3.5 Gráficas de las funciones: $f(x) = a \text{ sen } (bx + c) + d$

$$f(x) = a \cos (bx + c) + d$$

$$f(x) = a \tan (bx + c) + d$$

en donde *a, b, c,* y *d* son números reales

En la sección 3.4 ya realizamos algunos ejemplos en donde no estaban combinados todos los parámetros pero si algunos de ellos, así que vamos a seguir haciendo algunos ejemplos y recordando la forma de cada una de las funciones originales.

Ejemplo 1) Analiza y traza la gráfica de la función $f(x) = 3 \text{ sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 5$

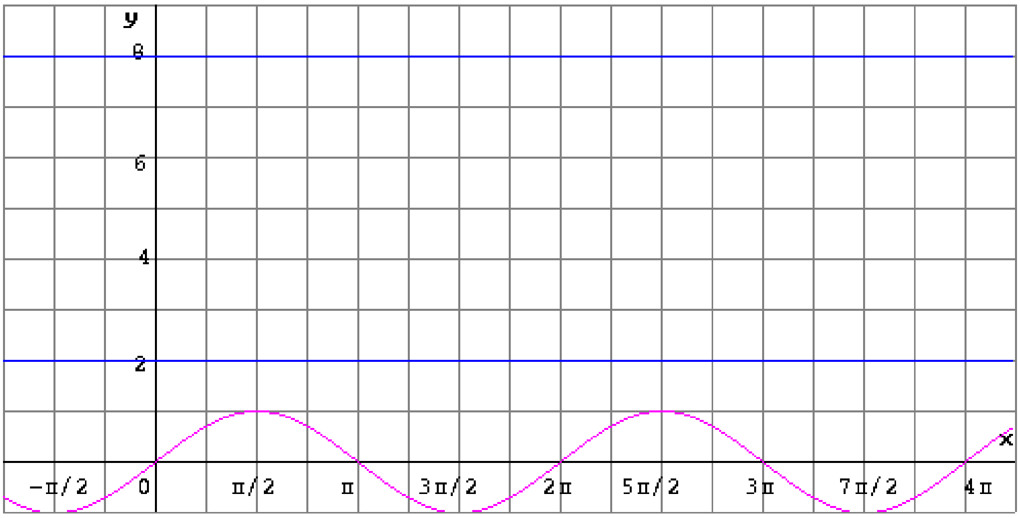
Solución: un ciclo de la función seno empieza en 0° y termina en 360°=2π y su forma es desde el origen sube hasta 1 en 90°=π/2, baja a 0 en 180°= π y sigue bajando hasta –1 en 270° = 3π/2 y sube a 0 en 360°=2π, esta multiplicada por 3, esto hace que cambie su **amplitud** a 3 (a=3), además sube 5 unidades, así que empecemos por trazar la franja donde vamos a delinear a la función *f*; el eje *x* lo subimos 5 unidades y contamos 3 hacia arriba (5+3=8) y 3 hacia abajo (5-3=2), por lo que la franja esta limitada por $y = 2$ y $y = 8$; en el argumento de la función a *x* le restamos 45°=π/4 esto quiere decir que se va a recorrer a la derecha 45° y a este valor le vamos a llamar **ángulo de defasamiento o corrimiento de fase** (desplazamiento de fase); su **periodo** no va a cambiar, sigue siendo P= ________,
Empieza un ciclo en 45°= π/4 y termina en 45 + 360 = 405° =9π/4. Su dominio y rango son:

D = ________________________, R= ___________________________

De acuerdo a su rango no cruza al eje x, así que esta función no tiene **ceros**

¿Dónde cruza al eje *y*? __________________ (en *f*(0) = ________)

Ahora traza la gráfica y con ayuda de tu calculadora puedes evaluar en algunos puntos para que estés seguro, recuerda que es una curva suave.



Para cada cada valor de la función original lo multiplicas por 3 lo recorres 45° a la derecha y lo subes 5 unidades.

Ejemplo 2) Traza la gráfica de la función $Q(x) = -4\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 3$ e indica el dominio, el rango, la amplitud, el periodo y desplazamiento de fase.

Solución: La forma de la función coseno es una "uve", como está multiplicada por –4 entonces su **amplitud** es _______, y el signo menos lo que hace es invertirla sobre el eje x, así que vamos a tener una "uve" volteada que empieza en –4 sube hasta 4 y baja de nuevo a –4, pero también a la función le restamos 3 así que va a bajar 3 unidades, va a quedar delineada entre (4 – 3 =1 y –4 –3= –7) las rectas y=1 y y=–7, como esta definida para cualquier valor de x su dominio y rango son:

D = ___________________________, R = ___________________________

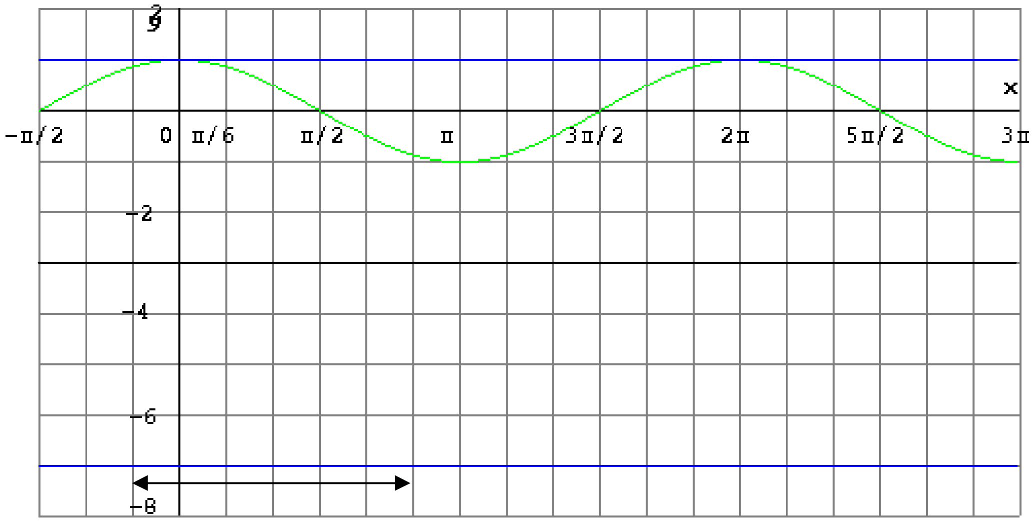
Como x esta multiplicada por 2 su **periodo** es: P = _________

Y para encontrar el **desplazamiento de fase** igualamos el argumento a 0

$2x + \pi/3 = 0, \quad 2x = -\pi/3, \quad x = -\pi/6 = -30°$

así que se recorre a la izquierda 30°, en –30° la función vale –7 y vuelve a llegar a este valor en x = –30° + 180° = 150° o

$x = -\pi/6 + \pi = 5\pi/6$



Traza el ciclo marcado y luego repítela a la izquierda y a la derecha

Podemos encontrar donde cruza el eje x igualando a 0 la función y resolviendo para x

$$Q(x) = -4\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 3 = 0, \quad -4\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 3, \quad \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -3/4$$

$$\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos^{-1}(-3/4) = 138.59°, \quad 2x = 138.59° - 60° = 78.59°$$

$$x = 78.59/2 = 39.295°$$

así que cruza al eje x en: x = 39.295° + n(180°)

Si observas la gráfica la parte que se encuentra sobre el eje x es simétrica con respecto al punto máximo que se encuentra en x=60°=2π/6, si obtenemos la diferencia entre este punto y la raíz que ya tenemos (60 – 39.295= 20.705) y luego se lo sumamos a x, encontrando las otras raíces que nos faltan, 60 + 20.705= 80.705°,

así que también cruza al eje x en: $x = 80.705° + n(180°)$

Con ayuda de tu calculadora puedes verificar si la función evaluada en algunos de estos valores realmente te da cero.

Ejemplo 3) Traza la gráfica de $f(x) = 3\,sen\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}$ indicando su dominio, rango, periodo, amplitud, ángulo de defasamiento y los ceros de la función si los tiene.

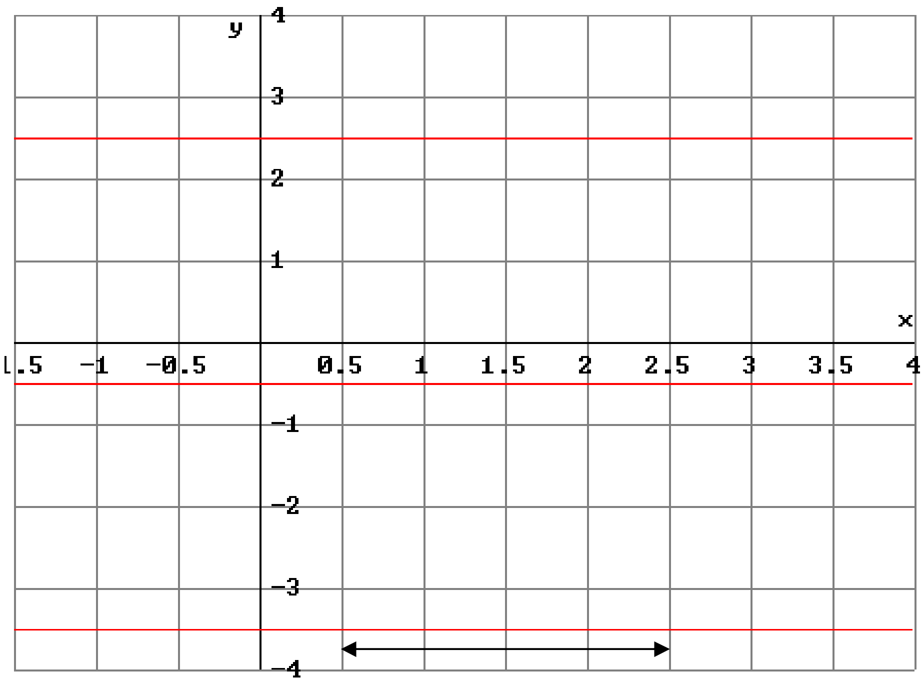
Solución: Su **amplitud** es de 3 ($a = 3$) y como a la función se le resta $d = ½$, el eje x baja 0.5 unidades, así que la franja horizontal en la cual queda delineada la función va desde 0.5 – 3 = –2.5 hasta 0.5 + 3 = 3.5, por lo que su dominio y rango son: D= ___________________________, R = ____________________________

En cuanto a su periodo cambia ya que x esta multiplicada por π, P = 2π/π = ______

El desplazamiento de fase lo obtenemos igualando el argumento a cero

$$\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \pi x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Podemos dibujar un ciclo empezando en x=0.5 y terminando en x = 0.5 + 2 = ____, recordando que tiene la forma de una onda y después repitiéndola.



Si te das cuenta ahora nuestra escala nos conviene tenerla en radianes

Los ceros de la función se encuentran igualando la función a ________

$$f(x) = 3\,sen\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} = 0$$

No olvides que ahora la calculadora debe estar en modo de radianes (rad o R)
Los ceros de la función se encuentran en:

$x=$ ______________________

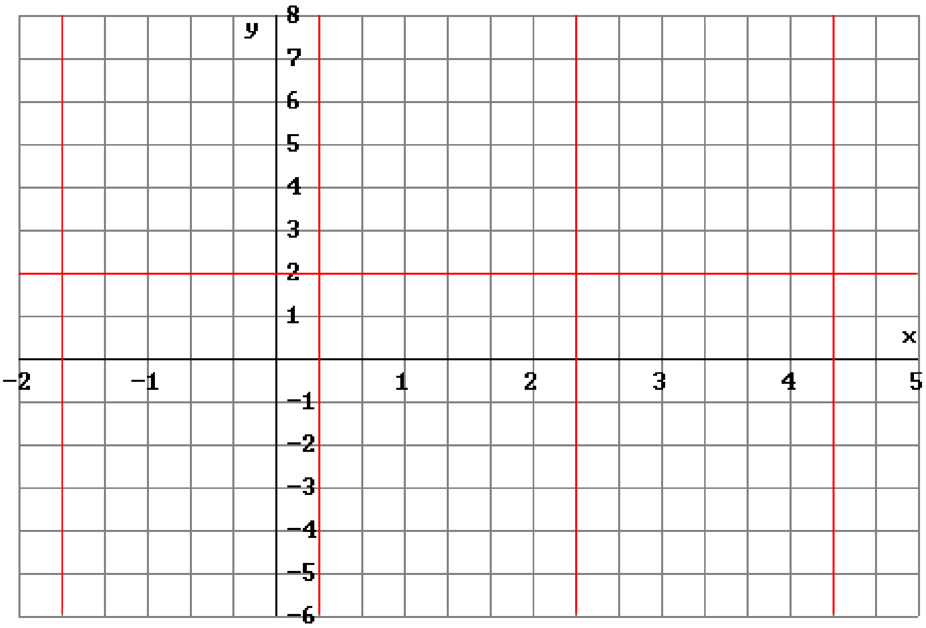
$x =$ ______________________

Ejemplo 4) Analiza la función $L(x) = -\tan\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$ y traza su gráfica

Solución: Su periodo es de P = π/(π/2) = _______, sube 2 unidades y se recorre:

$$\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \ , \quad \frac{\pi}{2}x = -\frac{\pi}{3} \ , \quad x = \_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Un ciclo va desde x = 2/3 hasta x = –2/3 + 2 = 4/3
Por lo que las asíntotas verticales se encuentran a la mitad de este intervalo más n(2) o sea en x = 1/3 + n(2) con n = ...-2, -1, 0, 1, 2, ...
Por lo que su dominio y rango son:
D = ____, R = _________________
Como la función esta multiplicada por un signo menos se invierte sobre el eje x, evalúa en algunos puntos que consideres necesarios para trazar la gráfica de la función. (el origen sube 2 unidades y se desplaza 2/3 hacia la izquierda)



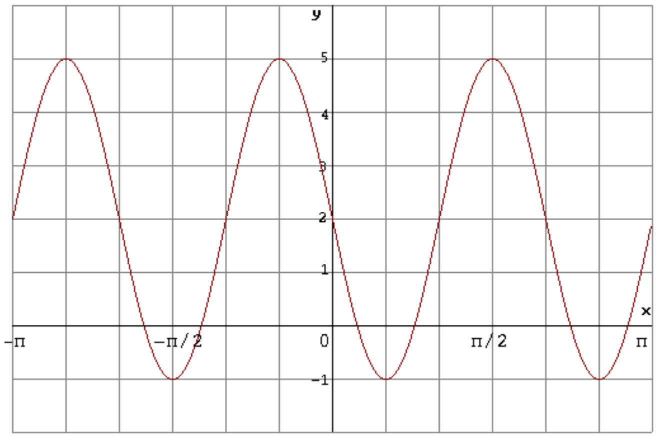
Los ceros de la función se encuentran en : __________________________

$$L(x) = -\tan\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) + 2 = 0$$

$$-\tan\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) = -2 \ , \quad \tan\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) = 2 \ , \quad \left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan^{-1}(2) \ = 1.1071$$

$x =$ __________

Ejemplo 5) En la siguiente gráfica encuentra: la amplitud, el periodo, el desplazamiento de fase y la función que representa



Solución: La franja horizontal en donde esta delineada va desde –1 hasta 5, tiene un ancho de 6 así que la **amplitud es** $\boldsymbol{a}$ **= 3** y la mitad de la franja esta en 2 por lo tanto sube 2 unidades $\boldsymbol{d}$ **= 2.**
Podemos tomar un ciclo de la función seno invertida que empieza en 0° y termina en 4(30) = 120° (cada división es de 30° y el ciclo abarca 4 cuadros), su **periodo es P=______** , entonces, b=360/120 = **3**

Así que la función representada en la gráfica es: $\boldsymbol{f(x) = -3\ sen\ (3x)\ +\ 2}$

También podría representar una función coseno o de nuevo seno pero con un desplazamiento sobre el eje x, intenta encontrarlas.

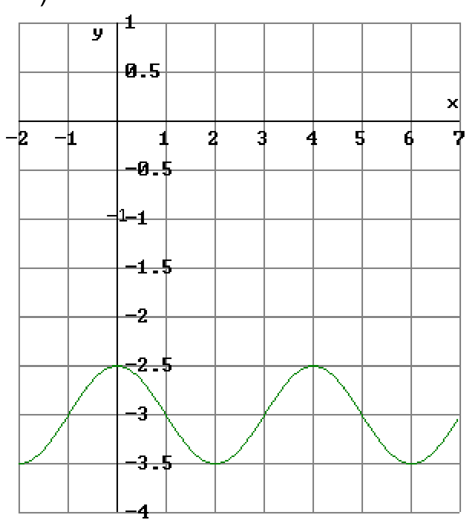
Ejercicios)

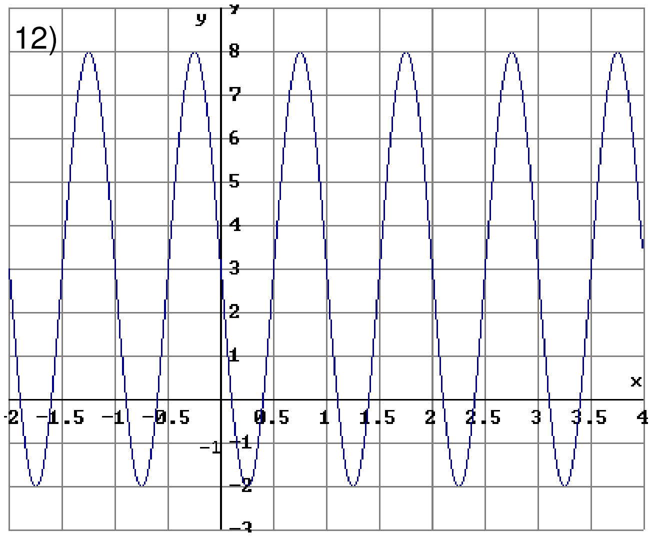
Analiza cada una de las siguientes funciones y traza su gráfica

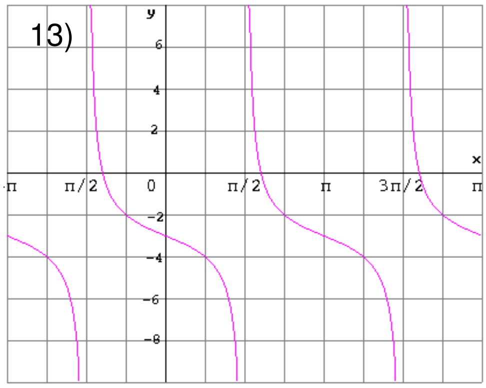
1) $F(x) = 4\ sen\ (x + \pi/4)$
2) $G(x) = -\ 3\ sen\ (\pi x/2 - \pi/6)$
3) $H(x) = \frac{1}{2} sen 2x + 3$
4) $I(x) = 3\ cos\ (36 - 5x) + 2$
5) $J(x) = tan\ (3x - 10°) - 3$
6) $K(x) = 4 - cos\ (\ 2\pi x + \pi/2)$
7) $L(x) = 2\ tan\ (\pi x + \pi/5)$
8) $M(x) = 4\ cos\ 3\pi x + 5$
9) $N(x) = -\ tan\ (\ 2x + 15°) + 4$
10) $P(x) = -\ 2\ sen\ (20° - 3x) + 1$

Analiza cada una de las siguientes gráficas y encuentra la función que representan

11)







3.7 Las funciones trigonométricas como modelos de fenómenos periódicos Problemas de aplicación.

Ejemplo 1) La siguiente función se usa con frecuencia para simular la variación en la temperatura. $F(t) = 23 + 7\,sen\frac{\pi}{12}(t-8) \qquad 0 \le t \le 24$

Donde F nos da la temperatura en grados Celcius a t horas después de la medianoche de cierto día.

a) ¿Cuál es la temperatura a las 8 a.m.? ¿A las 12 p.m.?

b) ¿A qué hora la temperatura es 23 °C?

c) Traza la gráfica de F.

d) ¿Cuáles son las temperaturas máxima y mínima? ¿A qué hora se alcanzan?

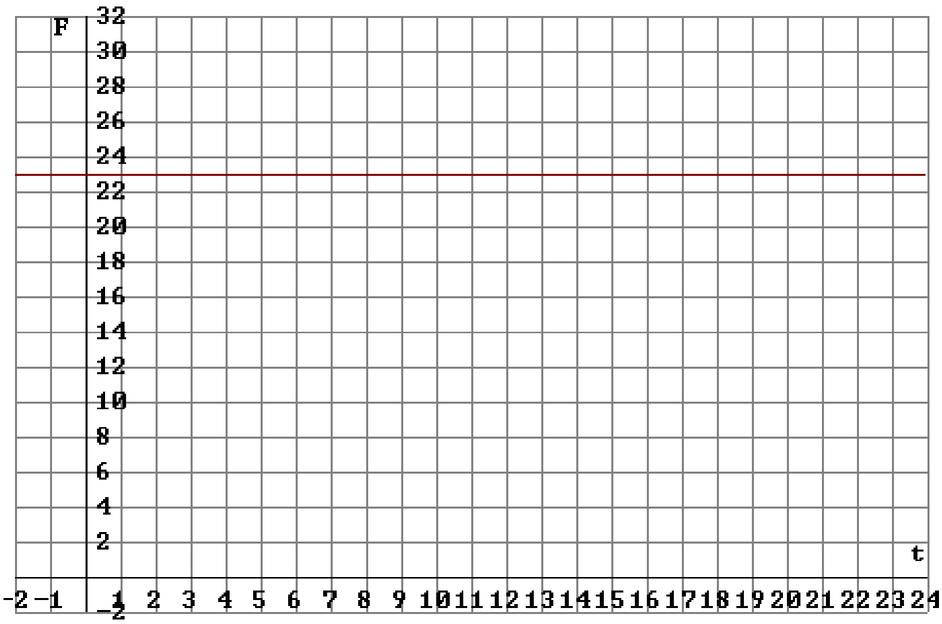
Solución: En el inciso a) sustituimos $t = 8$ y $t = 12$ en $F(t)$:

$$F(0) = 23 + 7\,sen\frac{\pi}{12}(8-8) \;=\; 23 + 0 = 23\ ℃$$

$$F(12) = 23 + 7\,sen\frac{\pi}{12}(12-8) \;=\; \_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

b) del resultado anterior a las ________ la temperatura es de 23 °

c) para trazar la gráfica de la ecuación tenemos que sube 23 (**d=23**) y tiene una amplitud de 7 (**a=7**), su periodo es de P = 2π/(_____) = 24 y tiene un desplazamiento de fase de 8, traza la gráfica sobre el plano



e) De acuerdo a la gráfica la temperatura mínima es de _______ y se da a las ________; la temperatura máxima es de _______ y se alcanza a las _________

Ejercicios)

1) El voltaje V producido por un generador de corriente alterna (ca) es

$$V = 120\ sen\ 120\pi t$$

   a) ¿Cuáles son la amplitud y el periodo?
   b) Traza la gráfica de V con dos periodos, comenzando en $t = 0$

2) En un punto del océano, el cambio vertical en el agua debido a la acción de las ondas, esta dado por: $y = 8\cos\frac{\pi}{6}(t-6)$ $\quad 0 \le t \le 72$, donde y esta en metros y t es el tiempo en segundos. ¿Cuál es la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase? Traza la gráfica de la función.

3) La corriente I (en amperes) en un circuito eléctrico está dada por $I = 30\ sen\ (120\pi t - \pi)$, donde t es el tiempo en segundos. Determina la amplitud, el

periodo y el desplazamiento de fase. Traza la gráfica de esta función para el intervalo $0 \le t \le 3/60$.

4) Un adulto normal que está sentado aspira y expira casi 0.80 litros de aire cada 4 seg. El volumen de aire V en los pulmones (en litros) t seg. después de la exhalación está expresado aproximadamente por

$$V(t) = 0.45 - 0.40\cos\frac{\pi t}{2} \qquad 0 \le t \le 8$$

   a) ¿Cuál es la cantidad máxima y mínima de aire en los pulmones? Explica como obtienes estas cifras.
   b) ¿Cuál es el periodo de la respiración?
   c) ¿Cuántas respiraciones se hacen por minuto?
   d) Traza la gráfica $V(t)$.

5) Las temperaturas promedio durante 30 años (en ºC) para cada mes del año en cierto lugar, se dan en la tabla

x (mes)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y (temperatura, ºC	10	12	17	21	24	28	30	29	26	21	16	12

   a) Localiza los puntos en el plano para dos años ($1 \le x \le 24$)
   b) Ajuste una curva de la forma $y = d + a\ sen\ (bx + c)$, primero analizando como determinar las constantes a partir de los datos de la tabla y luego trázala sobre los puntos.

6) En la teoría de los biorritmos, una función seno de la forma $P = 100\ sen\ wt$ se usa para medir el porcentaje del potencial de una persona en el tiempo t, donde t se mide en días y t = 0 es el nacimiento de la persona. Por lo general se miden tres características:
 Potencial físico: periodo de 23 días.
 Potencial emocional: periodo de 28 días.
 Potencial intelectual: periodo de 33 días.
   a) Encuentra w para cada característica.
   b) Traza las gráficas de las tres funciones.
   c) ¿Hay un tiempo t en el que las tres características tengan un potencial de 100%? ¿Cuándo ocurre?
   d) Calcula la edad que tienes hoy en días y describe tus potenciales físico, emocional e intelectual para los próximos 30 días.

7) En un ecosistema de presa – depredador, el número de depredadores y el número de presas tiende a variar periódicamente. En cierta región con coyotes como depredadores y conejos como presa, la población de conejos R y la población de coyotes C están dadas por

$$R = 1000 + 150\ sen\ 2t \qquad\qquad C = 200 + 50\ sen\ (2t - 0.7)$$

donde t está medida en años después del 1º de enero de 2000

a) ¿Cuál es la máxima población de conejos? ¿Cuándo se alcanzo por primera vez?
b) ¿Cuál es la máxima población de coyotes? ¿Cuándo se alcanzo por primera vez?
c) ¿Cuál fue la población de conejos el 1º de enero de 2003?
d) Traza ambas gráficas en el mismo sistema coordenado e intenta explicar el desplazamiento de fase en C.

A U T O E V A L U A C Ó N

1) El punto $P(x, y)$ está en el círculo unitario en el cuarto cuadrante. Si $x = \frac{12}{13}$, determina y.

Traza las gráficas de las siguientes funciones trigonométricas y determina: amplitud, periodo, dominio, rango y corrimiento de fase

2) $y = -3\cos(x/2)$

3) $y = \frac{1}{2}\, sen\,(x + \frac{\pi}{4}) + 1$

4) $F(x) = 4\, sen\, 2\pi x$

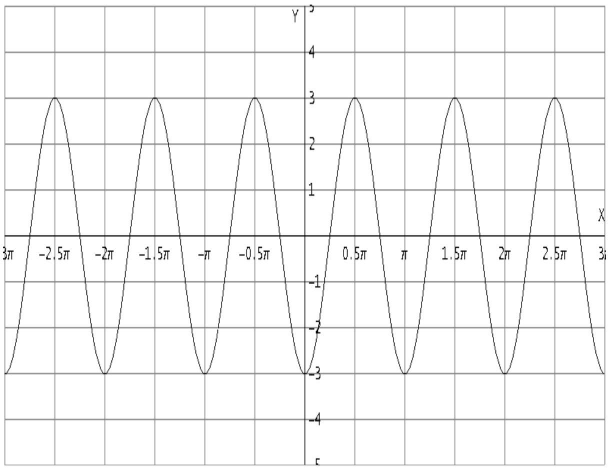
5) $G(x) = 3 - \tan \pi x$

6) $f(x) = 2\cos(30° - 2x) - 5$

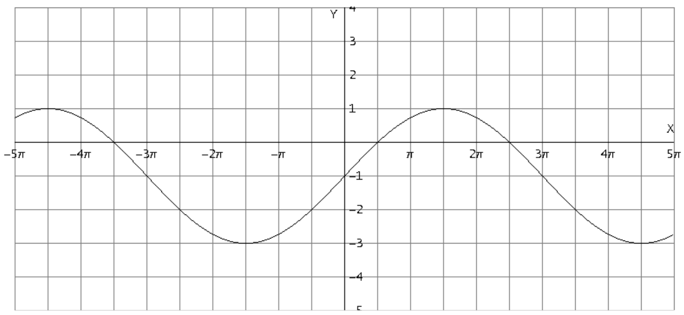
7) g(x) = $g(x) = \tan\left(\frac{x}{2} - 40°\right)$

Determina su amplitud, periodo, corrimiento de fase y desplazamiento vertical en cada gráfica y escribe la regla de correspondencia.

8)



9)



10) La estrella variable Zeta Gemini tiene un periodo de 10 días. La brillantez promedio de la estrella es de 3.8 magnitudes y la variación máxima respecto al promedio es de 0.2 de magnitud. Suponiendo que la variación de la brillantez es periódica, obtén una ecuación que de la brillantez de la estrella como una función del tiempo.