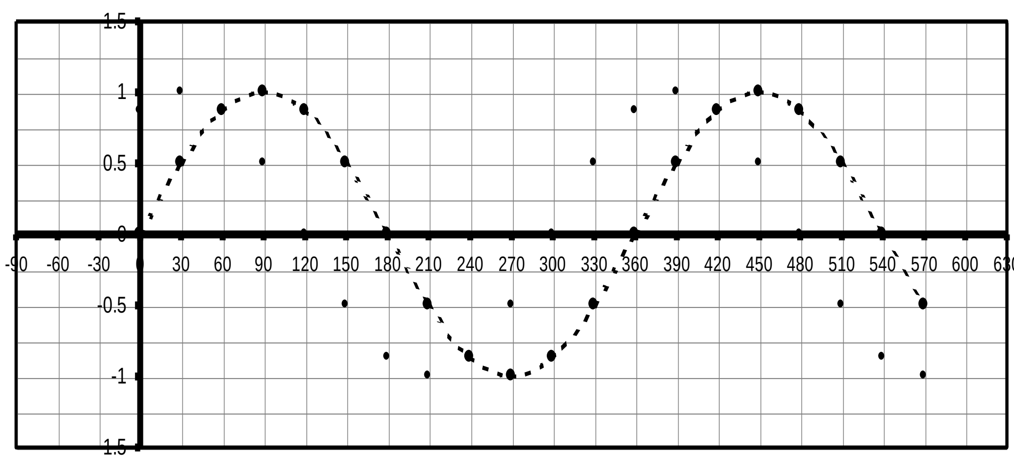
D_g = _______________________y su rango, R = ________________

Su periodo es P = ________ y su amplitud A = ________.

Los ceros de la función son: _________________________________

Así que si a la función **sen x** *le sumamos o le restamos una cantidad dada, la gráfica se desplaza sobre el eje ____, ya sea ____________ o hacia ________*

Ejemplo 2) Analiza la función h(x) = *sen* (x + 60°) y traza su gráfica.
Solución: ¿Crees saber como es la gráfica? Lo que sucedía con la función *coseno* era que se recorría sobre el eje X, así que dale valores a x y evalúa la función *sen* (x + 60°) y confirma que lo que tienes que hacer es recorrer cada punto de la gráfica original 60° hacia la izquierda



El dominio y el rango de esta función son:
D = ________________________, R = ________________________

El periodo es P = _______, tiene una amplitud A = ________

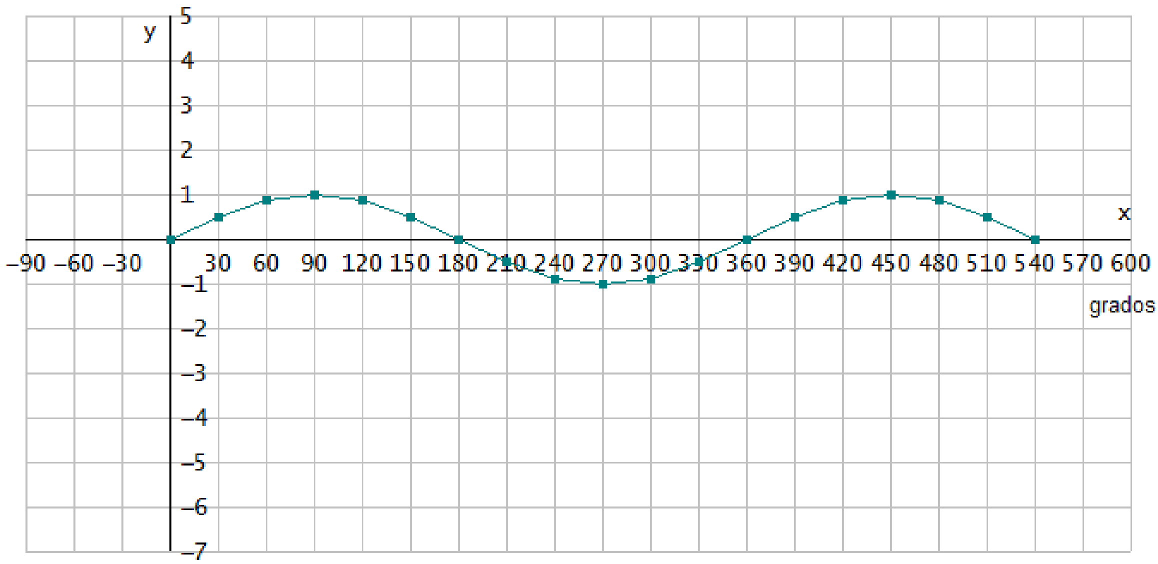
Enumera los ceros de la función: ____________________________________

*Si a x le aumentamos o restamos cierta cantidad y luego aplicamos la función **seno**, la gráfica se desplaza sobre el eje _______, ya sea a la __________ o a la ____________ respectivamente.*

Ejemplo 3) Analiza y traza la gráfica de cada una de las funciones:
a) $F(x) = -4\,sen\,x$ b) $G(x) = 3\,sen\,x$

Solución: Para el inciso a) la función esta multiplicada por –4, así que el menos la invierte sobre el eje ______ y el 4 cambia su amplitud que ahora es de A= ______
Así que su dominio es. D = _______________________, y como la amplitud es 4, el ancho del rango se hace más grande, R = ____________________, su periodo es P = ______; con esto ya la puedes delinear comprobando para algunos valores.
Para el inciso b) la función esta multiplicada por 3 positivo así que queda de la misma forma que la original, solamente cambia su amplitud que ahora es A = ____
Su dominio es D = _________________________ y R = ____________________
P = ________, comprueba con algunos valores.

Los ceros de estas dos funciones son: ______________________________
____

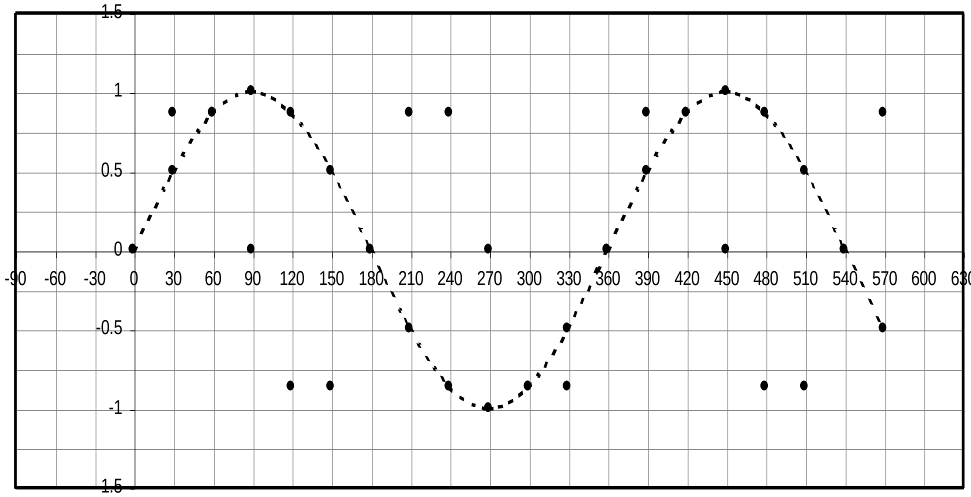


*Cuando a la función seno la multiplicamos por una cantidad determinada **a** lo que sucede es que cambia su ____________ y si esta cantidad es negativa la invierte sobre el eje _______.*

Ejemplo 4) Traza la gráfica de cada una de las siguientes funciones y analízalas:
a) $M(x) = sen\,2x$ b) $P(x) = sen\,3x$

Solución: Como en la primera función se multiplica a x por 2 y en la segunda por 3, el periodo cambia, como en la función *coseno* y para la función en a) se repite dos veces

en el intervalo de 0° a 360° y 3 veces en el inciso b), en el primer caso su periodo es P = _______ y en el segundo caso P = ______
Comprueba con algunos valores.



Los ceros de cada una de las funciones son:

Si a x la multiplicamos por un número b y luego aplicamos la función *seno*, la gráfica se va a repetir b veces en el intervalo de 0° a 360°, o sea que su periodo ahora es P = ________, su dominio son todos los números ___________ y su rango va desde _____ hasta ______.

OBSERVACIÓN: Al igual que en el caso anterior se recomienda analizar los cambios que resultan al colocar el signo negativo ya sea a la función seno o a la variable x, para que quede claro como se invierte la función con respecto a los ejes coordenados y se vea que es una función impar.

Ejercicios 3.3.2) Analiza cada una de las siguientes funciones y traza su gráfica:

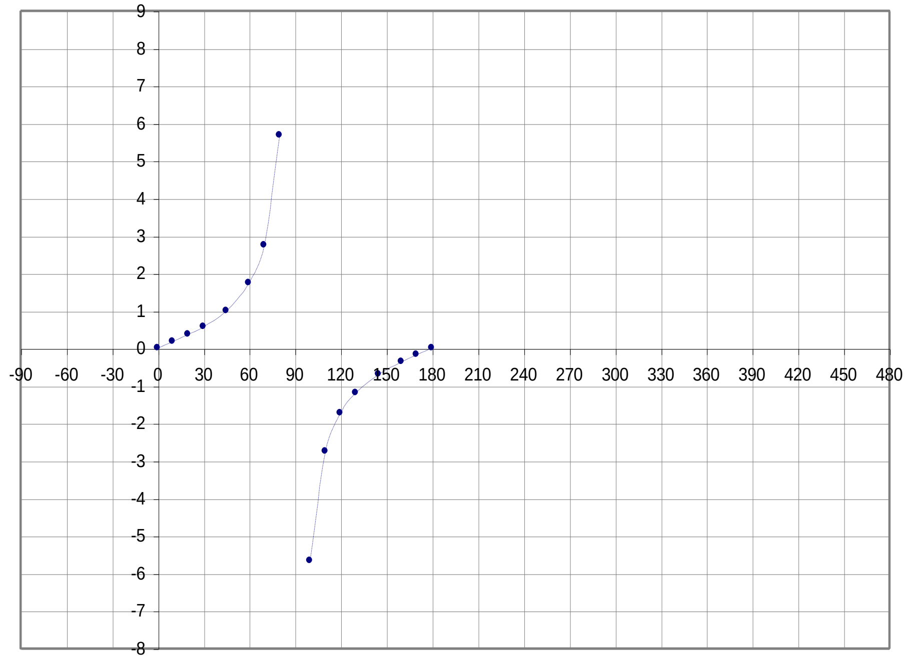
1) $P(x) = sen\ x - 2$
2) $Q(x) = -\ sen\ x + 4$
3) $R(x) = -sen\ 3x + 2$
4) $S(x) = 5\ sen\ x$
5) $T(x) = sen\ (x + \pi/4)$
6) $U(x) = sen\ \pi x$
7) $L(x) = 4sen\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 3$
8) $W(x) = 3\ sen\ 2x - 5$

NOTA PARA EL PROFESOR: Hay que hacer notar como están relacionadas las dos funciones anteriores (***sen x*** y ***cos x***) para que los alumnos puedan expresar a una en términos de la otra.

3.3.3 Gráfica de la función tangente de x ($\tan x$)

Ahora analicemos la función tangente de la misma manera que las anteriores con ayuda de tu calculadora completa la siguiente tabla y marca los puntos en el plano. (Puedes darle más valores para delinearla mejor)

x	*f*(*x*)= *tan x*	*x*	*f*(*x*)= *tan x*
-90		135	–1
-80		150	
-60		180	0
-45	–1	210	
-30		225	1
0		240	
30		260	5.67
45		270	
60		300	–1.73
80		315	–1
90		330	
120		360	0



Como te habrás dado cuenta tu calculadora marca error cuando queremos sacar tangente de 90° y para los múltiplos de este valor como son: _____, _____ y ______; ¿por qué crees que marque error?________________________

____

El dominio de la función *tangente* es el conjunto de todos los números reales, excepto los múltiplos impares de _______, ________(90°), mientras que su rango es: ____________________________________.

Esta función es simétrica con respecto _____________, por lo que es una función impar.

Cuando nos acercamos a 90° por la derecha por ejemplo 88°, 89° la función se extiende hacia arriba y cuando nos acercamos por la izquierda por ejemplo 92°, 91°, la

función ________________________ por lo que podemos decir que la recta $x = 90°$ ($x = \pi/2$) es una asíntota vertical. Enumera las demás asíntotas verticales:
____

¿Es periódica esta función? ________, se repite cada _________, así que su periodo es P = ______= _____
En cuanto a su forma empieza en 0 y en 45° vale 1 y se extiende hacia arriba pegándose por la derecha a la asíntota $x=\pi/2$, después se extiende hacia abajo ahora pegándose por la izquierda a la asíntota y volviendo a llegar a cero cuando $x = 180°$ ($x=\pi$) y se vuelve a repetir, así que las asíntotas están separadas _____ o π radianes.
¿Cuáles son los ceros de la función $tan\ x$? ____________________________

Veamos otros ejemplos para que te quede claro lo que le sucede a esta función al realizarle los diferentes cambios que ya hicimos con las funciones ***seno*** y ***coseno***.

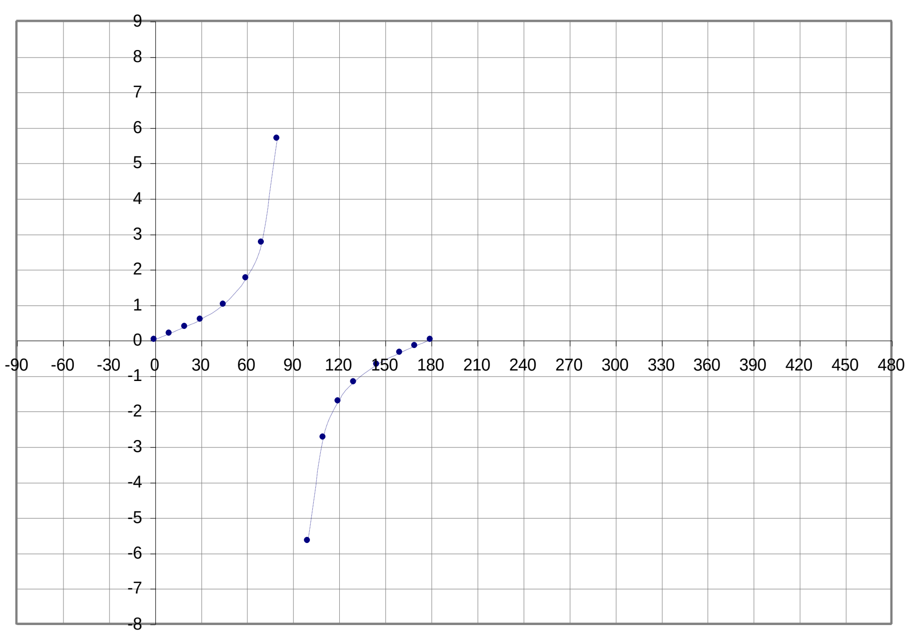
Ejemplo 1) Analiza las funciones y traza su respectiva gráfica,

a) $f(x) = tan\ x + 3$ b) $g(x) = tan\ x - 2$

Solución: Las asíntotas son las mismas ya que no se modifica el argumento así que marcamos las asíntotas sobre el plano; como a la función a) se le está sumando 3 unidades y a la b) restando 2 unidades la gráfica se va a desplazar sobre el eje Y en el inciso a) sube 3 y en el inciso b) baja 2, con respecto a la original se sube el eje X 3 unidades o lo bajamos 2 unidades y reproducimos la gráfica, en el plano que se muestra solamente trazamos un ciclo de la original, así que puedes trazar más ciclos.

El dominio y el rango de las funciones es:
D_f = ________________________________, R_f = ___________________
D_g = ________________________________, R_g = ___________________

Las asíntotas son: ____



Los ceros de la función f los podemos encontrar igualándola a cero y encontrando las raíces de esta ecuación:

$tan\ x + 3 = 0$, $tan\ x = -3$, aplicando la función inversa tan^{-1}, tenemos que x es igual a $x = tan^{-1}(-3)$, la calculadora debe estar en modo grados (deg o D), así que $x = -71.565°$ y cada 180° que es el periodo se encuentra otra raíz, por lo tanto las raíces de f son: $x = -71.565° + n(180°)$ con $n = 0, \pm1, \pm2,$ ....

Ahora encuentra los ceros de la función g:

Verifica que coincidan con la gráfica.

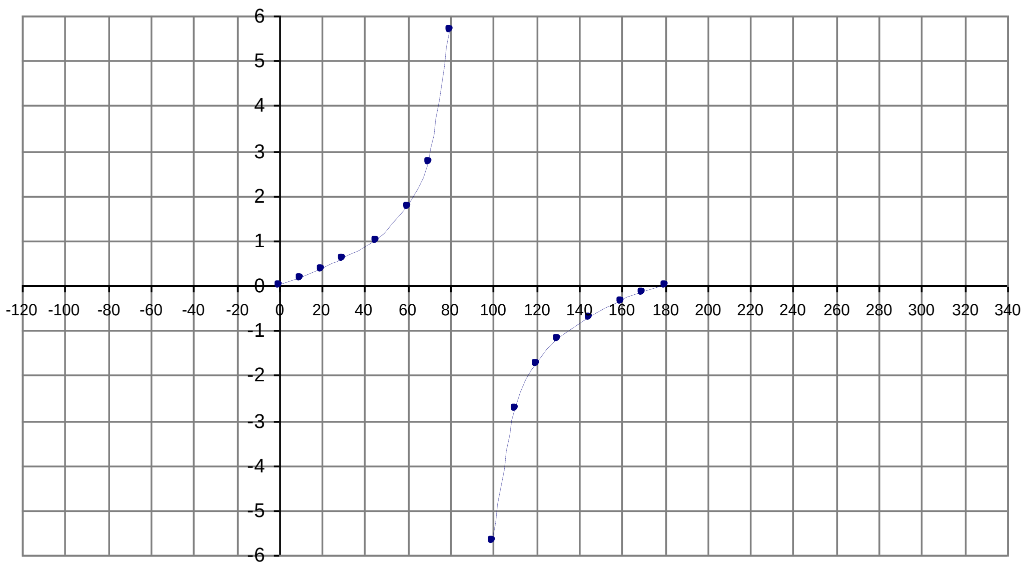
Si a la función tangente le sumamos o restamos una cantidad d que es lo que sucede: ____

____

Ejemplo 2) Analiza y traza la gráfica de las funciones:

a) $F(x) = tan\ (x + 20°)$ b) $G(x) = tan\ (x - 40°)$

Solución: Como a x le sumamos 20° o le restamos 40° la gráfica se va a desplazar sobre el eje X, 20° a la izquierda y 40° a la derecha, por lo que las asíntotas también se van a desplazar al igual que la gráfica y su periodo sigue siendo P = _________

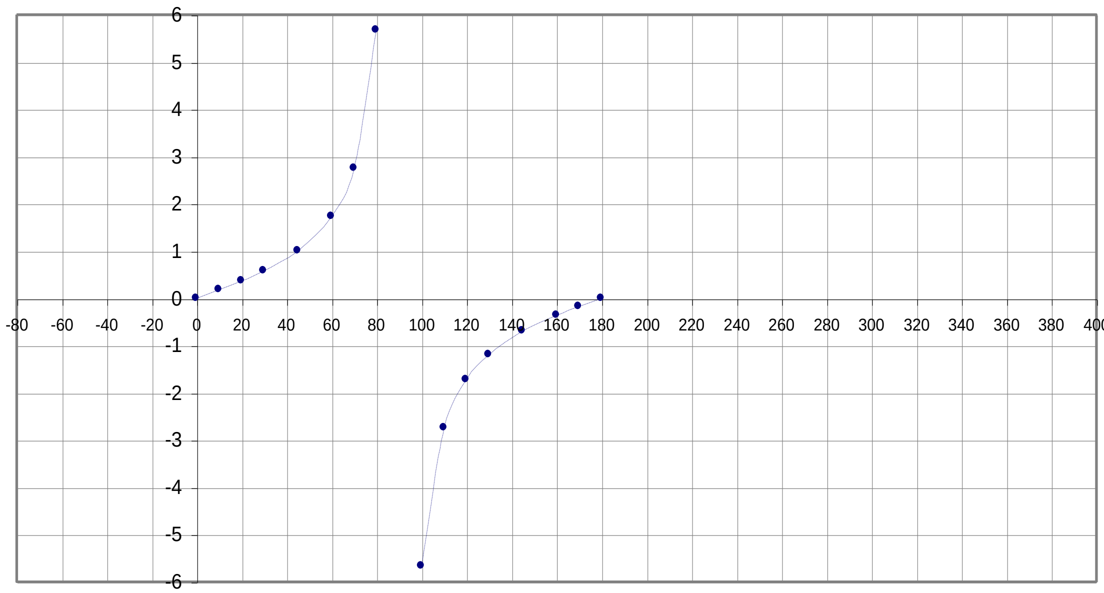


Las asíntotas verticales son: ____

D = ____, R =___________________

Los ceros de la función son: ____

Cruza al eje Y en ______________.



Las asíntotas verticales se encuentran en: ________________________________

D = ____, R =___________________

Los ceros de la función son: ____

Cruza al eje *Y* en _______.

Verifica con la calculadora algunos valores para ver si coinciden con tu gráfica.
Escribe lo que puedes concluir:

Ejemplo 3) Analiza y traza la gráfica de la función Q(x) = $\tan 3x$

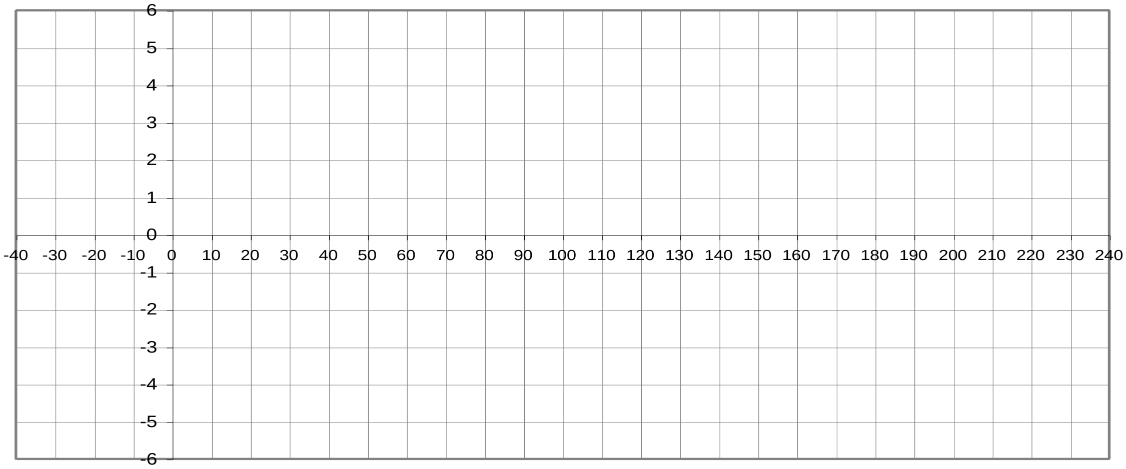
Solución: Como la variable x se esta multiplicando por 3 el argumento de la función tangente llega más rápido a 90°, o sea para x = 30°, por lo que este valor nos da una asíntota vertical y su periodo ahora es P = 180/3 = _______, después de 30° cada 60° vamos a encontrar una asíntota, por lo que las asíntotas verticales se presentan en: x =

____

Las marcamos sobre el plano y ahora el dominio y el rango son:

D = ____________________________________, R = ___________________

Evalúa en algunos valores entre –30 y 30° y reproduce la gráfica.



Los ceros de la función son: ____

De lo anterior, si multiplicamos a x por un número b y luego aplicamos la función tangente, lo que cambia es el _____________ y este lo calculamos como P = ____/b. Como consecuencia de esto cambia: _________________, __________________ y los ceros de la función.

Ejemplo 4) Analiza las funciones y traza su gráfica:

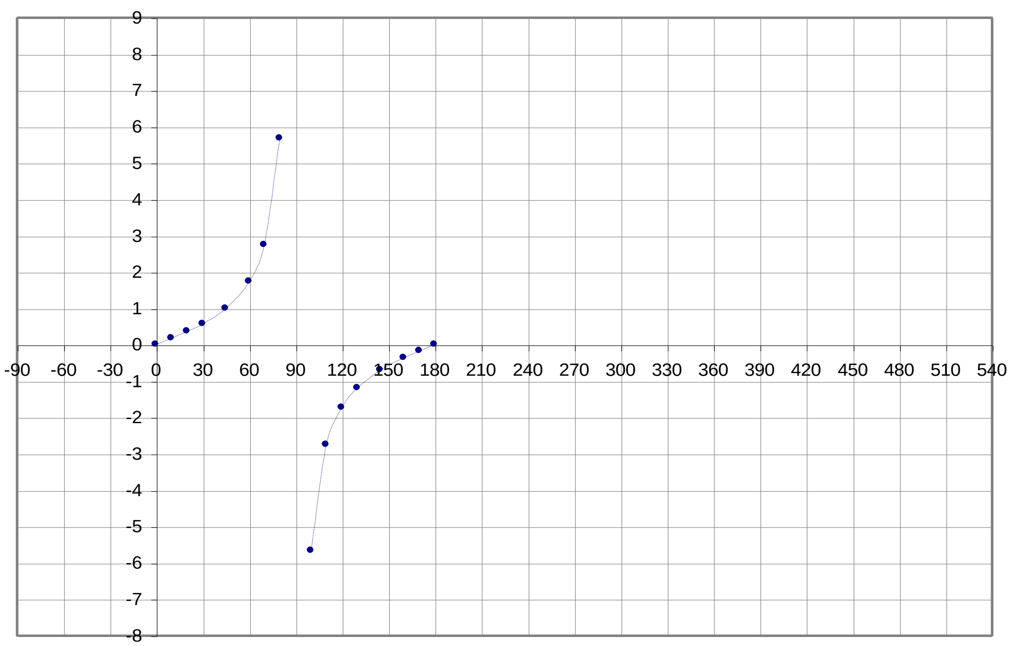
a) M(x) = $3\ tan\ x$ b) N(x) = $\frac{1}{2}\ tan\ x$

Solución: En cada caso se multiplica la función tangente por una cantidad, por lo que se tiene un alargamiento en la primera ya que estamos multiplicando por 3 y una compresión en la segunda por que se multiplica la función por ½ que es un número entre 0 y 1, así que cada valor de la original se triplica para el inciso a) y de divide a la mitad para el inciso b); no cambian: las asíntotas verticales, el dominio, el rango y lo ceros de la función.

Las asíntotas verticales se presentan en: _________________________________

D= ____, R = _________________

Los ceros de ambas funciones se encuentran en : _________________________



NOTA: También aquí es conveniente analizar los cambios que resultan al colocar el signo negativo ya sea a la función tangente o a la variable x, para que quede claro como se invierte la función con respecto a los ejes.

Ejercicios 3.3.3) Analiza las siguientes funciones y traza sus respectivas gráficas

1) $F(x) = \tan(-x)$ 2) $G(x) = \tan 2x$ 3) $H(x) = \tan(x - \pi/2)$
4) $J(x) = \tan \pi x/2$ 5) $K(x) = -\tan x/2$ 6) $L(x) = \tan(30° - x)$

PARA REPASAR LAS CARACTERÍSTICAS DELA FUNCIÓN COSENO Y TANGENTE SE RECOMIENDA VER EL SIGUIENTE VIDEO:
http://www.youtube.com/watch?v=FNp7E1A5mFk&NR=1

3.3.4 Definición de función periódica

Una función f es periódica si existe un número real positivo p tal que

$$f(x + p) = f(x)$$

Para toda x del dominio de f. El número positivo p, si es que existe se llama el periodo de f.

En los casos anteriores al periodo le hemos llamado P y para la función seno y coseno es **2π**, mientras que para la función tangente es **π**. A la parte de las gráficas de la función seno y coseno correspondiente al intervalo [0, 2π] se le llama **ciclo** y para la función tangente un ciclo corresponde a la gráfica en el intervalo [0, π].

Asi por ejemplo puedes verificar con tu calculadora que:

$sen\,(30° + (360°) = sen\, 30°$ $sen\,(30° + 3(360°)) = sen$ ______
$sen\,(45° - 2(360°)) = sen$ ______ $\cos(60° + 5(360)) = \cos$ ______
$\tan(75° - 360°) = \tan$ ______ $\tan(\pi/3 + 3\pi) = \tan$ ______
$\cos(\pi/4 - 4\pi) = \cos$ ______ $\tan(123° + 180°) = \tan$ ______

Así que: $sen\,[x + n(2\pi)] = sen\, x$, $\cos[x + n(2\pi)] = \cos x$ y $\tan[x + n(\pi)] = \tan x$

con $n = \pm1, \pm2, \pm3,$ ....

3.4 Gráficas de las funciones: $f(x) = a\, sen\,(bx + c) + d$

$$f(x) = a\cos(bx + c) + d$$

$$f(x) = a\tan(bx + c) + d$$

en donde $a, b, c,$ y d son números reales

Aprendizajes:

- *Identifica en las funciones del tipo:*
  $f(x) = a\, sen\,(bx + c) + d$, $f(x) = a\cos(bx + c) + d$ y $\boldsymbol{f(x) = a\tan(bx + c) + d}$
  La frecuencia, la amplitud, el periodo y el ángulo de defasamiento. Los utiliza para dibujar directamente la gráfica. De igual manera, es capaz de identificar en la gráfica estos parámetros para proporcionar la expresión algebraica correspondiente.

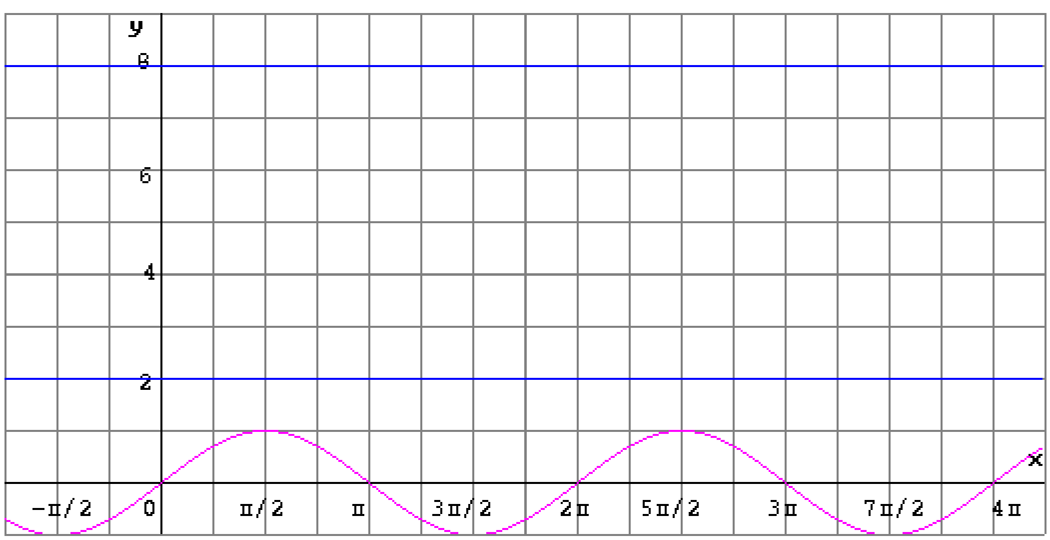
> **SUGERENCIA:** Como en la sección anterior ya se vieron ejemplos en donde intervenían algunos de los parámetros se recomienda recordar la forma en que afectaba cada uno de ellos a estas funciones para poder seguir ahora combinándolos.

Sigamos con los siguientes ejemplos o actividades recordando que los alumnos deben tener una participación activa.

Ejemplo 1) Analiza y traza la gráfica de la función $f(x) = 3\ sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 5$

Solución: un ciclo de la función seno empieza en 0° y termina en 360°=2π y su forma es desde el origen sube hasta 1 en 90°=π/2, baja a 0 en 180°= π y sigue bajando hasta –1 en 270° = 3π/2 y sube a 0 en 360°=2π, como esta multiplicada por 3, esto cambia su **amplitud** a 3 (a=3), además sube 5 unidades, así que empecemos por trazar la franja donde vamos a delinear la función f; el eje x lo subimos 5 unidades y contamos 3 hacia arriba (5+3=8) y 3 hacia abajo (5–3=2), por lo que la franja esta limitada por y = 2 y y = 8; en el argumento de la función a x le restamos 45°=π/4 esto quiere decir que se va a recorrer a la derecha 45° y a este valor le vamos a llamar **ángulo de defasamiento o corrimiento de fase** (desplazamiento de fase); su **periodo** no va a cambiar, sigue siendo P= _______,
Empieza un ciclo en 45°= π/4 y termina en 45 + 360 = 405° =9π/4. Su dominio y rango son:

D = ______________________, R= _________________________
De acuerdo a su rango no cruza al eje X, así que esta función no tiene **ceros**
¿Dónde cruza al eje Y? _________________ (en f(0) = _______)
Ahora traza la gráfica y con ayuda de tu calculadora puedes evaluar en algunos puntos para que estés seguro, recuerda que es una curva suave.



Para cada cada valor de la función original lo multiplicas por 3 lo recorres 45° a la derecha y lo subes 5 unidades.

Ejemplo 2) Traza la gráfica de la función $Q(x)=-4\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-3$ e indica el dominio, el rango, la amplitud, el periodo y desplazamiento de fase.

Solución: La forma de la función coseno es una "uve", como está multiplicada por –4 entonces su **amplitud** es _______, el signo menos invierte la gráfica sobre el eje x, así que vamos a tener una "uve" volteada que empieza en –4 sube hasta 4 y baja de nuevo a –4, pero a la función le restamos 3 así que la gráfica se baja 3 unidades, y queda delineada entre (4 – 3 =1 y –4 –3= –7) las rectas y=1 y y=–7, como esta definida para cualquier valor de x su dominio y rango son:

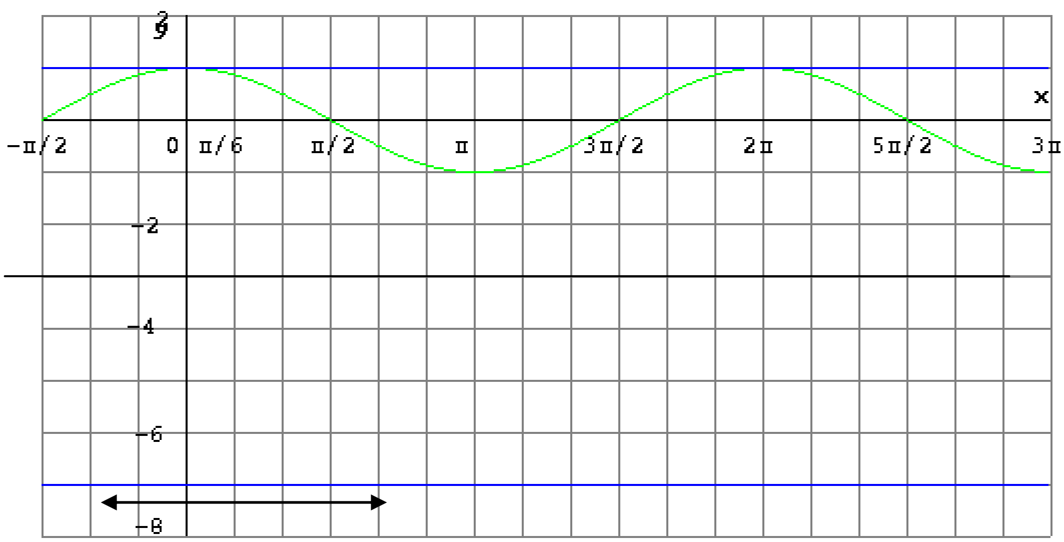
D = __________________________, R = __________________________

Como x esta multiplicada por 2 su **periodo** es: P = _________

Y para encontrar el **desplazamiento de fase** igualamos el argumento a 0 y despejamos a x.

$$2x + \pi/3 = 0, \quad 2x = -\pi/3, \quad x = -\pi/6 = -30°$$

así que la gráfica se recorre a la izquierda 30°, en –30° la función vale –7 y vuelve a llegar a este valor en x = –30° + 180° = 150° o $x = -\pi/6 + \pi = 5\pi/6$.



Traza el ciclo marcado y luego repítela a la izquierda y a la derecha

Podemos encontrar donde cruza el eje x igualando a 0 la función y resolviendo para x

$$Q(x)=-4\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-3=0, \quad -4\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=3, \quad \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-3/4$$

$$\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos^{-1}(-3/4) = 138.59°, \quad 2x = 138.59° - 60° = 78.59°$$

$$x = 78.59/2 = 39.295°$$

así que cruza al eje X en: x = 39.295° + n(180°)

Si observas la gráfica la parte que se encuentra sobre el eje X es simétrica con respecto al punto máximo que se encuentra en x=60°=2π/6, si obtenemos la diferencia entre este

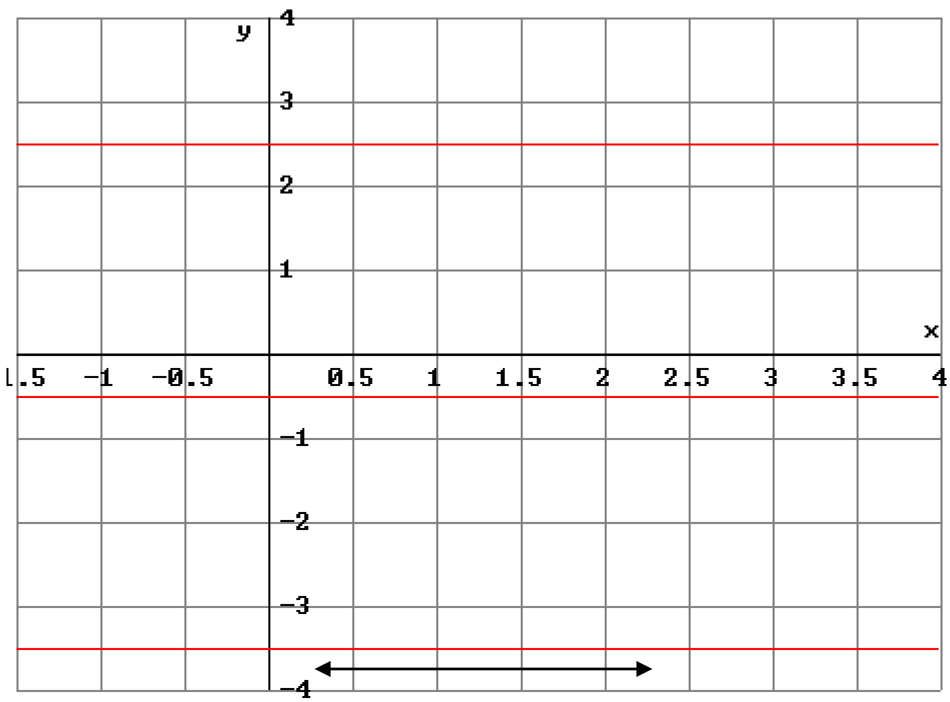
punto y la raíz que ya tenemos (60 – 39.295= 20.705) y luego se lo sumamos a x, encontrando las otras raíces que nos faltan, 60 + 20.705= 80.705°, así que también cruza al eje X en: $x = 80.705° + n(180°)$.
Con ayuda de tu calculadora puedes verificar si la función evaluada en algunos de estos valores realmente te da cero.

NOTA PARA EL PROFESOR: Cuando cambia el periodo en una función de este tipo ($\boldsymbol{b} \neq 1$) hay que tener mucho cuidado al dar el desplazamiento de fase ya que es muy común que los alumnos se equivoquen y den directamente el valor de $\boldsymbol{c}$ sin resolver la ecuación que queda al igualar el argumento de la función a cero.

Ejemplo 3) Traza la gráfica de $f(x) = 3\,sen\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}$ indicando su dominio, rango, periodo, amplitud, ángulo de defasamiento y los ceros de la función si los tiene.
Solución: Su **amplitud** es de 3 ($a = 3$) y como a la función se le resta $d = ½$, el eje X baja 0.5 unidades, así que la franja horizontal en la cual queda delineada la función va desde –0.5 – 3 = –3.5 hasta –0.5 + 3 = 2.5, por lo que su dominio y rango son: D= ___________________________, R = ____________________________
En cuanto a su periodo cambia ya que x esta multiplicada por π, P = $2\pi/\pi$ = _____
El desplazamiento de fase lo obtenemos igualando el argumento a cero

$$\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) = 0, \qquad \pi x = \frac{\pi}{2}, \qquad x = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Podemos dibujar un ciclo empezando en x=0.5 y terminando en x = 0.5 + 2 = ___, recordando que tiene la forma de una onda y después repitiéndola.



Si te das cuenta ahora nuestra escala nos conviene tenerla en radianes

Los ceros de la función se encuentran igualando la función a ________

$$f(x) = 3sen\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} = 0$$

No olvides que ahora la calculadora debe estar en modo de radianes (rad o R)
Los ceros de la función se encuentran en:

x= ____________________

x = ____________________

Ejemplo 4) Analiza la función $L(x) = -\tan\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$ y traza su gráfica

Solución: Su periodo es de P = $\pi/(\pi/2)$ = _______, sube 2 unidades y se recorre:

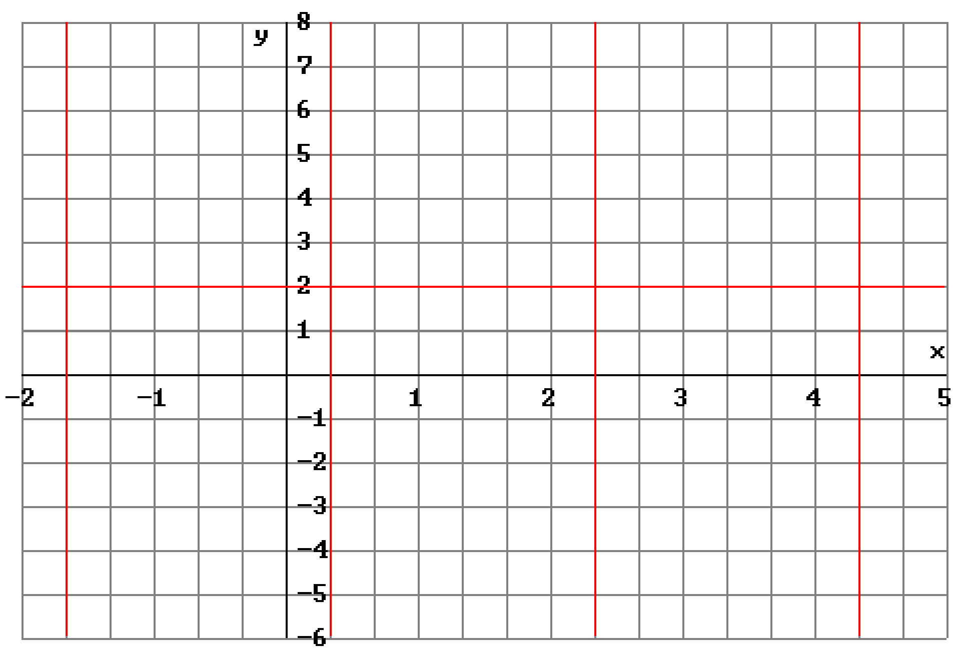
$$\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) = 0\ , \quad \frac{\pi}{2}x = -\frac{\pi}{3}\ , \quad x = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Un ciclo va desde x = –2/3 hasta x = –2/3 + 2 = 4/3

Por lo que las asíntotas verticales se encuentran a la mitad de este intervalo más n(2) o sea en x = 1/3 + n(2) con n = ... – 2, –1, 0, 1, 2, ...

Por lo que su dominio y rango son:
D = ____, R = ________________

Como la función esta multiplicada por un signo menos se invierte sobre el eje X, evalúa en los puntos que consideres necesarios para trazar la gráfica de la función. (el origen sube 2 unidades y se desplaza 2/3 hacia la izquierda)



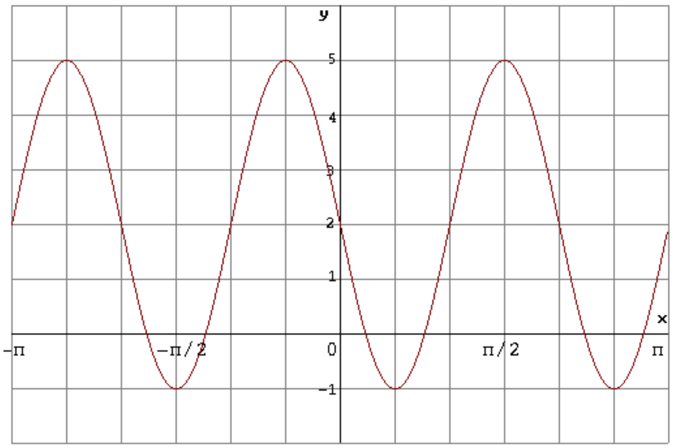
Los ceros de la función se encuentran en : ________________________

$$L(x) = -\tan\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) + 2 = 0$$

$$-\tan\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)=-2,\quad \tan\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)=2,\quad \left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)=\tan^{-1}(2)\ =1.1071$$

$x =$ __________

Ejemplo 5) En la siguiente gráfica encuentra: la amplitud, el periodo, el desplazamiento de fase y la función que representa



Solución: La franja horizontal en donde esta delineada va desde –1 hasta 5, tiene un ancho de 6 así que la **amplitud es *a* = 3** y la mitad de la franja esta en 2 por lo tanto sube 2 unidades ***d* = 2.**
Podemos tomar un ciclo de la función *seno* invertida que empieza en 0° y termina en 4(30) = 120° (cada división es de 30° y el ciclo abarca 4 cuadros), su **periodo es**

P=_____ , entonces, ***b***=360/120 = **3**

Así que la función representada en la gráfica es: $f(x) = -3\, sen\,(3x) + 2$

La gráfica también puede representar una función *coseno* o una función *seno* pero con un desplazamiento sobre el eje X, intenta encontrarlas.

Ejercicios 3.4

Analiza cada una de las siguientes funciones y traza su gráfica

1) $F(x) = 4\, sen\,(x + \pi/4)$ 2) $G(x) = -3\, sen\,(\pi x/2 - \pi/6)$

3) $H(x)=\frac{1}{2}sen 2x+3$ 4) $I(x) = 3\cos(36° - 5x) + 2$

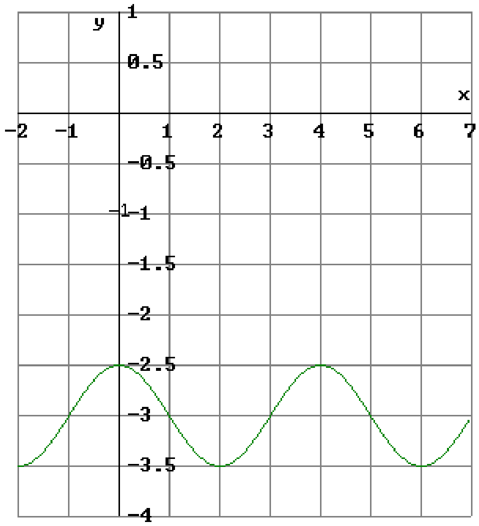
5) $J(x) = \tan(3x - 10°) - 3$ 6) $K(x) = 4 - \cos(2\pi x + \pi/2)$

7) $L(x) = 2\tan(\pi x + \pi/5)$ 8) $M(x) = 4\cos 3\pi x + 5$

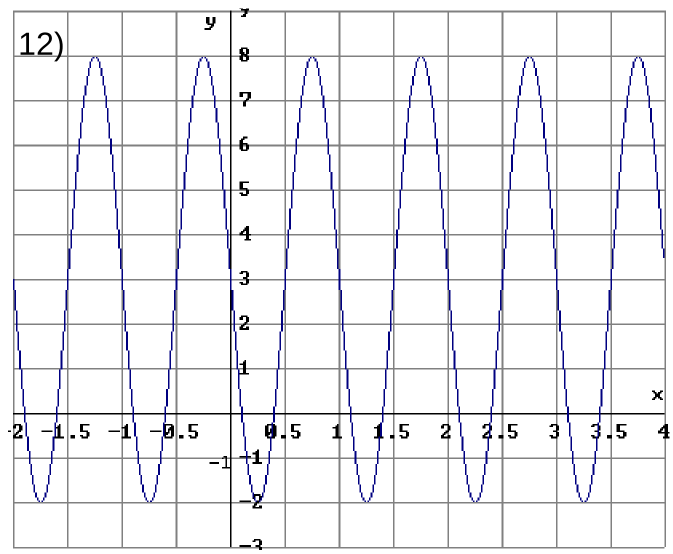
9) $N(x) = -\tan(2x + 15°) + 4$ 10) $P(x) = -2\, sen\,(20° - 3x) + 1$

Analiza cada una de las siguientes gráficas y encuentra la función que representan

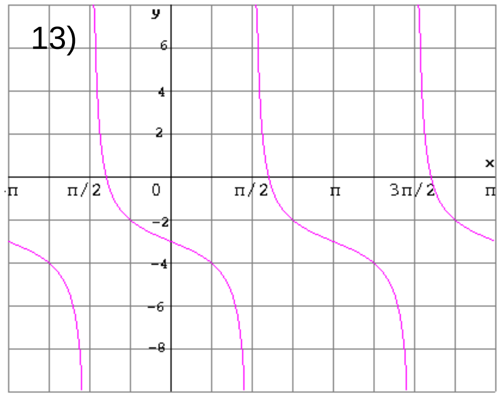
11)



12)



13)



COMO UNA RECOPILACIÓN RAPIDA SE RECOMIENDA LA SIGUIENTE PÁGINA:
https://www.ucursos.cl/bachillerato/2010/1/BA09AYUD/121/material_docente/objeto/11411

3.5 LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS COMO MODELOS DE FENÓMENOS PERIÓDICOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

Aprendizaje:

- *Conoce algunas aplicaciones de las funciones trigonométricas en el estudio de fenómenos diversos de variación periódica, por ejemplo: movimiento circular, movimiento del péndulo, del pistón, ciclo de la respiración o de los latidos del corazón, estudio de las mareas, fenómenos ondulatorios, etc.*

Ejemplo 1) La siguiente función se usa con frecuencia para simular la variación en la temperatura. $F(t) = 23 + 7\,sen\frac{\pi}{12}(t-8) \qquad 0 \le t \le 24$

Donde F nos da la temperatura en grados Celsius a t horas después de la medianoche de cierto día.

a) ¿Cuál es la temperatura a las 8 a.m.? ¿A las 12 p.m.?
b) ¿A qué hora la temperatura es 23 °C?
c) Traza la gráfica de F.
d) ¿Cuáles son las temperaturas, máxima y mínima? ¿A qué hora se alcanzan?

Solución:

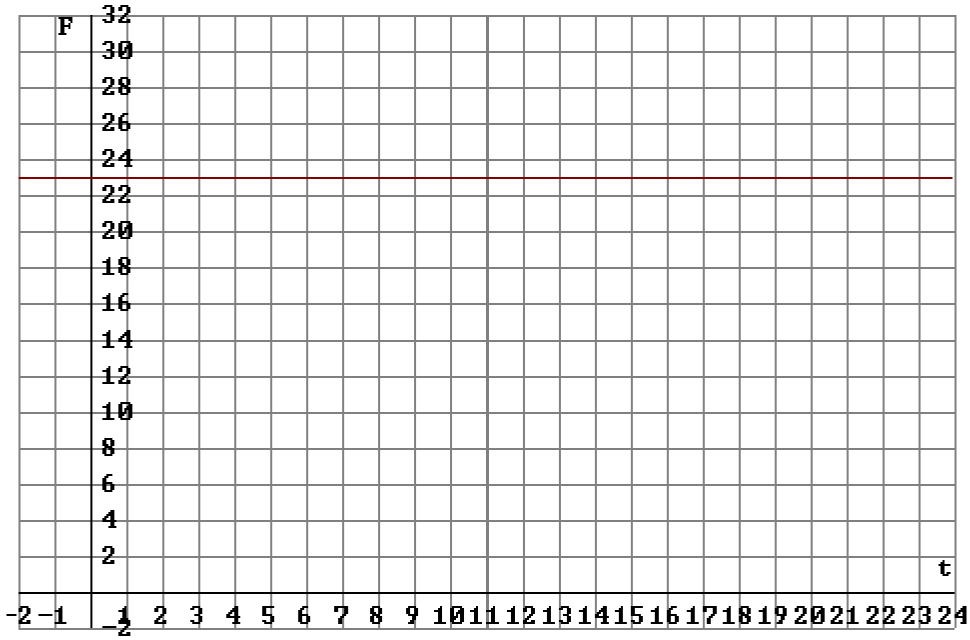
En el inciso a) sustituimos t = 8 y t = 12 en $F(t)$:

$$F(8) = 23 + 7\,sen\frac{\pi}{12}(8-8) = 23 + 0 = 23\ °C$$

$$F(12) = 23 + 7\,sen\frac{\pi}{12}(12-8) = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

b) del resultado anterior a las ________ la temperatura es de 23 °

c) para trazar la gráfica de la ecuación tenemos que sube 23 (***d*=23**) y tiene una amplitud de 7 (***a*=7**), su periodo es de P = 2π/(_____) = 24 y tiene un desplazamiento de fase de 8, traza la gráfica sobre el plano



e) De acuerdo a la gráfica la temperatura mínima es de _______ y se da a las ________; la temperatura máxima es de _______ y se alcanza a las _________

Ejercicios 3.5)

1) El voltaje V producido por un generador de corriente alterna (ca) es

$$V = 120\ sen\ 120\pi t$$

   a)¿Cuáles son la amplitud y el periodo?
   b) Traza la gráfica de V con dos periodos, comenzando en $t = 0$

2) En un punto del océano, el cambio vertical en el agua debido a la acción de las ondas, esta dado por: $y = 8\cos\frac{\pi}{6}(t-6) \qquad 0 \le t \le 72$, donde y esta en metros y t es el tiempo en segundos. ¿Cuál es la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase? Traza la gráfica de la función.

3) La corriente I (en amperes) en un circuito eléctrico está dada por $I = 30\ sen\ (120\pi t - \pi)$, donde t es el tiempo en segundos. Determina la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase. Traza la gráfica de esta función para el intervalo $0 \le t \le$ 3/60.

4) Un adulto normal que está sentado aspira y expira casi 0.80 litros de aire cada 4 seg. El volumen de aire V en los pulmones (en litros) t seg. después de la exhalación está expresado aproximadamente por

$$V(t) = 0.45 - 0.40\cos\frac{\pi t}{2} \qquad 0 \le t \le 8$$

   a) ¿Cuál es la cantidad máxima y mínima de aire en los pulmones? Explica como obtienes estas cifras.

b) ¿Cuál es el periodo de la respiración?
c) ¿Cuántas respiraciones se hacen por minuto?
d) Traza la gráfica $V(t)$.

5) Las temperaturas promedio durante 30 años (en °C) para cada mes del año en cierto lugar, se dan en la tabla

x (mes)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y (temperatura, °C	10	12	17	21	24	28	30	29	26	21	16	12

a) Localiza los puntos en el plano para dos años ($1 \le x \le 24$)
b) Ajuste una curva de la forma $y = d + a\ sen\ (bx + c)$, primero analizando como determinar las constantes a partir de los datos de la tabla y luego trázala sobre los puntos.

6) En la teoría de los biorritmos, una función seno de la forma $P = 100\ sen\ wt$ se usa para medir el porcentaje del potencial de una persona en el tiempo t, donde t se mide en días y $t = 0$ es el nacimiento de la persona. Por lo general se miden tres características:
Potencial físico: periodo de 23 días.
Potencial emocional: periodo de 28 días.
Potencial intelectual: periodo de 33 días.
a) Encuentra w para cada característica.
b) Traza las gráficas de las tres funciones.
c) ¿Hay un tiempo t en el que las tres características tengan un potencial de 100%? ¿Cuándo ocurre?
d) Calcula la edad que tienes hoy en días y describe tus potenciales físico, emocional e intelectual para los próximos 30 días.

7) En un ecosistema de presa – depredador, el número de depredadores y el número de presas tiende a variar periódicamente. En cierta región con coyotes como depredadores y conejos como presa, la población de conejos R y la población de coyotes C están dadas por

$$R = 1000 + 150\ sen\ 2t \qquad C = 200 + 50\ sen\ (2t - 0.7)$$

donde t está medida en años después del 1º de enero de 2000
a) ¿Cuál es la máxima población de conejos? ¿Cuándo se alcanzo por primera vez?
b) ¿Cuál es la máxima población de coyotes? ¿Cuándo se alcanzo por primera vez?
c) ¿Cuál fue la población de conejos el 1º de enero de 2003?
d) Traza ambas gráficas en el mismo sistema coordenado e intenta explicar el desplazamiento de fase en C.

8) Una boya de señalización en la playa se balancea de arriba hacia abajo con una altura h (en pies) sobre el nivel del mar, este movimiento se puede modelar por $h = a\ sen\ bt + 5$. Durante una pequeña tormenta su altura varía de 1 pie a 9 pies y hay

3.5 segundos entre cada vez que la boya alcanza una altura de 9. ¿Cuáles son los valores de las constantes a y b? Traza la gráfica de este movimiento.

9) La función $P = 120 + 30 \text{ sen } 2\pi t$ modela la presión de la sangre (en milímetros de mercurio) para una persona que tiene una presión (alta) de 150/90 y donde t esta en segundos.

   a) ¿Cuál es el periodo de la función?
   b) ¿Cuántos latidos del corazón hay cada minuto?
   c) Grafica esta función en un intervalo de 10 segundos.

AUTOEVALUACIÓN

Con esta evaluación verificarás si realmente has adquirido los conocimientos básicos necesarios para probar esta unidad y si has logrado los objetivos propuestos al principio de ésta. Para hacer esta evaluación, y los resultados que obtengas sean verdaderamente lo que aprendiste, es necesario que la resuelvas sin consultar el texto o tus notas durante la solución, pero sí te recomendamos que tengas un breve resumen de la unidad que puedes consultar. Esperamos que esta autoevaluación la termines en 2 horas como máximo.

1) El punto $P(x, y)$ está en el círculo unitario en el cuarto cuadrante. Si $x = \frac{12}{13}$, determina y.

Traza las gráficas de las siguientes funciones trigonométricas y determina: amplitud, periodo, dominio, rango y corrimiento de fase

2) y = – 3 $\cos(x/2)$

3) $y = \frac{1}{2}\, sen\,(x + \frac{\pi}{4}) + 1$

4) F(x) = 4 $sen\ 2\pi x$

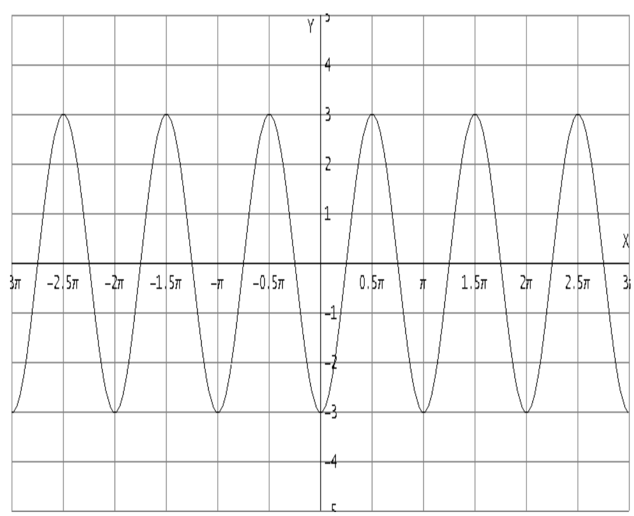
5) G(x) = 3 – $\tan \pi x$

6) $f(x)$ = 2 $\cos$ (30° – 2x) – 5

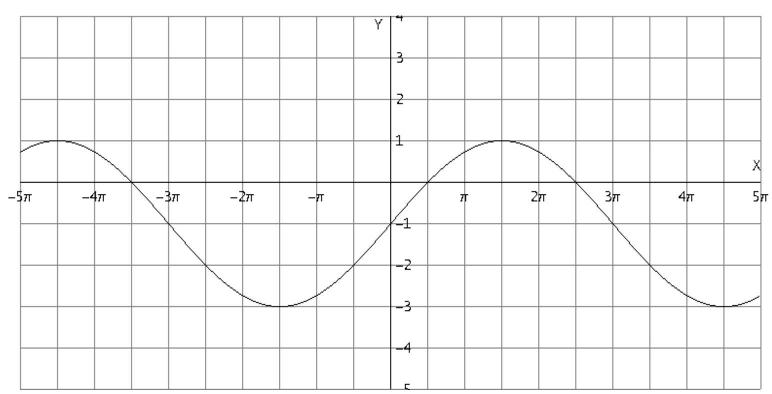
7) g(x) = $g(x) = \tan\left(\frac{x}{2} - 40°\right)$

Determina su amplitud, periodo, corrimiento de fase y desplazamiento vertical en cada gráfica y escribe la regla de correspondencia.

8)



9)



10) La estrella variable Zeta Gemini tiene un periodo de 10 días. La brillantez promedio de la estrella es de 3.8 magnitudes y la variación máxima respecto al promedio es de 0.2 de magnitud. Suponiendo que la variación de la brillantez es periódica, obtén una ecuación que de la brillantez de la estrella como una función del tiempo.

ESCALA:

Para considerar si has aprendido el principal propósito de esta unidad, es necesario que resuelvas correctamente las preguntas 1, 2, 3, 4, 6 y 9 pero no has logrado todos los objetivos, SÓLO LOS BÁSICOS. Si resuelves también la 5 y la 8 entonces vas avanzando muy bien, pero si también resuelves la 7 y 10, ¡FELICIDADES!, lograste todos los objetivos de la unidad y estas listo para continuar con la siguiente. Si resuelves menos de 6 preguntas, tienes que volver a estudiar con mayor conciencia esta unidad y hacer todos los ejercicios propuestos.

¿QUIÉN TIENE?....., YO TENGO.......
de Funciones Trigonométricas

Proponemos este juego para reafirmar los conceptos vistos en esta unidad.

- Son un total de 30 cartas, en las que se tienen impresas graficas de las diferentes funciones trigonométricas y al reverso de estas se encuentra escrita una función de este mismo tipo.
- Participa todo el grupo y se inicia repartiendo las cartas de acuerdo al número de alumnos.
- Cada alumno debe analizar las cartas que le han sido asignadas, tanto la gráfica como la ecuación para que tenga una idea de cuál es la expresión de la función que espera y que curva espera que le muestren.
- Es conveniente que el juego lo inicie el profesor ya que el que empieza es el que termina.
- Se debe estar pendiente de que las graficas correspondan a las expresiones mostradas.

Este juego nos ayuda más que nada para que los alumnos aprendan a analizar las gráficas de las funciones racionales y con radicales, sobre todo que las puedan distinguir y diferenciar, aumentando así sus registros de las funciones, visualizando las imágenes.