1.3 REPRESENTACIÓN DE LA FUNCIÓN POLINOMIAL

Una función polinomial es aquella en donde la variable se eleva a una potencia entera no negativa o sea que una función f es polinomial si la puedo expresar con un polinomio de la forma: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$
donde los coeficientes $a_0, a_1, ...\ a_n$ son constantes y n es un entero positivo,
por ejemplo, cuando n=0 tenemos f(x) = a_0 una función constante (recta horizontal)
cuando n=1 tenemos $f(x) = a_1 x + a_0$ una función lineal cuya gráfica es una línea recta de pendiente a_1 y ordenada al origen a_0.
si $n = 2$ tenemos $f(x) = a_{2x}^2 + a_1 x + a_0$ una función cuadrática o de grado 2, la cuál estas acostumbrado a verla de la forma $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ y su gráfica es una parábola.

Cuando $n = 3$, tenemos $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ una función cubica o de grado 3 (o tercer grado) y así sucesivamente, en cuanto a su gráfica la conoceremos más adelante.

De acuerdo a lo anterior el grado de una función polinomial nos lo da el exponente mayor de la variable independiente o sea el valor de n.

Como ya vimos las funciones las podemos denotar con letras mayúsculas o minúsculas, a continuación se presentan cuatro funciones polinomiales de diferente grado:

P(x) = $x^3 + 4x^2 – 5x + 2$ de grado 3 o de tercer grado
Q(x) = $2x^4 – 4x^3 – 5x^2 + x – 3$ de grado 4 o de cuarto grado
R(x) = $x^5 + 2x^4 – 3x^2 + 5x + 1$ de grado 5 o de quinto grado
S(x) = $3x^6 + 8x^5 – x^3 – 4x^2 + 2x$ de grado 6 o de sexto grado

Ahora las funciones:

F(x)=$\frac{2}{x} + 3x$, G(x)=$\frac{2-x}{x^2-1} + 2x^3$, H(x)=$x^2 + \sqrt{5x} - 6$,
J(x)=$x + \sqrt{3-2x}$, K(x)= $3x^5 - 2\cos x$

No son polinomiales ya que la variable en unas esta dividiendo, en otras la variable se encuentra dentro de un radical o la variable es parte de otra operación.

Ejercicios

Indica si las siguientes funciones son polinomiales o no y si lo son decir su grado.

1) $f(x) = x – 3x^4 – 5x^2 + 3$ __________________________________

2) $g(x) = 5x^3 + 7x^5 + 8$ __________________________________

3) $h(x) = x – x^2 - 9\sqrt{x} + 1$ __________________________________

4) $j(x) = \sqrt{9}x - x^4 - 7x^2 + \sqrt{12}$ __________________________________

5) $k(x) = x^3 + 7x^5 + 8\text{sen}x$ __________________________________

6) $l(x) = x^2 - \frac{3}{5x} + 9x$ __________________________________

7) $m(x) = x^4 - \frac{5}{2}x^7 + 9x^5 + 6x^2$ ____________________

8) $n(x) = 2x^3 + 7 + \log x$ ____________________

9) $p(x) = \sqrt{x - 3x} + 5$ ____________________

10) $q(x) = x - 6x^4 + 5x^9 - 2x^7 + 2$ ____________________

FUNCIONES DE LA FORMA $f(x) = x^n$

Las que analizaremos aquí son solamente cuando n es un número entero positivo (funciones polinomiales), si n es igual a 1 tenemos la función $f(x) = x$ que como ya vimos anteriormente es una línea recta que pasa por el origen a la que se le llama función identidad, si $n = 2$, tenemos una función cuadrática que nos representa una parábola y que también ya conoces, cuando $n = 3$ tenemos una función cubica, de la cual haremos un análisis parecido al que se hizo con la función cuadrática y así sucesivamente n puede tomar valores ya sean pares o impares, en esta sección las analizaremos en su conjunto como una familia de curvas, para que te vayas dando cuenta de su comportamiento en algunos intervalos.

Empecemos por hacer una tabla donde se muestren los valores de x y los de su correspondiente $f(x)$, cuando n va desde 1 hasta 6, para que observemos lo que pasa con la forma de la curva cuando n toma valores impares o pares.

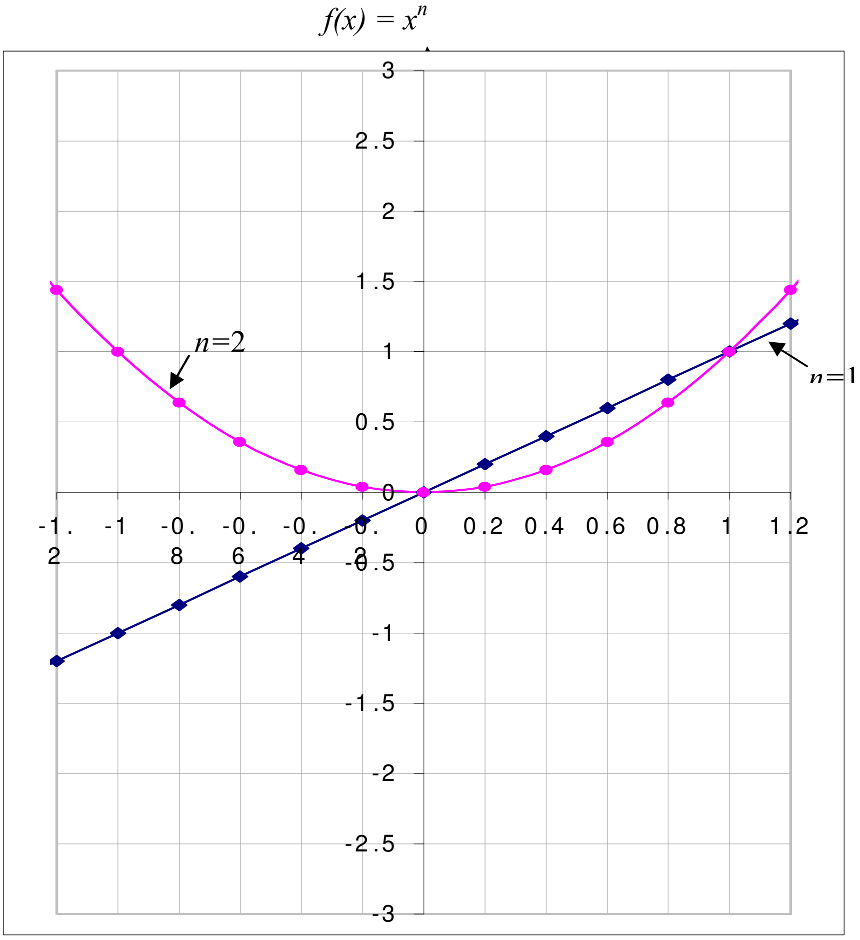
Cuando $x=1$ la función toma el valor de 1 o sea $f(1)=(1)^n = 1$ no importa el valor de n, cuando x es positiva también $f(x)$ es positiva; pero si $x = -1$, ya no sucede lo mismo, ya que si n es par ($n = 2, 4, 6,....$), $f(-1)=1$ y para cualquier valor negativo de x su correspondiente $f(x)$ es positiva, si n es impar ($n = 1, 3, 5,...$), $f(-1) = -1$ y para cualquier valor de x negativo, $f(x)$ es negativo.

En el intervalo de -1 a 1 démosle varios valores y luego valores enteros no muy grandes, ya que te vas a dar cuenta que crece demasiado y no las podrías graficar juntas, sobre todo con la misma escala, así que mejor completa la siguiente tabla.

x	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
0.2	0.2	0.04	0.008	0.0016		
0.4	0.4	0.16	0.064		0.01024	0.004096
0.6	0.6		0.216	0.1296	0.07776	
0.8		0.64	0.512			
1				1	1	
1.2		1.44		2.0736	2.48832	2.985984
1.4			2.744	3.8416		
1.6		2.56	4.096			16.777216
1.8		3.24		10.4976	18.89568	
2		4		16	32	64
-0.2		0.04	-0.008			
-0.4				0.0256	-0.01024	
-0.6			-0.216		-0.07776	0.046656

-0.8		0.64	-0.512	0.4096		
-1				1	-1	
-1.2		1.44	-1.728		-2.48832	2.985984
-1.4				3.8416	-5.37824	
-1.6			-4.096	6.5536		16.777216
-1.8						
-2	-2		-8	16	-32	64

Para que logremos observar el comportamiento de todas estas funciones no hay necesidad de colocar la escala de acuerdo a los valores que tenemos en la tabla porque como se observa, cuando x toma valores entre -1 y 1, la función toma valores también ente -1 y 1, para los demás valores observamos que $f(x)$ es positiva o negativa pero con un valor muy grande, vamos a considerar que cuando x tiene valores de 1.2 o -1.2 los valores de las funciones son accesibles y las podemos trazar en el siguiente plano en donde ya se encuentran marcadas x y x^2



Como podrás darte cuenta, cuando n es par se comportan igual a la parábola abren hacia arriba, para valores negativos de x decrecen hasta x=0 y para valores positivos crecen o sea que bajan tocan el origen y suben; son simétricas con respecto al eje y, ya que f(-x) = f(x) por lo que se dice que cada una de ellas es una función par.

- ¿Que sucede cuando n es impar? ____
  ____
  ____
  ____

- ¿Qué puntos tienen en común todas las gráficas? _________________________
- En el intervalo de 0 a 1 ¿cuál de las curvas crece mas lentamente? ___________
- ¿Cuál de las curvas crece más rápidamente en el intervalo de 1 en adelante? ___________________
- ¿Cuál de las curvas decrece más lentamente en el intervalo de menos infinito hasta menos uno? ____________________

Otra de las cosas que podemos decir de las gráficas anteriores es que cuando el exponente es par no cambian de concavidad (abren hacia arriba) y cuando el exponente es impar al cruzar el origen cambia la concavidad (era hacia abajo y al cruzar es hacia arriba), también al aumentar el exponente se pegan al eje x o se hacen más planas alrededor del origen, ya sea de un solo lado (exponente par) o de los dos lados (exponente impar).

- En cuanto al dominio de cada una de ellas que puedes decir:________________
  ____
- ¿Qué pasa con el rango correspondiente a cada una de ellas? ____
  ____

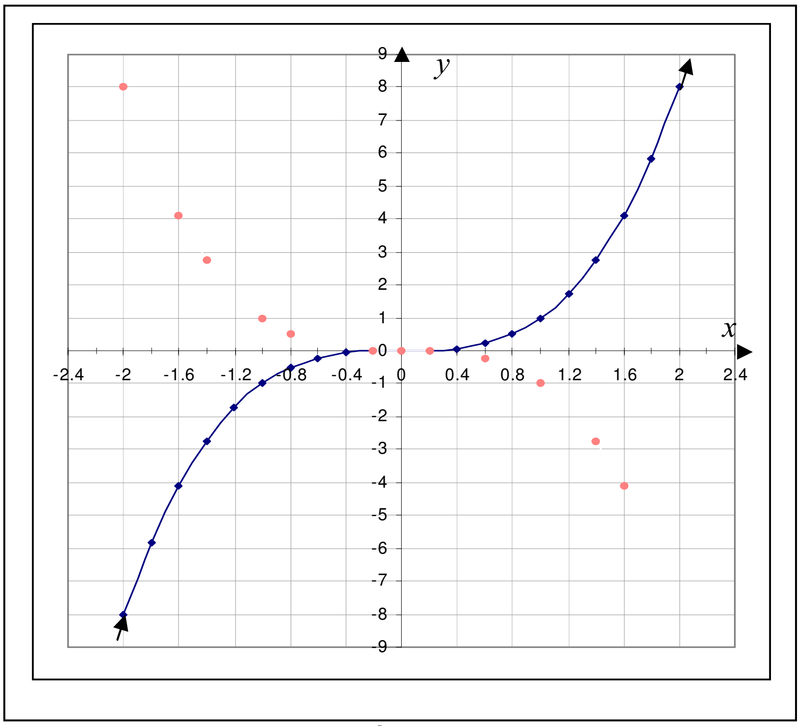
Las intersecciones de las gráficas con el eje x son los **ceros** de la función o las **raíces** (soluciones) de la ecuación que resulta cuando la función es igual a cero, al observar la tabla y las gráficas vemos que si $x = 0$ todas las funciones valen cero, así que $x = 0$ es una raíz sencilla o simple para la función lineal (pasa por el origen directamente), $x = 0$ es una raíz doble para la función cuadrática (no cruza al eje x es concava hacia arriba), $x = 0$ es una raíz triple para la función cubica (cruza pero cambia su concavidad) y así va aumentando su multiplicidad según el exponente.

REFLEXIÓN

Si a cualquiera de estas funciones se les cambiara de signo ¿qué crees que pasaría?, puedes hacerlo en tu cuaderno o a lo mejor te das cuenta que les va a pasar lo mismo que a la función cuadrática que ya estudiaste en el segundo semestre y simplemente contestes que se van a voltear sobre el eje x.

Vamos a practicarle con $f(x) = x^3$, como ya tenemos la tabla la trazamos y hay que completar la tabla y la gráfica que siguen:

x	$f(x) = -x^3$	x	$f(x) = -x^3$
0	0		
0.2	$-(0.2)^3$ = - 0.008	- 0.2	- $(- 0.2)^3$=0.008
0.4		- 0.4	
0.6	- 0.216	- 0.6	
0.8		- 0.8	0.512
1	-1	- 1	1
1.2		- 1.2	
1.4	- 2.744	- 1.4	2.744
1.6	- 4.096	- 1.6	4.096
1.8		- 1.8	
2		- 2	8

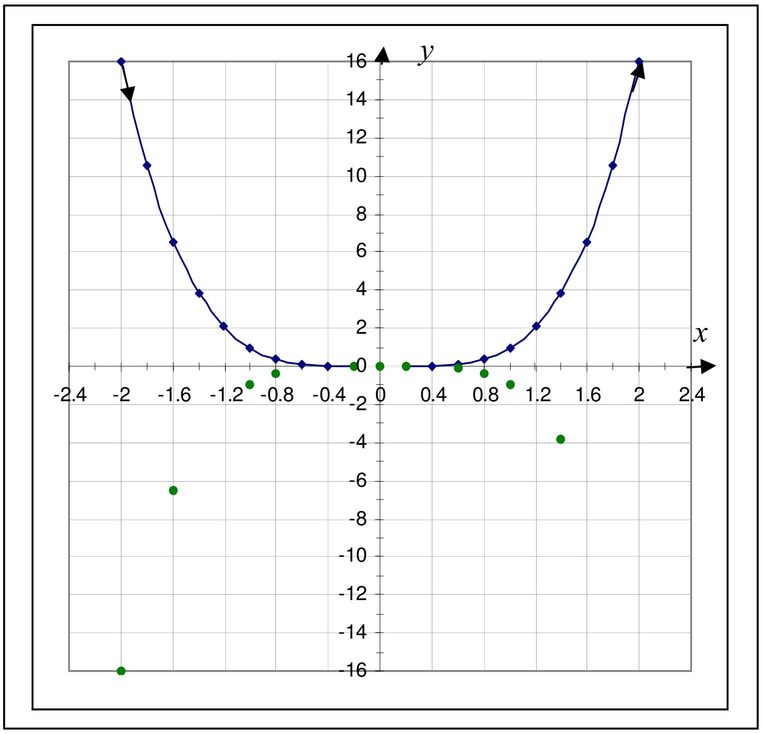


Si sucedió lo que esperábamos, **se invirtió sobre el eje x (se reflejo en el eje x),** con signo positivo empieza abajo y termina arriba, con signo negativo empieza arriba y termina abajo

Vamos ahora con $f(x) = x^4$, como ya tenemos la tabla para esta la trazamos sobre el plano que sigue y completamos la tabla y la gráfica cambiándole de signo.

x	$f(x) = -x^4$	x	$f(x) = -x^4$
0	0		
0.2	$-(0.2)^4$ = - 0.0016	- 0.2	- $(- 0.2)^4$ = - 0.0016
0.4		- 0.4	
0.6	- 0.1296	- 0.6	
0.8		- 0.8	- 0.512
1	-1	- 1	- 1

1.2		- 1.2	
1.4	3.8416	- 1.4	
1.6		- 1.6	- 6.5536
1.8		- 1.8	
2.0		-2.0	- 16



Nuevamente al trazar la gráfica de la función $f(x) = -x^4$ se puede observar que ahora todos los valores que toma la función son negativos, ahora abre hacia abajo, cambio su concavidad; o sea que **se invierte sobre el eje x o se refleja** como en el caso anterior.

Ejercicios.-

1) Traza las gráficas de $f(x) = \pm x^5$ y $f(x) = \pm x^6$ en tu cuaderno.
2) Discute con tus compañeros y concluye como es afectada la concavidad de la gráfica con respecto al signo que lleva el término, así como también con respecto al exponente.
3) En cada una de las funciones que pasa con el dominio y el rango.

DESPLAZAMIENTO VERTICAL

También esto ya lo hemos realizado con la función cuadrática y ahora vamos a ver si sucede los mismo con las funciones que estamos estudiando, así que a estas les vamos a sumar o restar un número.

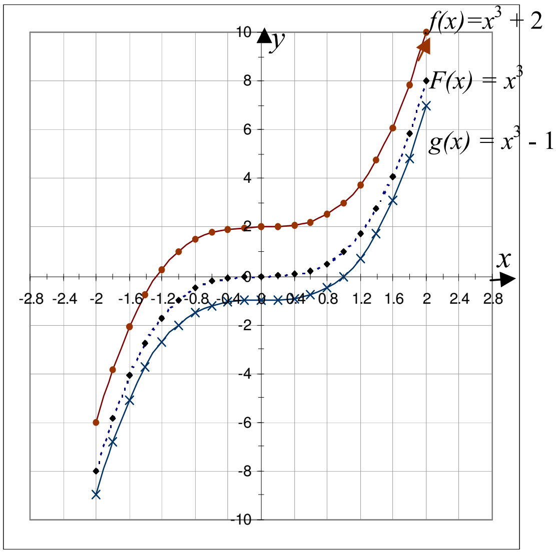
Ejemplo.- Traza la gráfica de cada función sobre el mismo plano

a) $f(x) = x^3 + 2$ b) $g(x) = x^3 - 1$.

Solución

A la tabla de la función cubica que ya tenemos le agregamos las funciones anteriores y evaluamos en los valores de x ya dados:

x	$F(x) = x^3$	$f(x) = x^3 + 2$	$g(x) = x^3 - 1$
0.2	0.008	2.008	-0.992
0.4	0.064	2.064	-0.936
0.6	0.216	2.216	-0.784
0.8	0.512	2.512	-0.488
1	1	3	0
1.2	1.728	3.728	0.728
1.4	2.744	4.744	1.744
1.6	4.096	6.096	3.096
1.8	5.832	7.832	4.832
2	8	10	7
-0.2	-0.008	1.992	-1.008
-0.4	-0.064	1.936	-1.064
-0.6	-0.216	1.784	-1.216
-0.8	-0.512	1.488	-1.512
-1	-1	1	-2
-1.2	-1.728	0.272	-2.728
-1.4	-2.744	-0.744	-3.744
-1.6	-4.096	-2.096	-5.096
-1.8	-5.832	-3.832	-6.832
-2	-8	-6	-9

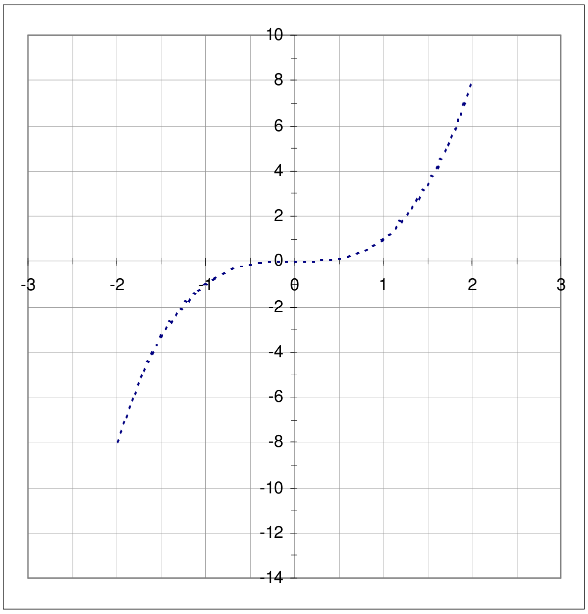


Como te habrás dado cuenta al observar tanto la tabla como la gráfica, si le sumamos suben si le restamos bajan, o sea que se desplazan sobre el eje y. La función del inciso a) le sumamos 2 a cada punto de la cubica y al inciso b) le restamos 1 a cada punto, no es necesario hacerlo con todos los puntos lo más importante es recordar la forma de la cubica y algunos de los puntos por los que pasa por ejemplo (0,0), (1,1) (2,8), (-1,-1) y (-2,-8) y que si se sigue alejando x a la derecha (infinito) la función sigue creciendo (infinito) y que si x se aleja a la izquierda (menos infinito) la función toma valores grandes pero negativos (menos infinito).

Para delinear la gráfica de este tipo de funciones no es necesario que tabulemos, sino que con base a las que ya conocemos tratemos de hacer un bosquejo de la que se nos pide, así que hay que ir tratando de grabarnos las formas de las funciones vistas con anterioridad.

Ejercicio 1) traza en el plano que se te da las gráficas de las funciones que siguen sin tabular, tomando como base la que ya conoces

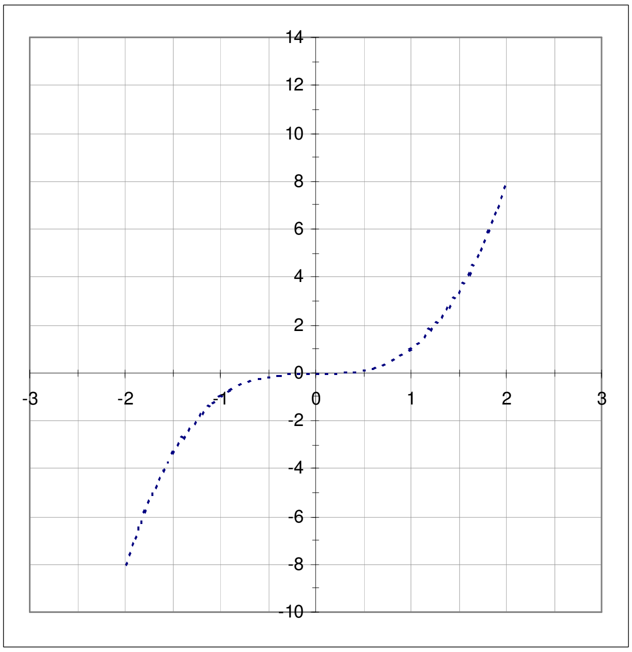
a) F(x) = $x^3 - 5$ b) G(x) = $x^3 + 3$ c) H(x) = $x^3 - 2$



- ¿Cambia su dominio y rango correspondiente? ______________________________
  Ya no cruzan al eje x en el origen, por lo que $x = 0$ ya no es un **cero** de estas funciones. Si observas las gráficas te darás cuenta de que cruzan al eje x directamente y no en la misma forma que la original así que este punto donde cruzan nos da una **raíz** real y como no vuelven a cruzar el eje las otras dos raíces son complejas.
- ¿Podrías encontrar la raíz real de estas funciones? ¿Cómo?

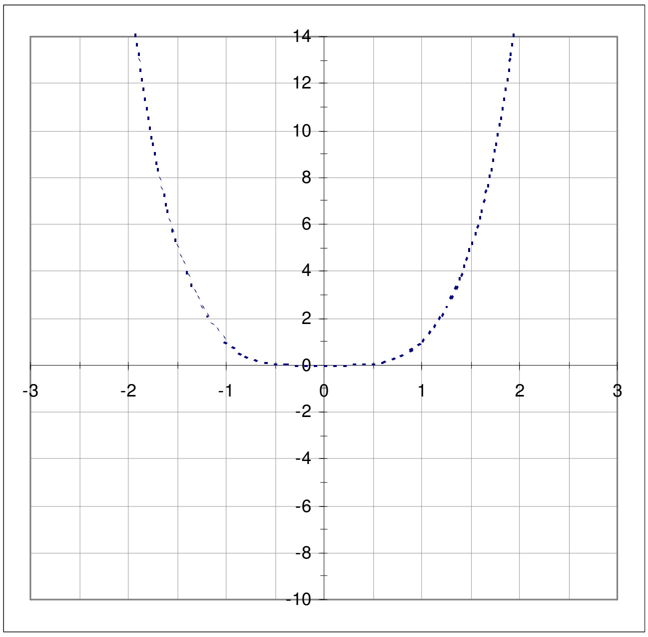
Ejercicio 2) Traza en el plano las gráficas de las siguientes funciones sin tabular y escribe su dominio y rango de cada una de ellas.

a) $f(x) = -x^3 + 3$ b) $g(x) = -x^3 - 2$ c) $h(x) = -x^3 + 5$



Ejercicio 3) Traza la gráfica de cada función sin tabular y escribe su dominio y rango correspondiente.

a) $f(x) = x^4 - 6$ b) $g(x) = -x^4 + 2$ c) $h(x) = x^4 + 2$



De nuevo ya no tocan al eje x en $x = 0$, así que este valor ya no es una raíz de multiplicidad 4, así que ahora cuando no cruzan al eje x vamos a decir que tiene 4 raíces complejas y si lo cortan en dos puntos entonces las funciones de este tipo tienen dos raíces reales y dos complejas (recordando que las raíces complejas siempre van de dos en dos)

❖ Intenta encontrar las raíces reales de estas funciones.

DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL

Las gráficas de las funciones se desplazan sobre el eje y cuando se le suma o resta una cantidad determinada a la función cuyos valores se localizan en el plano sobre el eje y, ahora para que el desplazamiento sea sobre el eje x le tenemos que sumar o restar una cantidad a la variable x.

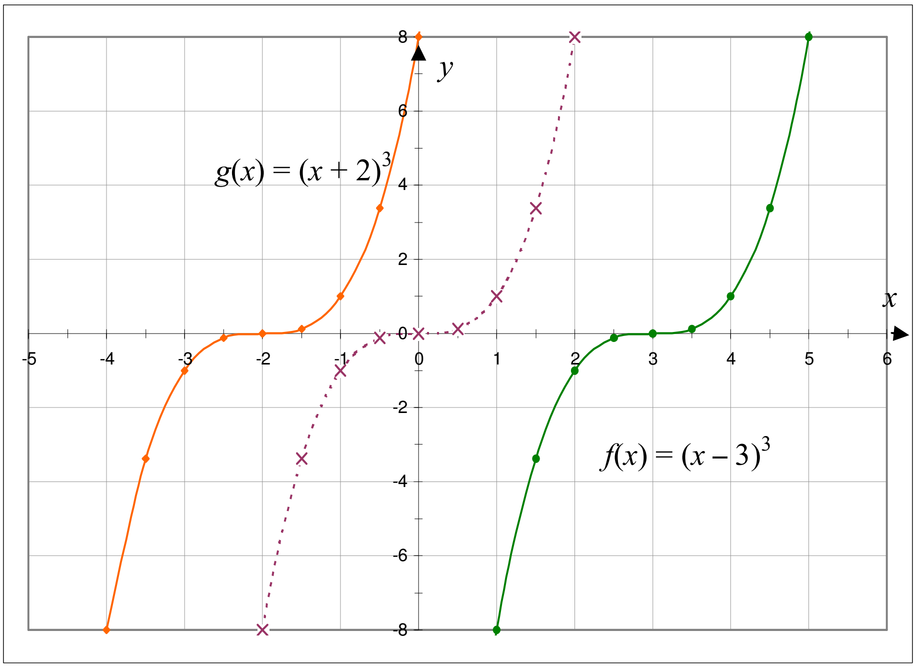
Ejemplo.- Traza la gráfica de cada función

a) $f(x) = (x - 3)^3$ b) $g(x) = (x + 2)^3$

Solución

Hay que buscar cuando lo que esta dentro del paréntesis se hace cero para ver alrededor de que número tenemos que evaluar; la primera la vamos a evaluar alrededor de 3 ya que 3 – 3 = 0 y así vamos a tener los valores en donde nos interesa la función o sea donde hay un cambio en su gráfica; la segunda alrededor de –2 ya que –2 + 2 = 0, démosles valores como sigue:

x	$g(x) = (x + 2)^3$	x	$f(x) = (x - 3)^3$
- 4	-8	1	-8
- 3.5	-3.375	1.5	-3.375
- 3	-1	2	-1
- 2.5	-0.125	2.5	-0.125
- 2	0	3	0
- 1.5	0.125	3.5	0.125
- 1	1	4	1
- 0.5	3.375	4.5	3.375
0	8	5	8

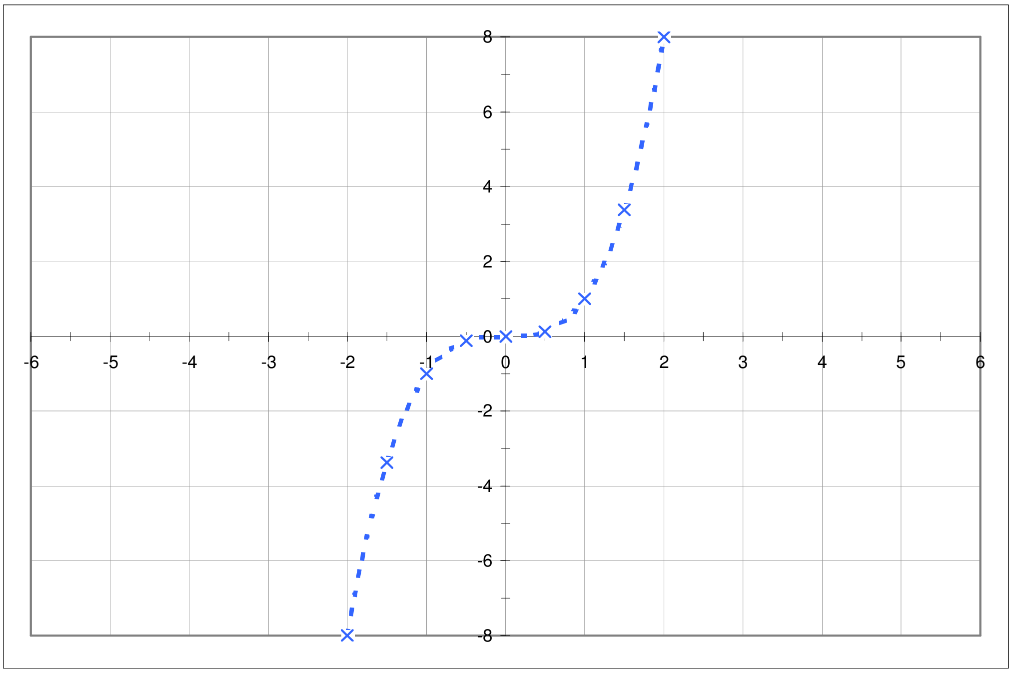


Como puedes ver cuando a x se le suma o resta una cantidad, la gráfica se desplaza ahora sobre el eje x ya sea a la izquierda o hacia la derecha, respectivamente, pero siempre las dos ramas quedan una hacia arriba y otra hacia abajo.

Tanto el dominio como el rango no cambian ambos siguen siendo todos los números reales, en cuanto a los **ceros** de estas funciones simplemente se desplazan; la primera (a), $x = 3$ es una raíz triple (cruza cambiando de concavidad) y la segunda (b), $x = -2$ es una raíz triple.

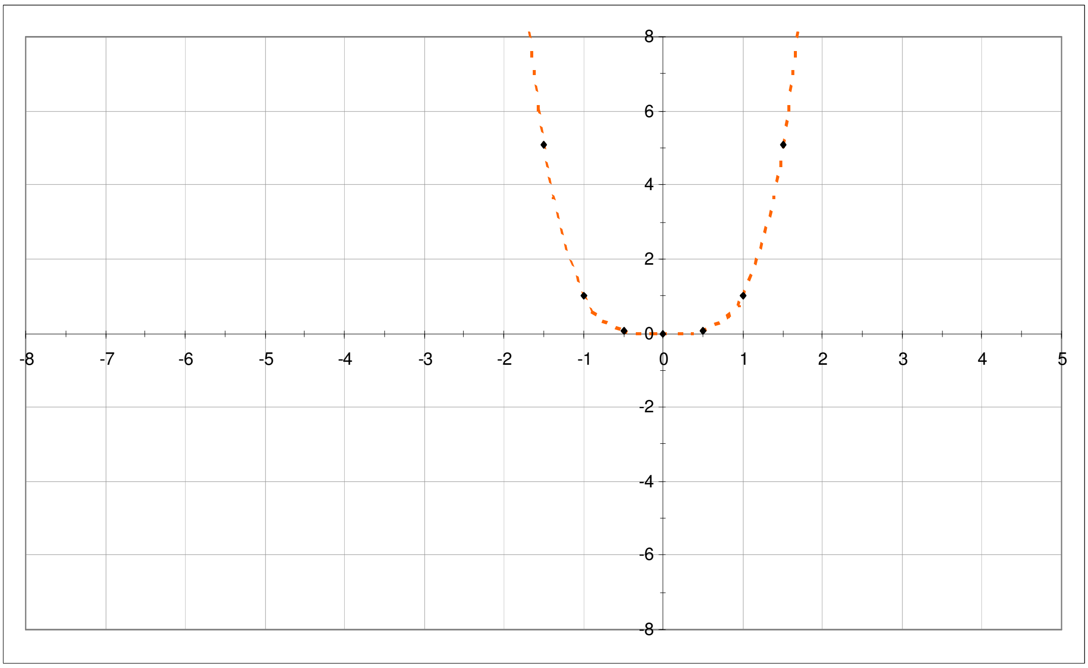
Ejercicio.- Traza la gráfica de cada función sin tabular. Utiliza la gráfica que se te da y explica el procedimiento que seguiste.

a) $f(x) = (x + 4)^3$ b) $g(x) = -(x + 2)^3$ c) $h(x) = -(x - 4)^3$



Ejercicio.- Traza la gráfica de función

a) $f(x) = (x + 2)^4$ b) $g(x) = -(x - 3)^4$ c) $h(x) = -(x + 5)^4$



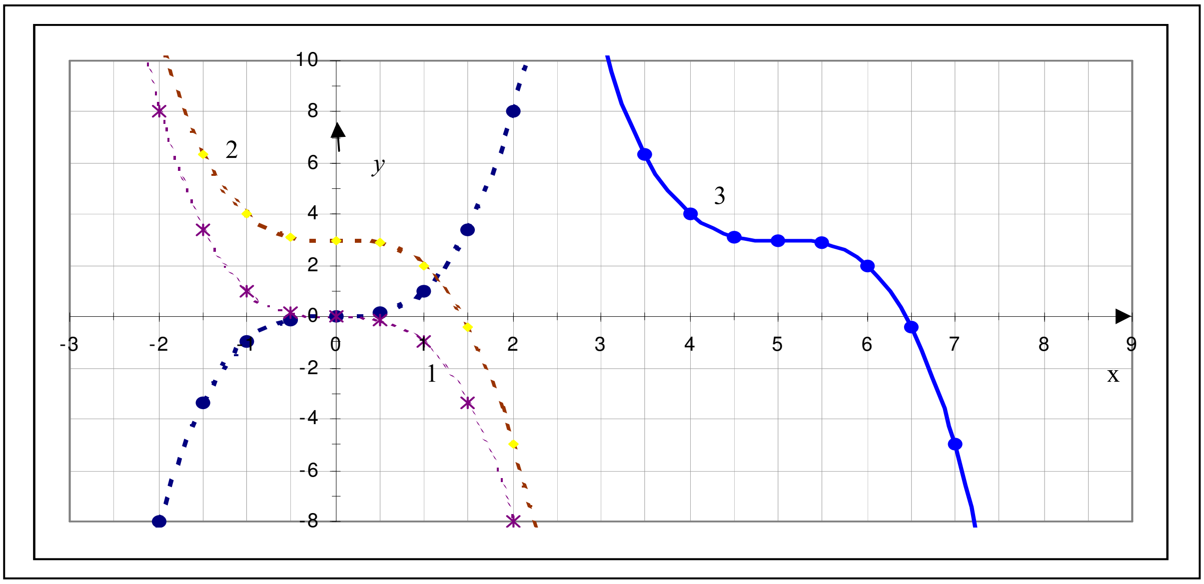
COMBINACIÓN DE TRANSFORMACIONES

Ahora ya podemos graficar otras funciones cúbicas, con base a la gráfica de x^3 transformándola según la expresión que se nos de.

Ejemplo.- traza la gráfica de la función F(x) = - (x – 5)^3 + 3.

Solución

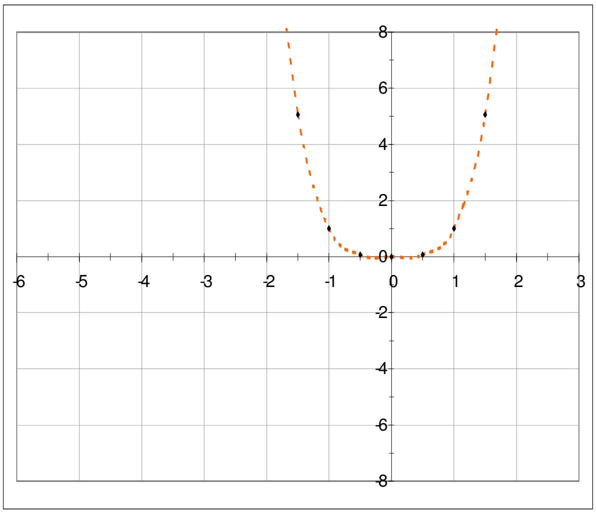
El signo negativo que se encuentra fuera del paréntesis hace que se invierta o refleje en el eje x como se ve en la siguiente gráfica (1); como a toda la parte que esta al cubo le sumamos 3 la gráfica debe subir 3 unidades (2); el 5 se le esta restando a x, así que la grafica se debe desplazar a la derecha 5 unidades (3) y esta es la gráfica que corresponde a F(x)

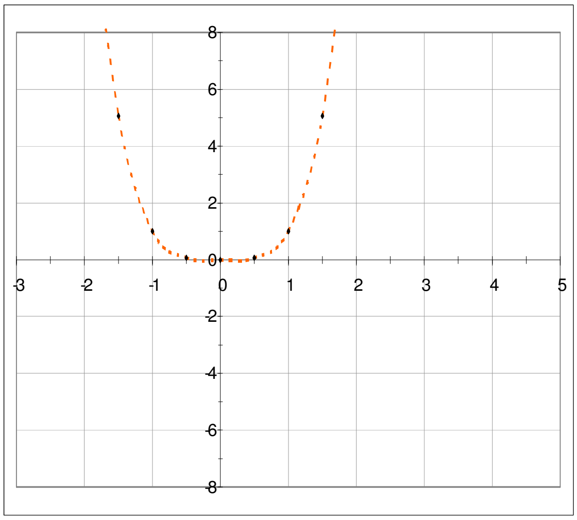


El dominio de la función de F(x) son todos los números reales ya que para cualquier valor que le des a x siempre tienes un valor de F(x) y estos valores se encuentran sobre todo el eje y por lo que su rango también son todos los números reales; en cuanto a sus raíces una de ellas es real porque solo cruza al eje x una sola vez y directamente las otras dos son complejas, ¿cuál es el valor de su raíz real? ________________________

Ejercicio.- Traza la gráfica de cada función

a) $G(x) = (x + 3)^4 - 2$ b) $H(x) = -(x - 2)^4 + 3$





ALARGAMIENTO Y ENCOGIMIENTO VERTICAL

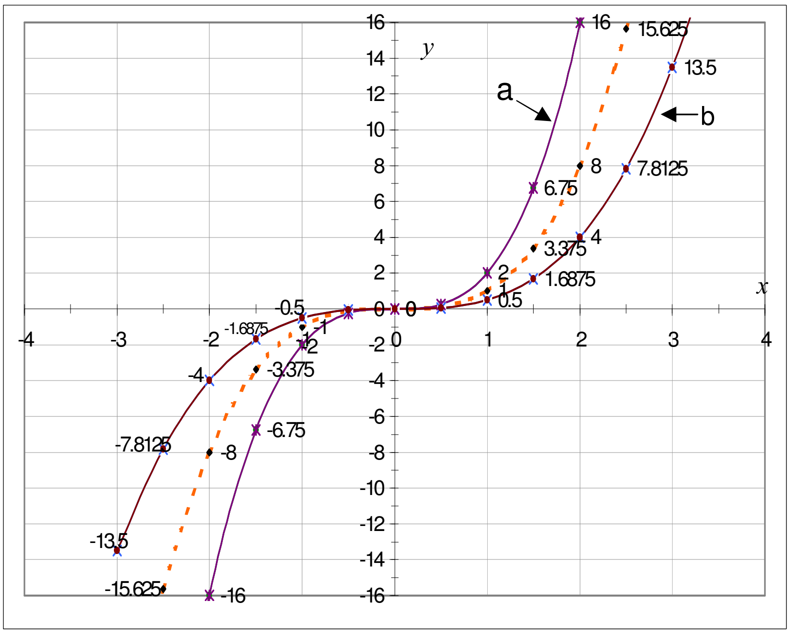
Para que observemos el alargamiento o encogimiento vertical de las gráficas de las funciones potenciales (x^n), vamos a multiplicarlas por un número positivo a ya sea mayor que 1 ($a > 1$) para que las curvas resulten más alargadas o angostas, o entre cero y 1 ($0 < a < 1$) para que la forma de las curvas sea más ancha (se encoge verticalmente); esto es otra de las cosas que seguramente aprendiste en tu curso de matemáticas 2, ahora lo haremos con las funciones cúbicas y cuartas.

Ejemplo.- dibuja la gráfica de cada función

a) $f(x) = 2x^3$ b) $g(x) = \frac{1}{2}x^3$

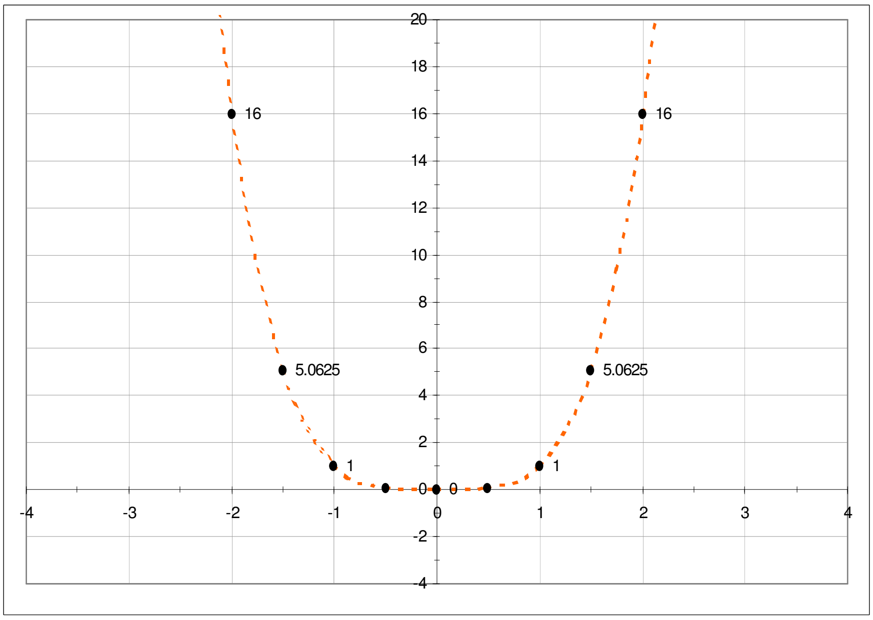
Solución

Empezamos por trazar la función cúbica $y = x^3$ y cada valor de y que tengamos lo multiplicamos por 2 para el inciso a), puedes ver que se pega más al aje y tanto arriba como abajo (se alarga verticalmente); para el inciso b) multiplicamos a y por ½ y ahora la curva se aleja del eje y o sea que se abre o se hace más ancha (se encoge verticalmente)



Ejercicio.- Dibuja la gráfica de cada función

a) $F(x) = 2x^4$ b) $G(x) = \dfrac{1}{2}x^4$ c) $H(x) = \dfrac{1}{3}x^4$



Escribe lo que puedes observar en las gráficas de estas funciones: ___________

____

____

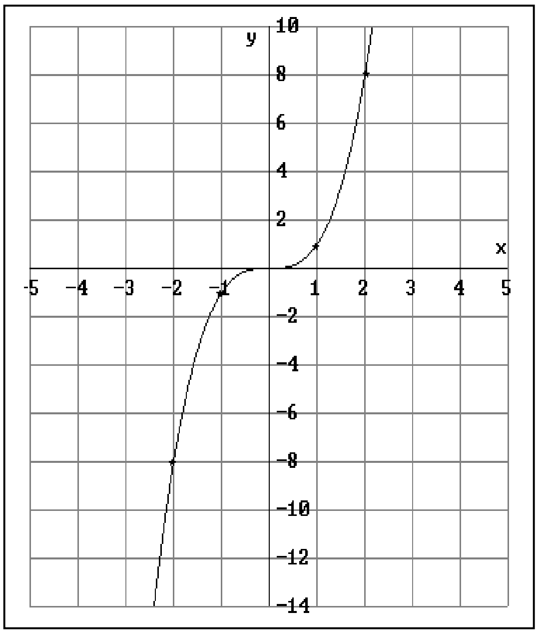
____

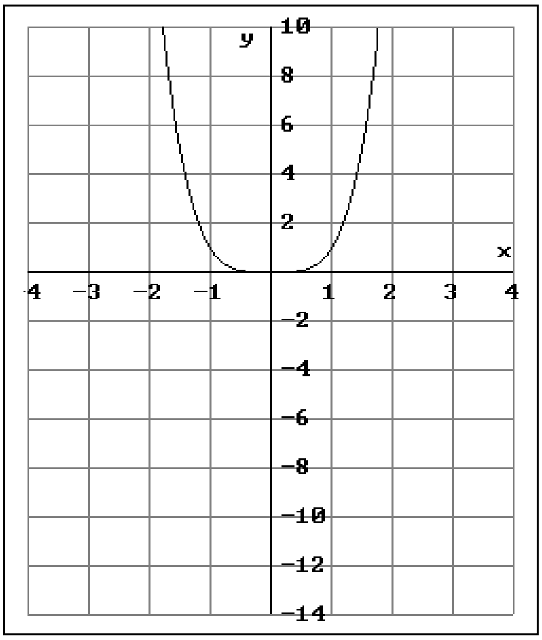
____

Ejercicio.- Traza la gráfica de cada una de las siguientes funciones según en el plano que le corresponda marcándolas con diferentes colores.

a) F(x) = $2x^3 - 3$ b) G(x) = $-2x^4 + 4$ c) H(x) = $3x^4 - 2$ d) J(x) = $-\frac{1}{3}x^3 - 4$

e) K(x) = $-\frac{1}{2}x^4 - 3$ f) L(x) = $3x^3 + 1$

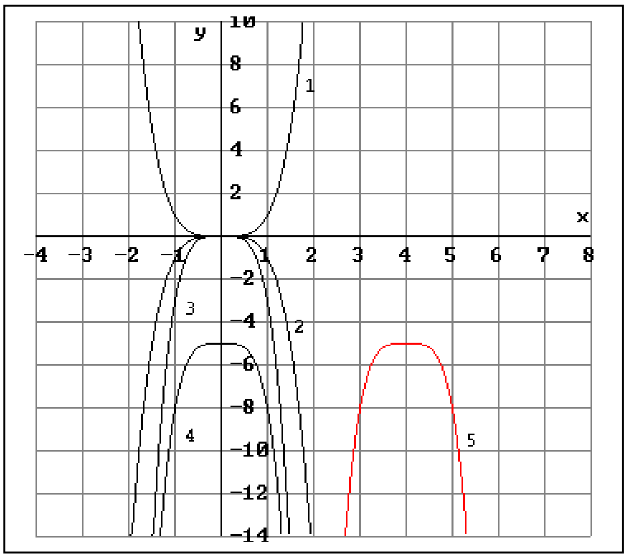




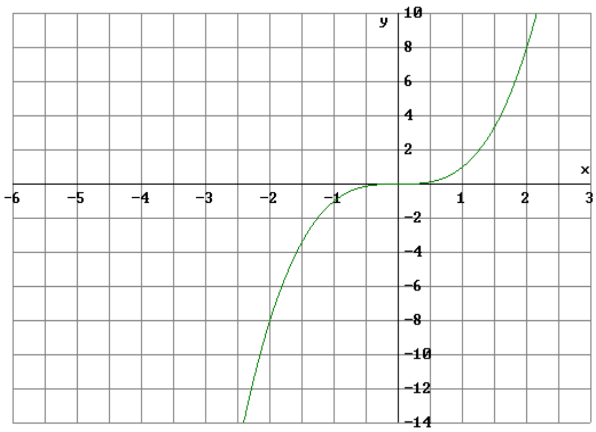
Ejemplo.- Bosqueja la gráfica de la siguiente función F(x) = $-3(x-4)^4 - 5$

Solución

Empezamos por trazar la función cuarta $y = x^4$ (1), tanto el signo negativo como el 3 multiplican a x^4, así que el signo la refleja en el eje x (2) y el 3 la alarga verticalmente (3); como se le esta restando 5 baja 5 unidades (4) y nos falta dentro del paréntesis estamos restando 4 a x por lo que se debe recorrer 4 unidades a la derecha (5) y esta es la gráfica de la función $\mathrm{F}(x)$

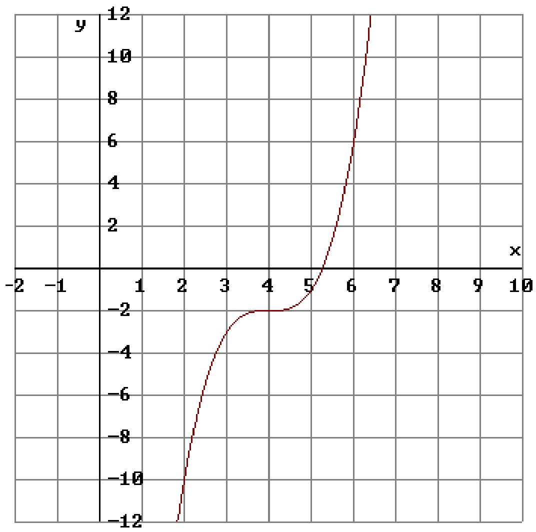


Ejercicio.- Dibuja la gráfica de la función $f(x) = -2(x+3)^3 - 4$



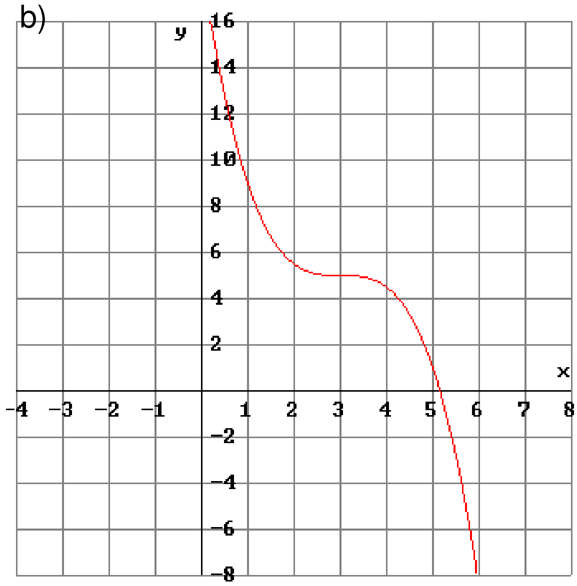
Ejercicio.- Las siguientes gráficas son el resultado de aplicar una serie de transformaciones a la función $y = x^3$. Describe las transformaciones de manera verbal y escribe la función que representan.

a)



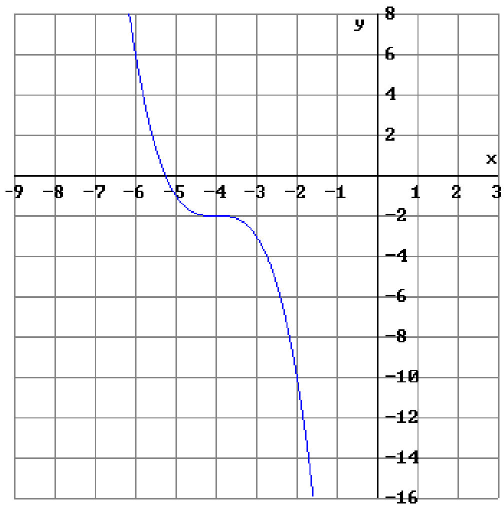
y
x
12
10
8
6
4
2
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-2 -1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

b)



y
x
16
14
12
10
8
6
4
2
-2
-4
-6
-8
-4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7 8

c)



y
x
8
6
4
2
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3