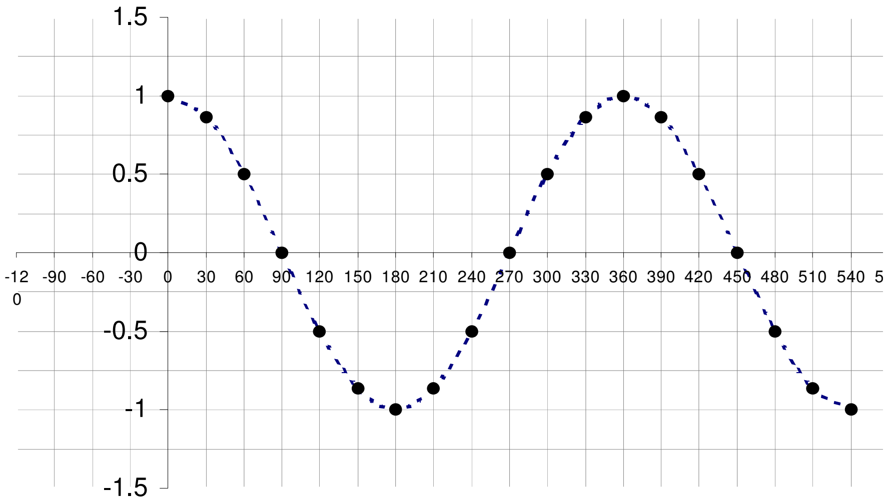
Gráfica de la función coseno de x (*cos x*)

Empecemos por trazar la gráfica de la función coseno de x que se simboliza como $cos\ x$, x es el argumento de la función. El dominio de esta función son todos los valores que puede tomar x, démosle valores en grados, pero recordando que estos grados se pueden transformar a radianes y estos son números reales.

Como ya vimos los grados son positivos si se miden en sentido contrario a las manecillas del reloj y negativos si se miden en el mismo sentido, con ayuda de tu calculadora evaluemos algunos valores de x en grados para delinear a esta función, también puedes darle valores en radianes usando el modo en radianes, trata de reproducir los valores que se encuentran en la siguiente tabla completándola y traza la gráfica.

x (grados)	$f(x)=cosx$
-90	
-60	
-30	
0	1
30	0.866
60	
90	0
120	
150	-0.866
180	-1
210	
240	-0.5
270	
300	0.5
330	0.866
360	
390	0.866
420	
450	0
480	
510	-0.866
540	



Como te puedes dar cuenta al marcar la gráfica si sigues aumentando los grados la curva se va repitiendo y que si le das valores negativos, los valores de la función se van repitiendo, o sea que su gráfica es como una onda que se extiende desde menos infinito hasta infinito, repitiéndose la curva cada ________, esta es la razón por la cual se dice que es **periódica** y su período es de 360º que en términos de π equivale a 2π. ¿Cuál es el dominio de la función?

D= ____

También podrás observar que los valores que toma la función no pasan de 1 ni bajan de –1, oscila entre estos valores, por lo tanto el rango de esta función es:

R = ___________________________________

Además cruza al eje x en: ____

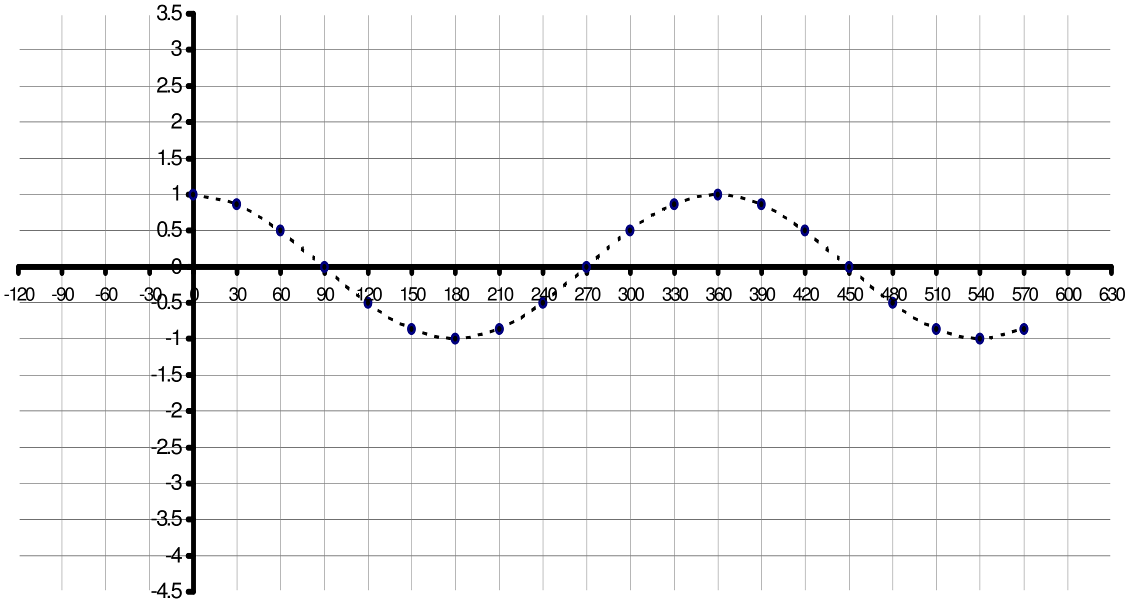
Ahora hagamos lo mismo que hemos hecho con las funciones vistas en las unidades anteriores primero veamos que pasa si le sumamos o restamos una cantidad determinada.

Ejemplo 1) Traza la gráfica de las siguientes funciones y da su dominio y su rango:

a) $f(x) = \cos x + 2$ b) $g(x) = \cos x - 3$

Solución: Completa la siguiente tabla en base a la tabla que ya hiciste para la función $\cos x$ y localiza los puntos en el plano (traza la gráfica de cada una de las funciones)

x (grados)	$f(x)=$ $\cos x + 2$	$g(x)=$ $\cos x - 3$
-90		
-60		
-30		
0	3	-2
30		
60		
90	2	-3
120		
150		
180	1	-4
210		
240		
270	2	-3
300		
330		
360	3	-2
390		
420		
450	2	-3
480		
510		
540		



Si observas las dos gráficas y las comparas con la original notaras que lo único que paso es que una subió dos unidades y la otra bajo tres unidades, así que el dominio y el rango para cada una de ellas es:

a) f(x) = cos x + 2,   D= ______________________   R = _____________________

b) g(x) = cos x − 3,   D = ______________________   R = _____________________

Y ambas funciones se siguen repitiendo cada _________, o sea que su periodo es: P = ________.
¿Qué puedes concluir de lo anterior? ____

____

____

____

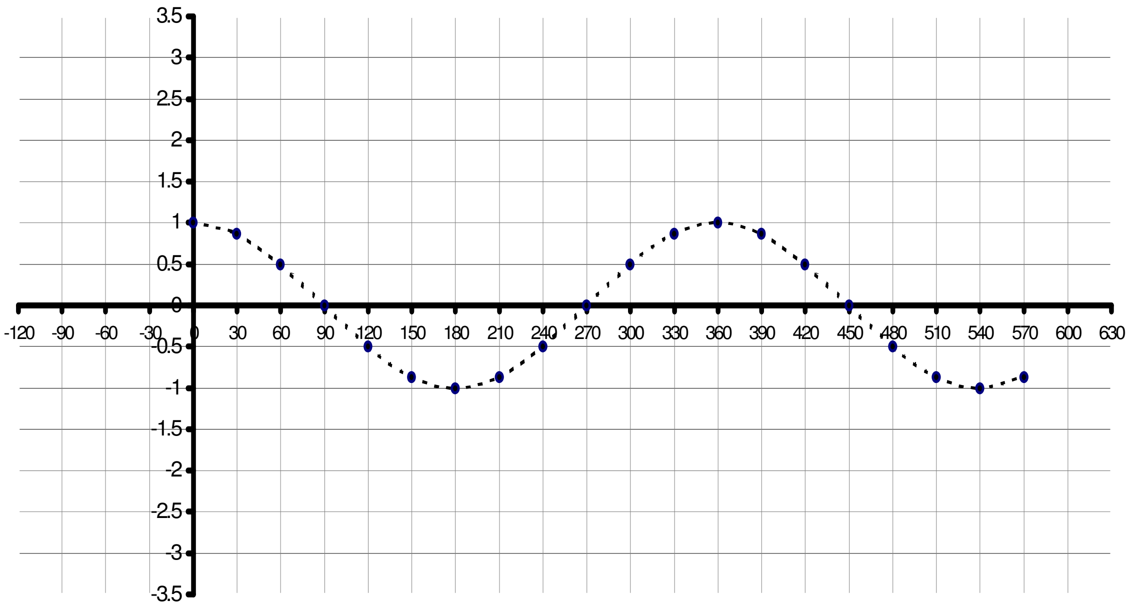
Estas funciones no cruzan el eje x por lo tanto no tienen **ceros,** ¿hasta qué cantidad se le tendría que sumar o restar para que cruzaran o tocaran el eje x? ____

Ejemplo 2) Ahora vamos a multiplicar por una cantidad, traza las gráficas de las siguientes funciones:

a) F(x) = $2 \cos x$ b) G(x) = $\frac{1}{2} \cos x$ c) H(x) = $3 \cos x$

Solución: Completa la tabla y traza las respectivas gráficas en el plano.

X	F(x)=2*cos x*	G(x)=½ *cos x*	H(x)=3 *cos x*
-90			0
-60			
-30			
0	2	0.5	3
30	1.7320		
60	1	0.25	
90			0
120		-0.25	
150	-1.7320		
180	-2		-3
210			
240	-1	-0.25	-1.5
270	0		
300			1.5
330	1.7320		
360	2	0.5	3
390	1.7320		
420			
450	0	0	0
480	-1		
510			
540	-2	-0.5	-3
570			-2.598



Puedes observar que para las tres funciones su periodo sigue siendo P = ________, o sea que se repite cada 360°; su dominio es el mismo también

D = ____

Pero el rango cambia para cada una de ellas ahora es:

R_F = _____________________________________

R_G = _____________________________________

R_H = _____________________________________

Cruzan al eje x en: ____

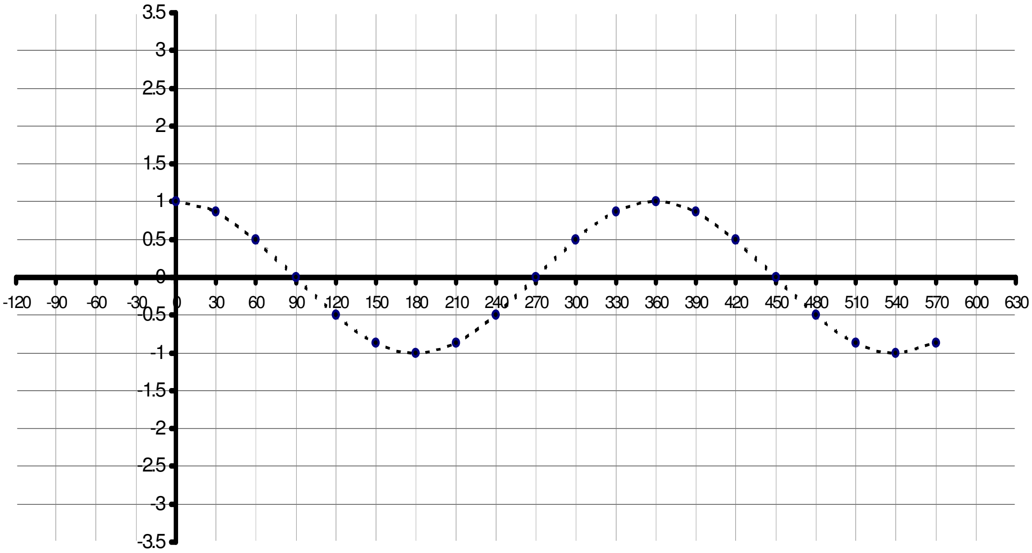
A la cantidad por la cual multiplicamos a la función le vamos a llamar **amplitud** y lo que hace esta cantidad es: ___________________________________

Ahora vamos a ver que pasa si esta cantidad es negativa.

Ejemplo 3) Traza las gráficas de las siguientes funciones y analízalas:
a) $g(x) = -\cos x$ b) $h(x) = -\frac{1}{2}\cos x$ c) $j(x) = -3\cos x$

Solución: Completa la tabla

x (*grados*)	$G(x) = -\cos x$	$h(x) = -\frac{1}{2}\cos x$	$j(x) = -3\cos x$	x (*grados*)	$G(x) = -\cos x$	$h(x) = -\frac{1}{2}\cos x$	$j(x) = -3\cos x$
-90			0	270	0		
-60				300			–1.5
-30				330	–1.7320		
0	–2	–0.5	–3	360	–2	–0.5	–3
30	–1.7320			390	1.7320		
60	–1	–0.25		420			
90			0	450	0	0	0
120		0.25		480	1		
150	1.7320			510			
180	2		3	540	2	0.5	3
210				570			2.598
240	1	0.25	1.5				



Ahora la parte positiva se convierte en negativa y la negativa se convierte en positiva, al multiplicar la función por un número negativo la gráfica se ______________________________

Los ceros de la función no cambian ya que siguen cruzando al eje x en 90° + n180° con n = ±1, ±2, ...

El dominio es el mismo para las tres funciones: D = __________________

Y el intervalo del rango se hace más ancho o más angosto según sea la magnitud de la amplitud:

R_g = _______________________

R_h = _______________________

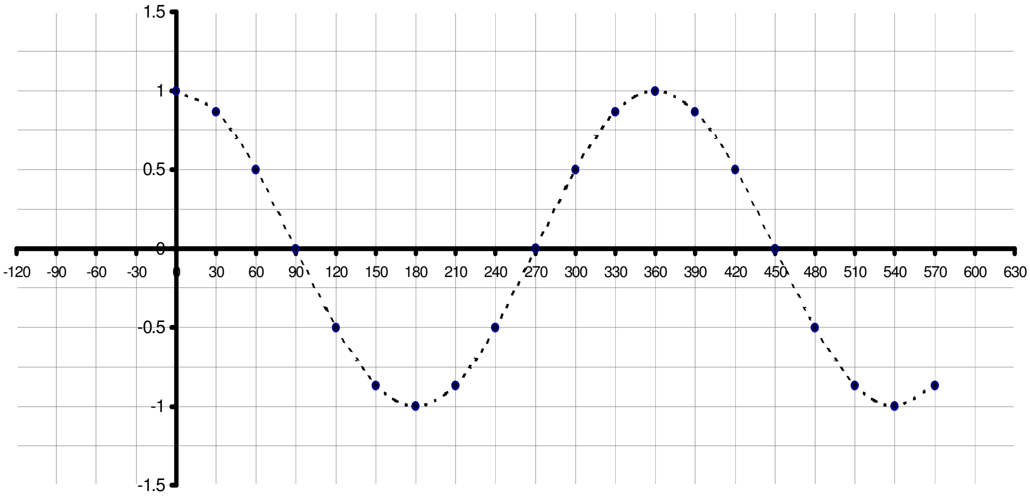
R_j = _______________________

Cuándo le agregamos o restamos un valor a x, ¿Crees saber que es lo que pasará? Si no es así haz la siguiente tabla y traza la gráfica.

Ejemplo 4) A la función $\cos x$, al valor de x vamos a sumarle y restarle 30°, vamos analizar las funciones: $F(x) = \cos(x + 30°)$ y $G(x) = \cos(x - 30°)$

Solución: Completa la tabla y traza las gráficas.

x	$\cos x$	$F(x) = \cos(x + 30°)$	$G(x) = \cos(x - 30°)$	X	$\cos x$	$F(x) = \cos(x + 30°)$	$G(x) = \cos(x - 30°)$
-90	0			210		-0.5	-1
-60				240	-0.5		
-30		1	0.5	270	0	0.5	-0.5
0	1	0.8660	0.866	300			0
30	0.8660		1	330	0.8660	1	
60		0		360	1		0.8660
90	0		0.5	390		0.5	1
120	-0.5	-0.8660	0	420	0.5	0	
150				450	0		0.5
180	-1	-0.8660	-0.8660	480		-0.8660	0



Su dominio y su rango siguen siendo los mismos que la función ________
Y cuando le aumentamos 30° la gráfica se recorre ________________________
Cuando le restamos 30° la gráfica se recorre ____________________________
¿Cambia su periodo? _______, P = ________, su amplitud A = ________. ¿Qué podemos concluir? ____

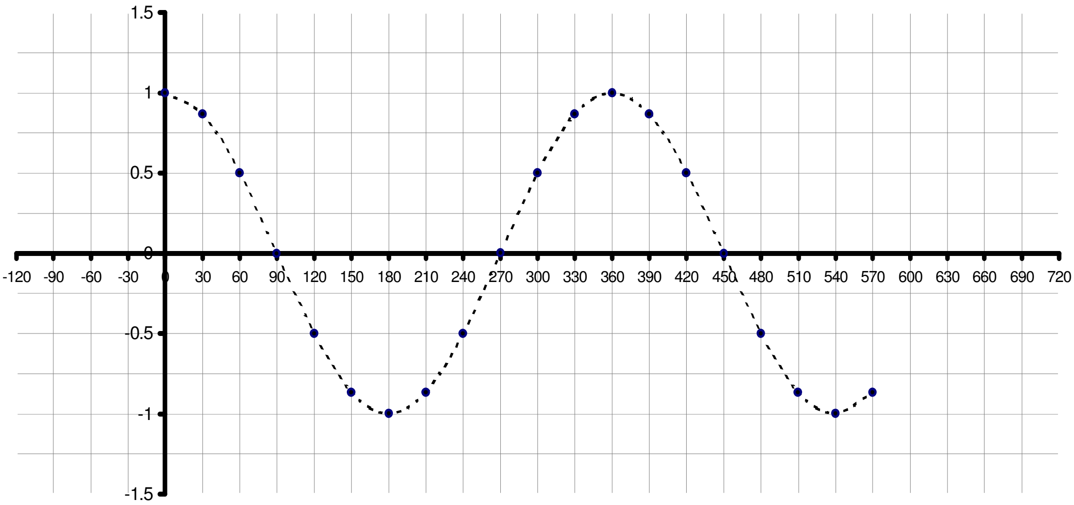
____

____

____

Ejemplo 5) Si a x la multiplicamos por un número y luego aplicamos la función coseno, veamos que pasa; analiza las siguientes funciones:
a) $f(x) = \cos 2x$ b) $g(x) = \cos 3x$ c) $h(x) = \cos (0.5\,x)$
Solución: Completa la tabla y traza la gráfica

X	$\cos x$	$f(x) = \cos 2x$	$g(x) = \cos 3x$	$h(x) = \cos (0.5\,x)$	X	$\cos x$	$f(x) = \cos 2x$	$g(x) = \cos 3x$	$h(x) = \cos (0.5\,x)$
-90					270	0	-1	0	-0.7071
-60					300	0.5	-0.5	-1	
-30					330				
0	1	1	1	1	360	1	1		-1
30	0.8660	0.5		0.9659	390		0.5	0	-0.9659
60	0.5		-1		420	0.5			-0.8660
90	0	-1		0.7071	450	0	-1	0	
120	-0.5		1	0.5	480		-0.5	1	-0.5
150	-0.8660	0.5			510	-0.8660			-0.2588
180	-1	1	-1	0	540	-1	1		
210	-0.8660			-0.2588	570		0.5		0.2588
240	-0.5	-0.5		-0.5	600				



Su dominio sigue siendo, todos los números reales y los valores que toman las funciones siguen estando entre la franja desde –1 hasta 1 así que su rango tampoco cambia esta en el intervalo ___________

Si te das cuenta entre 0° y 360° la función $f(x) = cos\ 2x$ se duplica o sea que la “uve” se repite dos veces esto quiere decir que su periodo ahora es de P = ____ = 360°/2; para $g(x) = cos\ 3x$ la “uve” se repite cada _______ así que su periodo es P = ________; mientras que para $h(x) = cos\ (0.5\ x)$ la “uve” se repite hasta los _______, por lo que su periodo es P = ______= ________. Con esto podemos afirmar lo siguiente:

Si a x la multiplicamos por un número b, y luego aplicamos la función coseno, su gráfica cambia modificándose su periodo como P = ________. O sea que entre 0° y 360° se repite b veces la “uve”.

Cambiaron los ceros de cada una de las funciones ________. Enuméralos:

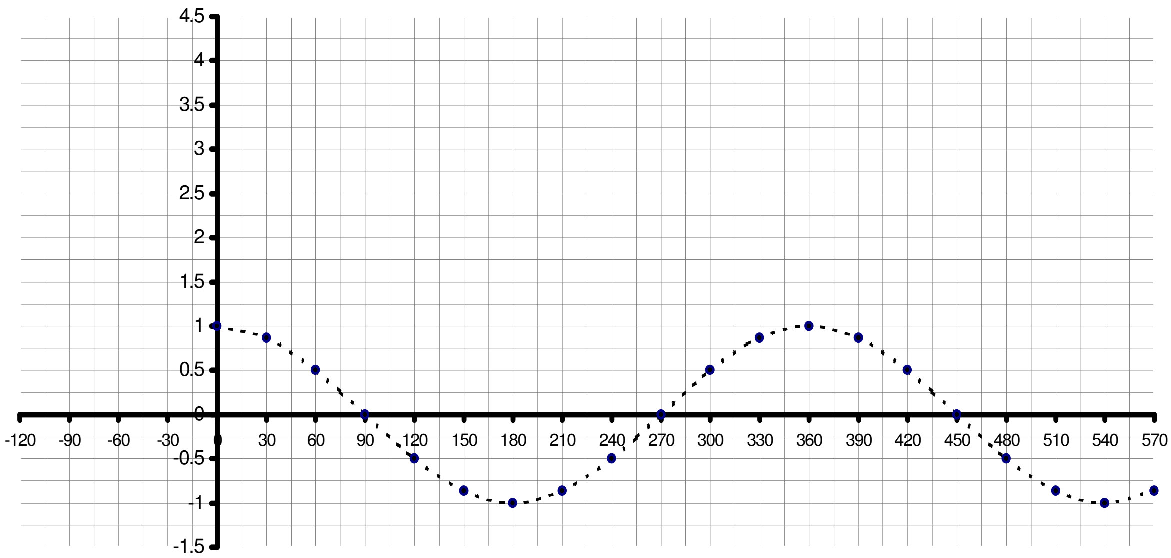
a) ____

b) ____

c) ____

Ejemplo 6) Analiza la función G(x) = - cos2x + 3 y traza su gráfica.
Solución: El 2 que esta multiplicando a x hace que cambie su periodo, ahora se va a repetir 2 veces entre 0° y 360°, así que tiene un periodo de: P = _________
El signo menos que se encuentra antes del coseno hace que se invierta sobre el eje ______, por lo que la “uve” se voltea, ahora el 3 se lo estamos sumando a la función coseno así que sube 3 unidades, cuando x= 0, G(0) = -1 + 3 = 2, ahora a la mitad del periodo x=90°, la original valdría –1 pero como se invierte es 1 y además le sumamos 3 nos queda G(90°) = 1+3=4; donde termina la “uve” x= 180°

en la original sería 1 pero la invertimos así que es –1 y le sumamos 3 nos queda G(180°) = -1+3= 2 con esto ya la podemos delinear y dar el dominio.
D = ___________________________ y el rango, R = __________________________
Así que en base a la original delinea a G(x).



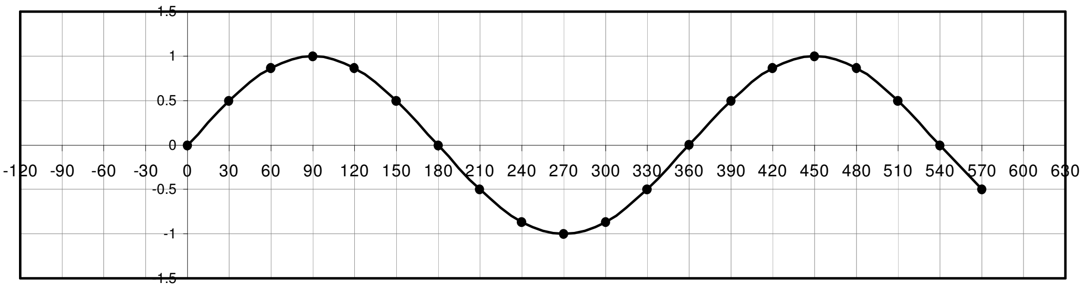
G(x) tiene ceros __________, ya que ________________________________, y su amplitud vale __________.

Ejercicios) Analiza las siguientes funciones y traza su gráfica:
1) F(x) = $4 \cos x$ 2) G(x) = $5 \cos x - 2$ 3) H(x) = $-\cos x + 1$
4) I(x) = $\cos (x + \pi/6)$ 5) K(x) = $-\cos (x - 40°)$ 6) M(x) = $-3 \cos x$

Gráfica de la función seno de x ($sen\ x$)
Nuevamente vamos a darle valores a x en grados y apliquemos la función seno, completa la tabla verificando los valores que se dan y recuerda el modo en que debe estar tu calculadora es en grados (deg o D):

x	$f(x)=sen\ x$	X	
-90		270	-1
-60		300	
-30		330	-0.5
0	0	360	
30	0.5	390	0.5
60	0.8660	420	0.866
90	1	450	1
120		480	
150		510	
180	0	540	0
210		570	
240	-0.8660	600	

f(x) = sen x

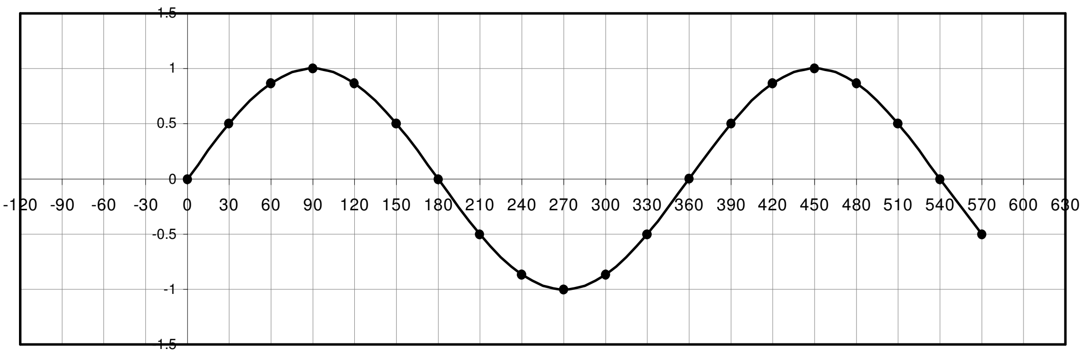


¿Cuál es el dominio de la función? D = ________________________________

y el rango, R = __________________________________

La forma de esta función ahora es una onda que empieza en 0° y termina en 360° y vuelve a repetirse hacia delante, en los negativos, empieza en –360° y termina en 0° así que podemos decir que es simétrica con respecto al origen. Se repite cada _________ por lo que su periodo es P = _____ = ______. Enumera los ceros de esta función: ......, -180°, ______, ______, ______, ... a partir de 0° cada ______.

Si sobre esta misma gráfica trazas la función $g(x) = cos\ x$

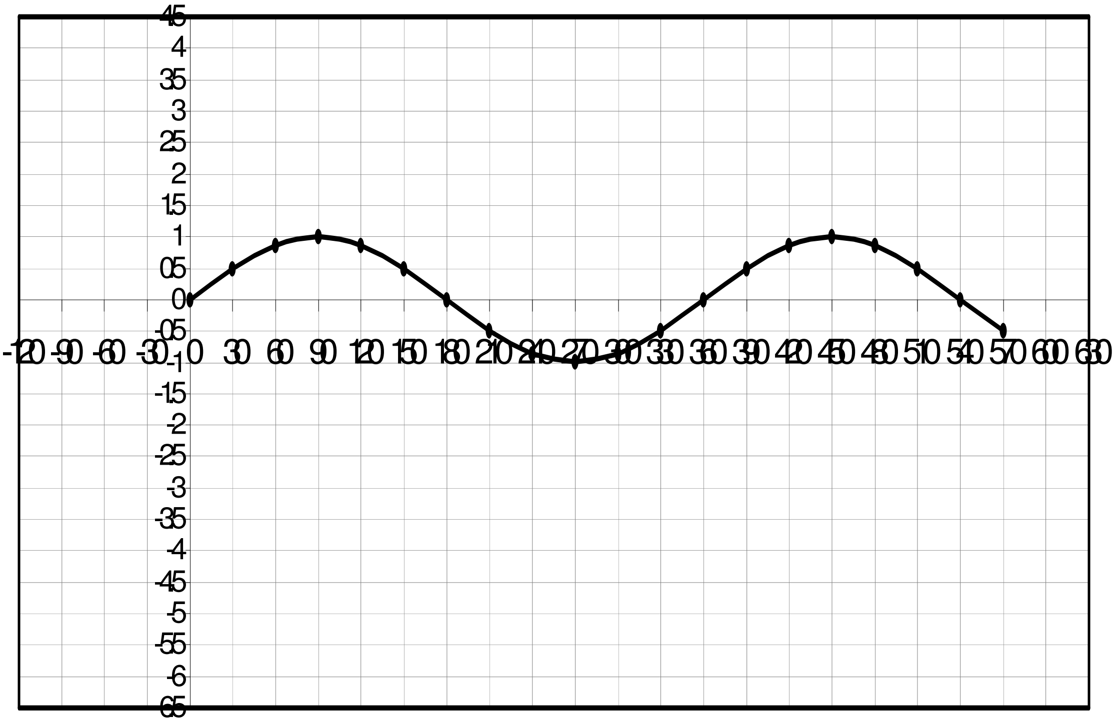


Si te das cuenta es como si recorrieras hacia la derecha 90° la función $cos\ x$, o sea que $sen\ x$ = __________, así que las dos funciones se comportan de manera similar su dominio son todos los números reales y su rango va desde –1 hasta 1 y cada 360° se repiten. Ahora vamos hacer lo mismo que hicimos con la función coseno, solamente que sin hacer las tablas, solamente trata de comprobar para algunos valores.

Ejemplo1) Analiza cada una de las siguientes funciones y traza su gráfica:
a) f(x) = sen x – 5 b) g(x) = sen x + 3

Solución: En el inciso a) primero le damos un valor a x en grados y aplicamos la función seno y luego le restamos 5 unidades. Si recuerdas cuando hicimos esto

con la función coseno de x, simplemente se recorrió sobre el eje y, (bajo), así que teniendo la original de la función seno traza la función $f(x) = sen\ x - 5,$ bajándola 5 unidades.
En el inciso b) aplicamos la función seno a x y le sumamos 3 unidades, por lo que ahora subimos 3 unidades la original y tenemos la gráfica de $g(x) = sen\ x + 3$



El dominio es D_f = ______________________ y el rango, R = __________________

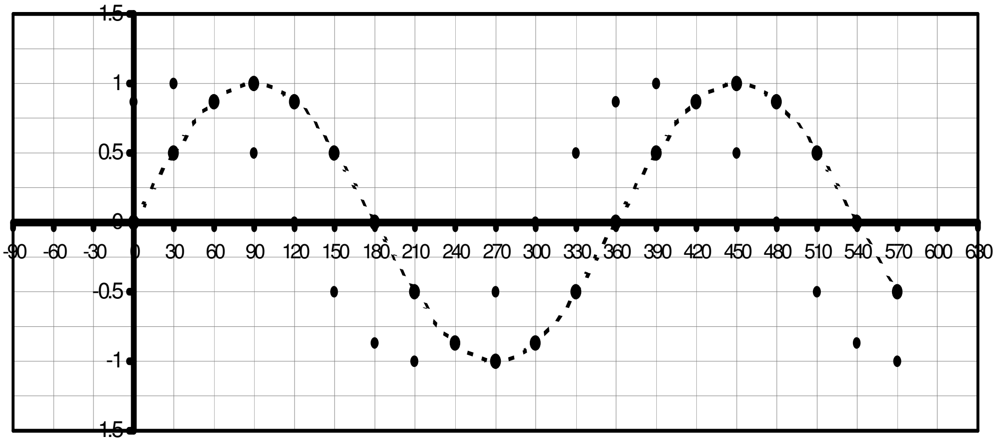
D_g = _______________________y su rango, R = ________________

Su periodo es P = ________ y su amplitud A = ________.

Los ceros de la función son: _________________________________

Así que si a la función $sen\ x$ le sumamos o restamos una cantidad dada, la gráfica se desplaza sobre el eje ____, ya sea ____________ o hacia ________

Ejemplo 2) Analiza la función h(x) = sen (x + 60°) y traza su gráfica.
Solución: ¿Crees saber como es la gráfica?. Lo que sucedía con la función coseno era que se recorría sobre el eje x, así que dale valores a x y ahora evalúa la función sen (x + 60°) y confirma que lo que tienes que hacer es recorrer cada punto de la original 60° hacia la izquierda



El dominio y el rango de esta función son:
D = ________________________, R = ________________________
El periodo es P = _______, tiene una amplitud A = ________

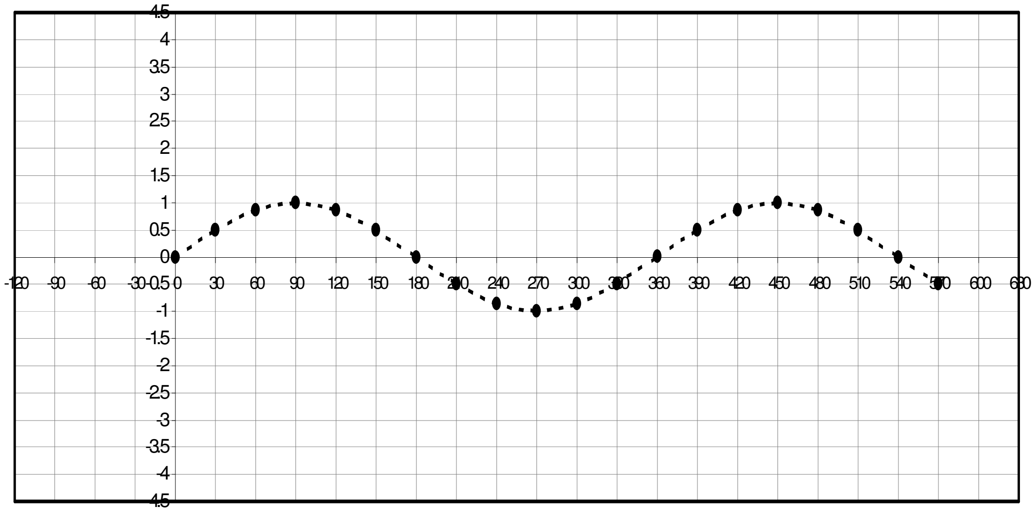
Enumera los ceros de la función: _____________________________________

Si a x le aumentamos o restamos cierta cantidad y luego aplicamos la función seno, la gráfica se desplaza sobre el eje _______, ya sea a la __________ o a la ____________ respectivamente.

Ejemplo 3) Analiza y traza la gráfica de cada una de las funciones:
a) F(x) = – 4 sen x b) G(x) = 3 sen x

Solución: Para el inciso a) la función esta multiplicada por –4, así que el menos la invierte sobre el eje ______ y el 4 cambia su amplitud que ahora es de A= ______
Así que su dominio es. D = _______________________, y como la amplitud es 4, el ancho del rango se hace más grande, R = ____________________, su periodo es P = ______; con esto ya la puedes delinear comprobando para algunos valores.
Para el inciso b) la función esta multiplicada por 3 positivo así que queda de la misma forma que la original, solamente cambia su amplitud que ahora es A = ____
Su dominio es D = __________________________ y R = ____________________
P = ________, comprueba con algunos valores.

Los ceros de estas dos funciones son: ______________________________
____

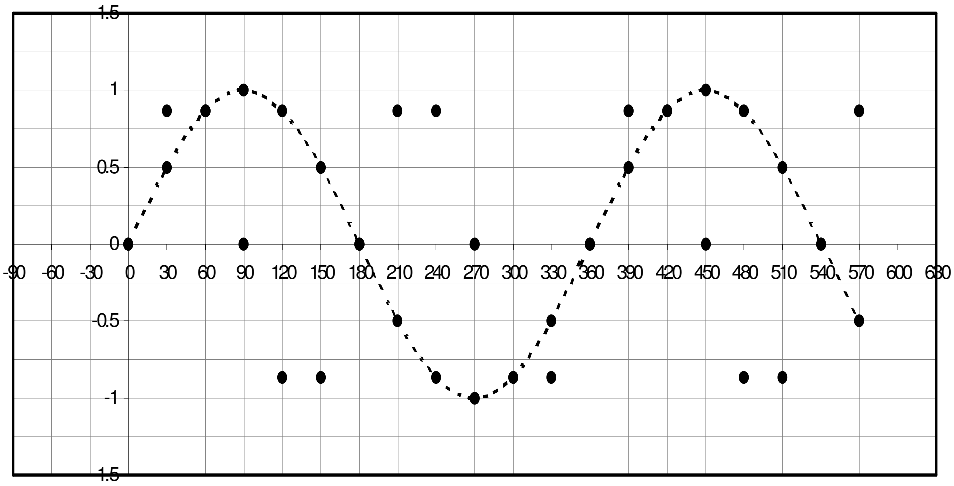


Cuando a la función seno la multiplicamos por una cantidad determinada a lo que sucede es que cambia su ____________ y si esta cantidad es negativa la invierte sobre el eje _______.

Ejemplo 4) Traza la gráfica de cada una de las siguientes funciones y analízalas:

a) M(x) = sen 2x b) P(x) = sen 3x

Solución: Como se esta multiplicando a x en un caso por 2 y en otro por 3, lo que sucede es que su periodo cambia como en la función coseno y ahora se va a repetir dos veces en el intervalo de 0° a 360° en el inciso a) y 3 veces en el inciso b), en el primer caso su periodo es P = _______ y en el segundo caso P = ______ Comprueba con algunos valores.



Los ceros de cada una de las funciones son:

Si a x la multiplicamos por un número b y luego aplicamos la función seno, la gráfica se va a repetir b veces en el intervalo de 0° a 360°, o sea que su periodo ahora es P = _________, su dominio son todos los números ____________ y su rango va desde _____ hasta ______.

Ejercicios) Analiza cada una de las siguientes funciones y traza su gráfica:

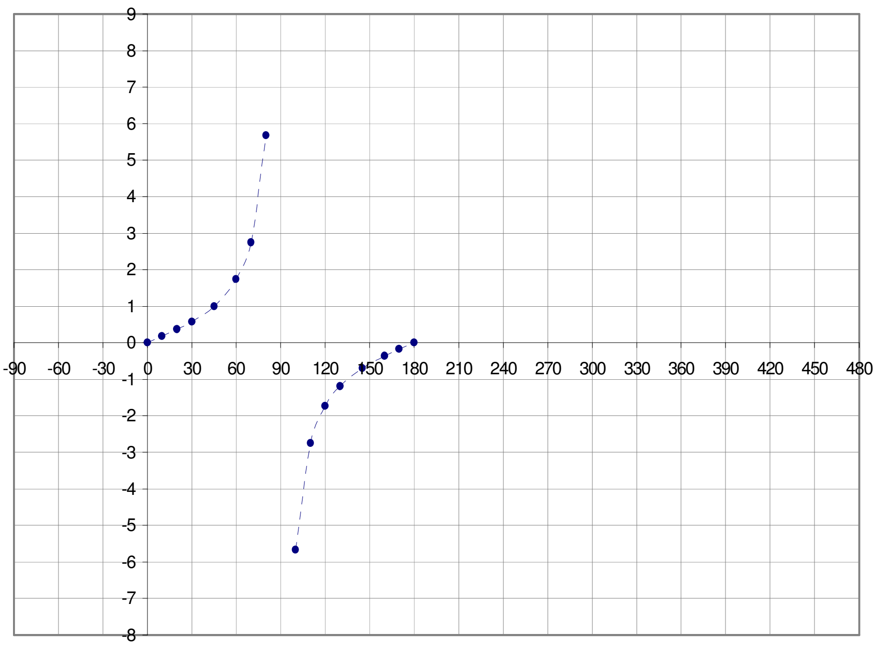
1) $P(x) = sen\ x - 2$ 2) $Q(x) = -\ sen\ x + 4$ 3) $R(x) = -\ sen\ 3x + 2$

3) $S(x) = 5\ sen\ x$ 5) $T(x) = sen\ (x + \pi/4)$ 6) $U(x) = sen\ \pi x$

Gráfica de la función tangente de x ($tan\ x$)

Por último analicemos la función tangente de la misma manera que en las anteriores con ayuda de tu calculadora completa la siguiente tabla y marca los puntos en el plano. (puedes darle más valores para delinearla mejor)

x	$f(x)$=$sen\ x$	x	$f(x)$=$sen\ x$
-90		135	-1
-80		150	
-60		180	0
-45	-1	210	
-30		225	1
0		240	
30		260	5.67
45		270	
60		300	-1.73
80		315	-1
90		330	
120		360	0



Como te habrás dado cuenta tu calculadora marca error cuando queremos sacar tangente de 90° y para algunos múltiplos de este valor como son: _____, _____ y ______; ¿por qué crees que marque error?________________________
____

El dominio de la función tangente es el conjunto de todos los números reales, excepto los múltiplos impares de _______ (90°), mientras que su rango es: _____________________________________.

Esta función es simétrica con respecto _____________, por lo que es una función impar.

Cuando nos acercamos a 90° por la derecha por ejemplo 88°, 89° la función se extiende hacia arriba y cuando nos acercamos por la izquierda por ejemplo 92°, 91°, la función __________________________ por lo que podemos decir que x = 90° ($x = \pi/2$) es una asíntota vertical. Enumera las demás asíntotas verticales:
____
____

¿Es periódica esta función? _________, se repite cada __________, así que su periodo es P = _______= ______

En cuanto a su forma empieza en 0 y en 45° vale 1 y se extiende hacia arriba pegándose por la derecha a la asíntota $x=\pi/2$, después se extiende hacia abajo ahora pegándose por la izquierda a la asíntota y volviendo a llegar a cero cuando x = 180° ($x=\pi$) y se vuelve a repetir, así que las asíntotas están separadas ______ o π radianes.

¿Cuáles son los ceros de la función tan x? ______________________________
____

Sigamos realizando otros ejemplos para que te quede claro lo que le sucede a esta función al realizarle los diferentes cambios que ya hicimos con las funciones seno y coseno.

Ejermplo 1) Analiza las funciones y traza su respectiva gráfica,

a) $f(x) = tan\ x + 3$ b) $g(x) = tan\ x - 2$

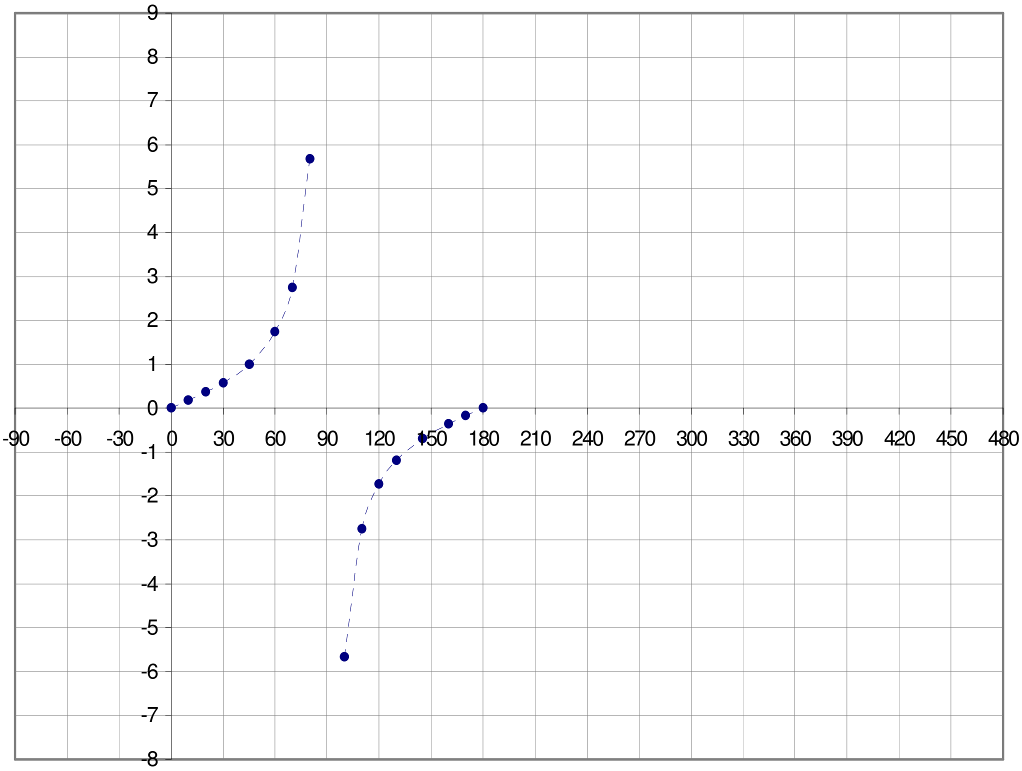
Solución: Las asíntotas siguen siendo las mismas ya que sigue siendo la misma función *tan x*, así que las marcamos sobre el plano; como a la función se le está sumando 3 unidades o restando 2 unidades la gráfica se va a desplazar sobre el eje y en el inciso a) sube 3 y en el inciso b) baja 2, con respecto a la original se sube el eje x 3 unidades o lo bajamos 2 unidades y reproducimos la gráfica, en el plano que se te da solamente trazamos un ciclo de la original, puedes trazar más ciclos.

El dominio y el rango de las funciones es:

D_f = ____________________________________, R_f = ______________________

D_g = ____________________________________, R_g = ______________________

Las asíntotas son: ____



Los ceros de la función f los podemos encontrar igualándola a cero y encontrando las raíces de esta ecuación:

$\tan x + 3 = 0$, $\tan x = -3$, la función tangente la despejamos como $\tan^{-1}$, así que $x = \tan^{-1}(-3)$, la calculadora debe estar en modo grados (deg o D), así que $x = -71.565°$ y cada 180° que es el periodo vamos encontrar otra raíz, por lo tanto las raíces de f son: $\underline{x = -71.565° + n(180°)}$ con $n = 0, \pm1, \pm2$, ...

Ahora encuentra los ceros de la función g:

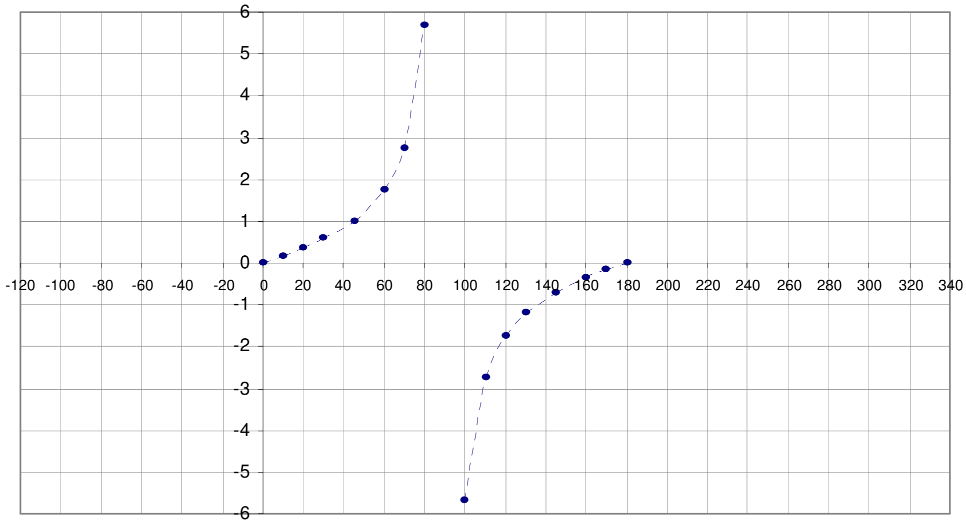
Verifica que coincidan con la gráfica.

Si a la función tangente le sumamos o restamos una cantidad d que es lo que sucede: ____
____

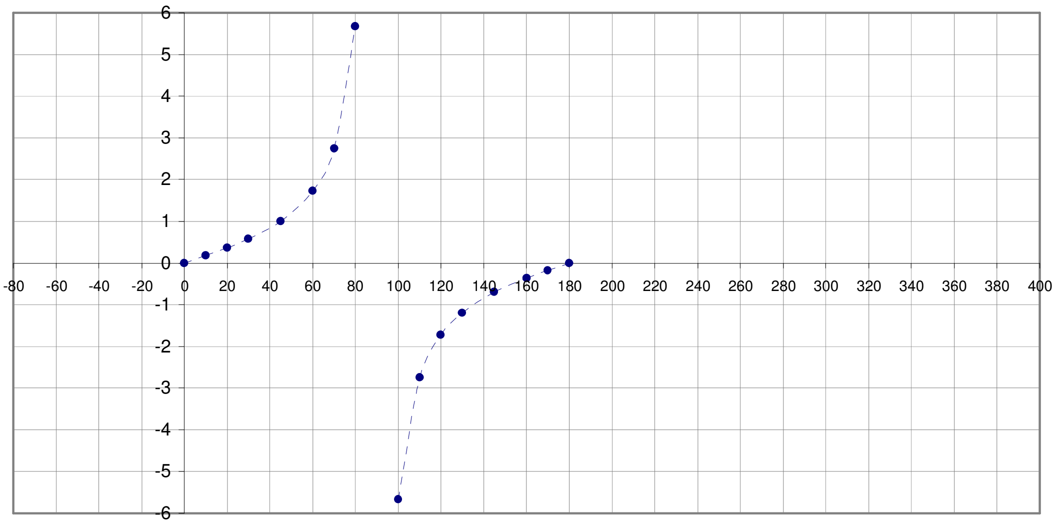
Ejemplo 2) Analiza y traza la gráfica de las funciones:

a) $F(x) = \tan(x + 20°)$ b) $G(x) = \tan(x - 40°)$

Solución: Ahora como a x le sumamos 20° o le restamos 40° la gráfica se va a desplazar sobre el eje x, 20° a la izquierda y 40° a la derecha, por lo que las asíntotas también se van a desplazar al igual que la gráfica y su periodo sigue siendo P = _________

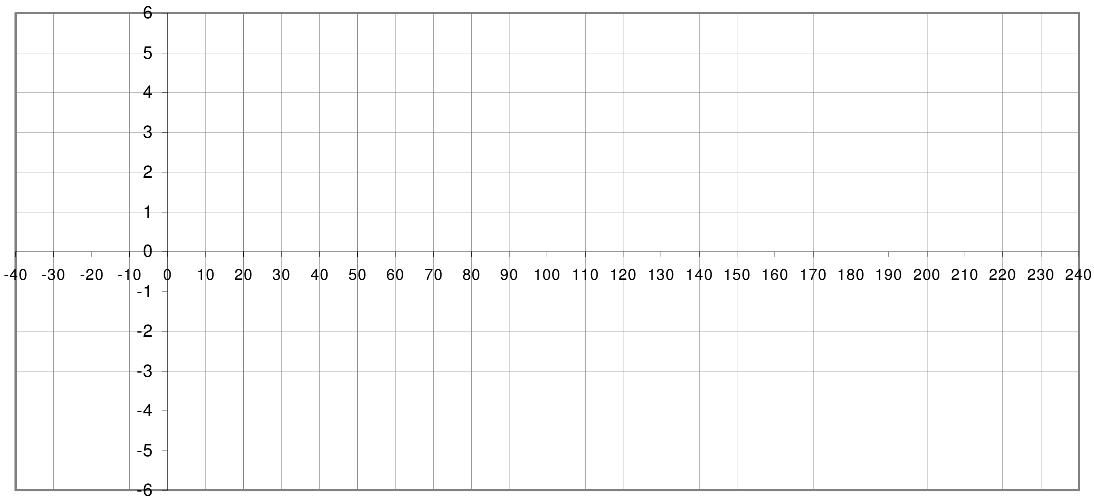


Las asíntotas verticales son: ____
D = ____, R =__________________
Los ceros de la función son: ____
Cruza al eje y en _____________.



Las asíntotas verticales se encuentran en: _______________________________
D = ____, R =__________________
Los ceros de la función son: ____
Cruza al eje y en _______.
Verifica con la calculadora algunos valores para ver si coinciden con tu gráfica.
Escribe lo que puedes concluir:

Ejemplo 3) Analiza y traza la gráfica de la función Q(x) = *tan 3x*
Solución: Como la variable x se esta multiplicando por 3 el argumento de la función tangente llega más rápido a 90°, o sea cuando x = 30°, por lo que este valor nos da una asíntota vertical y su periodo ahora es P = 180/3 = _______, después de 30° cada 60° vamos a encontrar una asíntota, por lo que las asíntotas verticales se presentan en: x = ______________________________________
Las marcamos sobre el plano y ahora el dominio y el rango son:
D = __________________________________, R = __________________
Evalúa en algunos valores entre –30 y 30° y reproduce la gráfica.

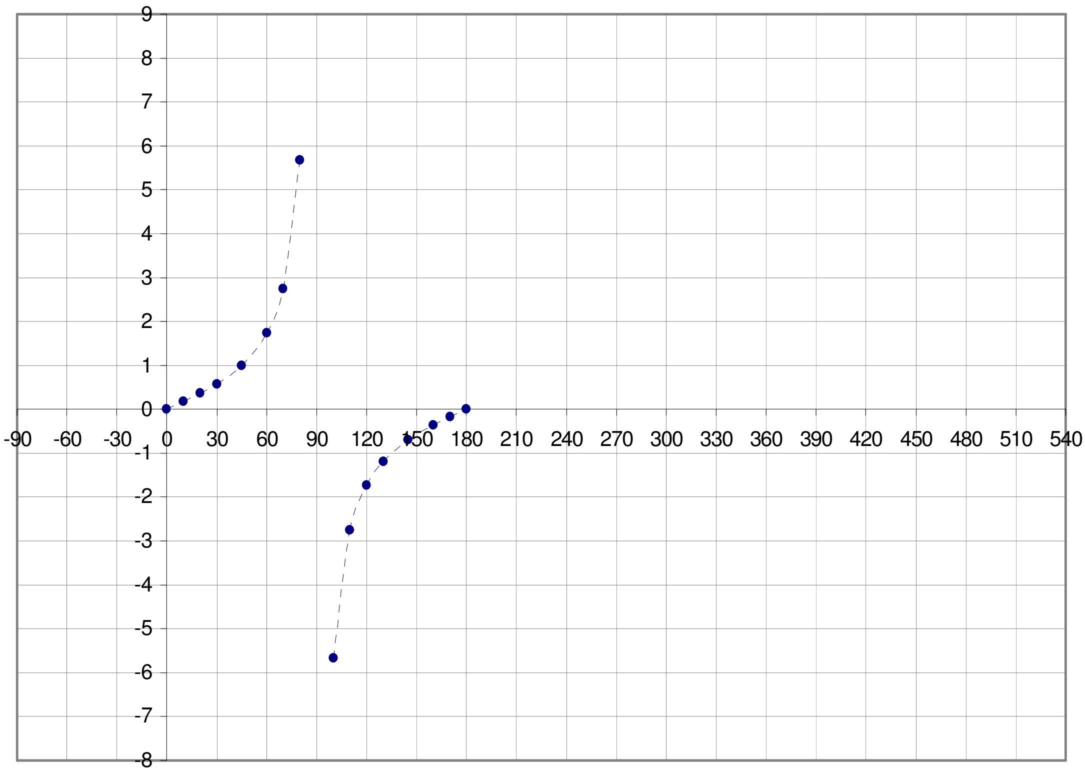


Los ceros de la función son: _______________________________________
De lo anterior, si multiplicamos a x por un número b y luego aplicamos la función tangente, lo que cambia es el ____________ y este lo calculamos como P = ____/b. Como consecuencia de esto cambia: _________________, _________________ y los ceros de la función.

Ejemplo 4) Analiza las funciones y traza su gráfica:

a) M(x) = 3 *tan x* b) N(x) = ½ *tan x*

Solución: Ahora se esta multiplicando a la función tangente por una cantidad, por lo que vamos a tener un alargamiento en la primera ya que estamos multiplicando por 3 y una compresión en la segunda por que estamos multiplicando por un número entre 0 y 1 (1/2), así que cada valor de la original se triplica para el inciso a) y de divide a la mitad para el inciso b); no cambian: las asíntotas verticales, el dominio, el rango y lo ceros de la función.
Las asíntotas verticales se presentan en: ______________________________
D= _____________________________________, R = ________________
Los ceros de ambas funciones se encuentran en : _______________________



Ejercicios) Analiza las siguientes funciones y traza sus respectivas gráficas

1) $F(x) = \tan(-x)$ 2) $G(x) = \tan 2x$ 3) $H(x) = \tan(x - \pi/2)$
4) $J(x) = \tan \pi x/2$ 5) $K(x) = -\tan x/2$ 6) $L(x) = \tan(30° - x)$

3.4 Definición de función periódica

Una función f es periódica si existe un número real positivo p tal que

$$f(x + p) = f(x)$$

para toda x del dominio de f. El número positivo p, si es que existe se llama el periodo de f.

En los casos anteriores al periodo le hemos llamado P y para la función seno y coseno es de **2π**, mientras que para la función tangente es de **π**. A la parte de las gráficas de la función seno y coseno correspondiente al intervalo [0, 2π] se le llama **ciclo** y para la función tangente un ciclo corresponde a la gráfica en el intervalo [0, π].

Asi por ejemplo puedes verificar con tu calculadora que:

$sen\,(30° + (360°) = sen\,30°$ $sen\,(30° + 3(360°)) = sen$ _______
$sen\,(45° - 2(360°)) = sen$ ______ $cos\,(60° + 5(360)) = cos$ ______
$tan\,(75° - 360°) = tan$ _______ $tan\,(\pi/3 + 3\pi) = tan$ ______
$cos\,(\pi/4 - 4\pi) = cos$ _______ $tan\,(123° + 180°) = tan$ _______

Así que: $sen\,[x + n(2\pi)] = sen\,x$, $cos\,[x + n(2\pi)] = cos\,x$ y $tan\,[x + n(\pi)] = tan\,x$

con $n = \pm1, \pm2, \pm3,$ ....