4.1 Situaciones que involucran crecimiento y decaimiento exponencial

Se dice que una cantidad crece o decrece exponencialmente si su rapidez de crecimiento es proporcional a su magnitud, como ejemplos de crecimiento exponencial se tienen: el crecimiento de poblaciones de bacterias, de pequeños animales y hasta de humanos, así como el saldo de una cuenta de ahorros o una deuda adquirida. Y como ejemplos de decrecimiento pueden ser: la cantidad de un elemento en proceso de desintegración radiactiva, la depreciación de bienes, la retención de conocimientos y otros más, a continuación se verán algunos ejemplos.

Ejemplo 1) Una tarjeta de crédito común carga un interés anual de 48 % compuesto mensualmente. Si se realiza una compra de $ 400.00 y no se hace ningún pago durante un año, ¿cuál será la deuda al final del año? ¿cuál será la deuda al cabo de t meses?

Solución:

El interés anual es de _________ entonces el interés mensual será de _________

La cantidad gastada es de _________, así que al terminar el primer mes la deuda ya no es de $ 400.00 sino de: D(1)= 400 + (   )400 = _______________ = ________

Sacando como factor común a 400 nos queda que D(1)= 400(1 + 0.04) = 400 (   )

Al segundo mes la deuda asciende a D(2) = ______________________________

Y así sucesivamente la deuda crece hasta llegar a los 12 meses

$D(3) = D(2)(\quad) = 400(\quad)^{(\ )}$ = $ 449.95, $D(8) =$ ________________________

$D(4) =$ ____________________________ $D(9) =$ ________________________

$D(5) =$ ____________________________ $D(10) =$ ________________________

$D(6) =$ ____________________________ $D(11) =$ ________________________

$D(7) =$ ____________________________ $D(12) =$ ________________________

La deuda al final del año será de ______________

Ahora lo que nos piden es la deuda como función de los meses transcurridos y como te habrás dado cuenta en el primer mes se multiplica 400 por 1.04, en el segundo mes multiplicamos 400 por 1.04 elevado al cuadrado, en el tercer mes obtuvimos la deuda al multiplicar 400 por 1.04 elevado al cubo y así sucesivamente por lo que la deuda en función de los meses transcurridos es:

$D(t) =$ ______________

Si divides el valor de la deuda de cada mes entre la deuda del mes anterior que observas ____

Como puedes darte cuenta la variable independiente t ahora se encuentra como __________________

Ejercicio 1) Cierto cultivo bacteriano crece duplicando su cantidad cada día. Al finalizar el primer día hay 1000 bacterias; ¿cuántas habrá después de diez días? ¿Cuántas después de n días?

Ejemplo 2) Una sustancia radiactiva se desintegra de tal modo que al final de cada mes sólo hay la tercera parte de lo que había al principio. Si había 75 gramos de la sustancia al principio del año, ¿cuánto queda a mitad del año? ¿cuánto queda al final de n meses?

Solución:
Al final de cada mes sólo hay la tercera parte de lo que había al inicio, así que completa la tabla:

Final de mes, n	0	Enero 1	Febrero 2	Marzo 3	Abril 4	Mayo 5	Junio 6
Cantidad de sustancia, C	75 gramos	25 gramos					

Para saber cuanta sustancia queda al final de enero simplemente se le saco tercera a 75, así que $C(1)$ = _______________, o sea 75 multiplicado por 1/3,
Al finalizar febrero la cantidad de sustancia que nos queda es $C(2)$ = __________,
Al finalizar marzo tenemos $C(3) = C(2)\,(1/3) = C(1)\,(1/3)(1/3) = C(0)(1/3)(1/3)(1/3) = 75(1/3)^3 =$ ___________
Así que al finalizar abril, mayo y junio la cantidad de sustancia que queda es:

$C(4) =$ ___________________________________

$C(5) =$ ___________________________________

$C(6) =$ ___________________________________

La cantidad de sustancia que queda a mitad del año es de: ________________

Y al final de n meses la sustancia que queda será:

$C(n) =$ ________________

Si divides la cantidad de sustancia al finalizar el mes entre la cantidad de sustancia al finalizar el mes anterior obtienes el valor de ________ y la cantidad de sustancia va __________________ conforme transcurren los meses
La variable independiente _______ nuevamente se encuentra como __________.

Ejercicio 2) El valor de un automóvil se deprecia el 10 % cada año, durante los primeros 5 años. ¿Cuánto vale después de 5 años si su precio original fue de $145 000.00? Determina su valor como una función del tiempo.

Ejercicio 3) Si inviertes $1000.00 al 8% de interés anual compuesto trimestralmente, ¿cuánto tiempo tardará en convertirse en $ 1500.00?

Ejercicio 4) Si en las vacaciones te ofrecen un trabajo de un mes, donde se te pagará bien. ¿Cuál de las formas de pago siguiente resulta más redituable para ti?
a) Un millón de pesos al final del mes
b) Dos centavos el primer día del mes, 4 centavos el segundo día, 8 centavos el tercero y, en general, 2^n centavos el día n

Ejercicio 5) Si se te pide que traces la gráfica de la función f(x) = 2^x para x entre 0 y 40, usando una escala de 10 unidades por centímetro. ¿Cuáles son las dimensiones de la hoja de papel que necesitaras para trazar esta gráfica?

Ejercicio 6) Un estudiante esta intentando determinar la vida media del yodo131 radiactivo. Mide la cantidad de yodo 131 en una solución muestra cada 8 horas. Sus datos se muestran en la tabla.

Tiempo (h)	0	8	16	24	32	40	48
Cantidad (g)	4.80	4.66	4.51	4.39	4.29	4.14	4.04

a) Encuentra la función exponencial que representa la cantidad de yodo 131 en función del tiempo.
b) Localiza los puntos en el plano cartesiano y traza la gráfica de la función que encontraste en el inciso anterior
c) Utiliza tu modelo para determinar la vida media del yodo 131. (la vida media es el tiempo que se tarda la mitad de cierta cantidad de un elemento radiactivo en desintegrarse y transformarse en un nuevo elemento)

4.2 Análisis de la variación exponencial

Como vimos en los ejemplos anteriores la variable independiente la encontramos como un exponente de ahí el nombre de funciones exponenciales y estas son de la forma $f(x) = a^x$

Donde a es un número real positivo (a>0) y diferente de 1 (a≠1)y es la base de la función exponencial

La base a se limita a los números positivos ¿por qué no puede ser negativa?

____

Si a = 1 que pasa ____

Para ver el crecimiento y decaimiento de esta función empezaremos por trazar las gráficas de algunas funciones.

Ejemplo 1) Traza la gráfica de cada una de las siguientes funciones

a) $f(x) = 2^x$ b) $g(x) = (\ )^x$

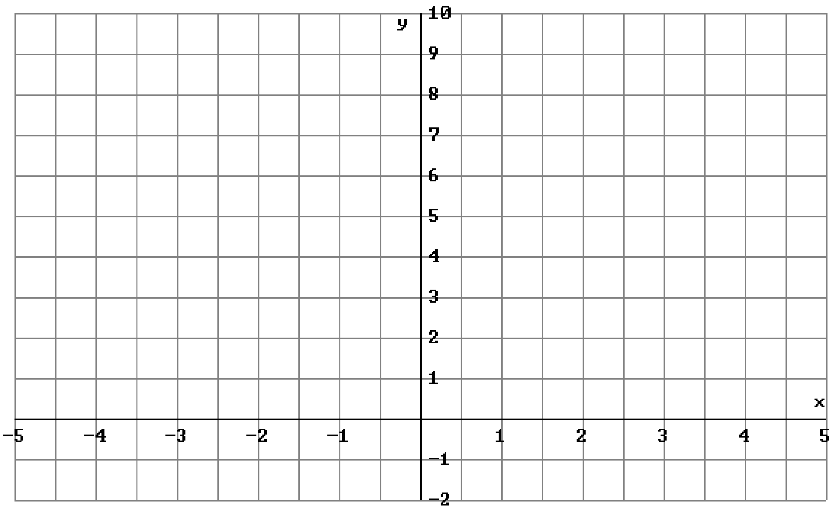
Solución:

Con ayuda de tu calculadora te puedes dar cuenta de que le podemos dar valores a x tanto positivos como negativos, así que la función siempre tiene un valor real para cualquier valor de x en los números reales, por lo que el dominio es:

D = ________________________________

Completa la siguiente tabla y localiza los puntos sobre el plano uniéndolos con una curva suave

x	$f(x)=2^x$	$g(x)=(1/2)^x$	x	$f(x)=2^x$	$g(x)=(1/2)^x$	x	$f(x)=2^x$	$g(x)=(1/2)^x$
-15			-1.5			1		0.5
-10			-1			1.5		
-5		32	-0.5		1.4142	2		
-3	0.125		0	1		3		0.125
-2			0.5			10		



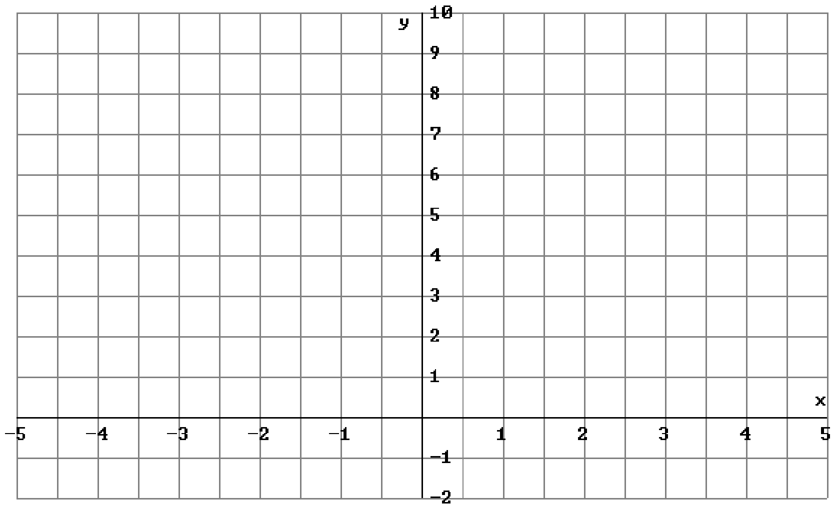
Si observas las dos gráficas te puedes dar cuenta que si reflejamos a f sobre el eje y se obtiene la gráfica de g.
Los valores de ambas funciones siempre son _________________________, ambas funciones no tienen ceros y su rango es:

R = ______________________________

Las dos funciones interceptan al eje y en el punto ____________
Conforme x se extiende hacia los negativos los valores de f __________________ y los valores de g _________________
Conforme x se extiende hacia los positivos los valores de f __________________ y los valores de g ___________________, por lo que podemos decir que la función $f(x) = 2^x$ es una función <u>creciente</u> y la función $g(x) = (1/2)^x$ es una función ________________, además el eje x es una asíntota _____________.

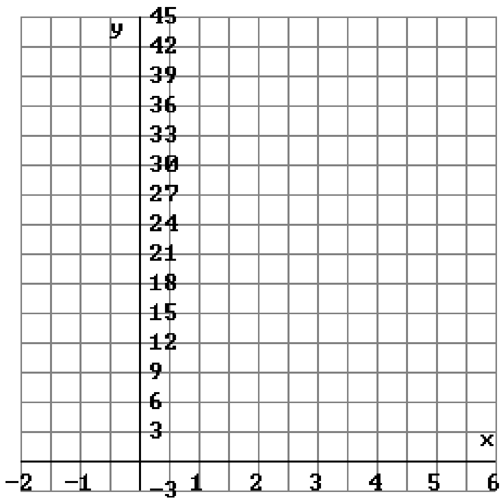
Ejercicio 1) En el siguiente plano traza las gráficas de la función exponencial para diferentes valores de la base a

$F(x) = a^x$, con a = 🖎, 🗐, 🗎, 🗁, 1, 2, 3, 5 y 10

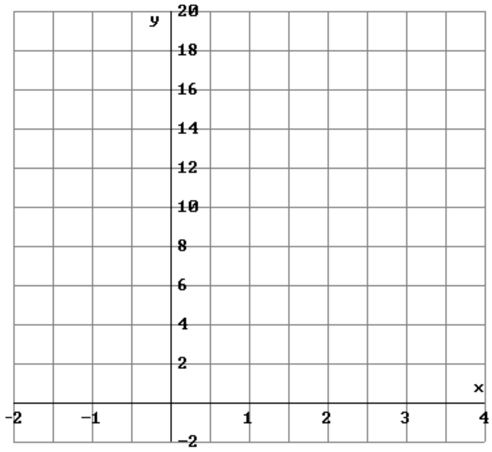


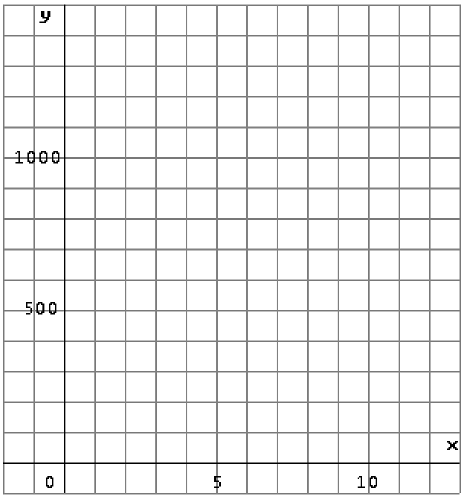
Escribe todo lo que puedes decir sobre estas funciones.

Ejercicio 2) Traza las gráficas de la función exponencial $f(x) = 2^x$ y de la función potencia $g(x) = x^2$ para $x \geq 0$ y describe su crecimiento.



Ejercicio 3) Traza las gráficas de la función exponencial $f(x) = 2^x$ y de la función potencia $g(x) = x^2$ para $x \geq 0$ y compara su crecimiento.





4.3 Estudio analítico y gráfico del comportamiento de funciones exponenciales

Ahora analizaremos lo que sucede con las gráficas de estas funciones al aplicarles ciertas transformaciones como multiplicarlas por una constante (alargamiento o contracción), cambiarle de signo a la función o a la variable independiente (reflexiones sobre los ejes) así como sumar o restar una cantidad ya sea a la función o a la variable independiente (translaciones verticales y horizontales) y combinaciones de estas.

Ejemplo 1) Con base a la gráfica de $f(x) = 2^x$ traza las gráficas de las siguientes funciones y analízalas: a) $g(x) = 3.2^x$ b) $h(x) = (½)2^x$

Solución:

La base de la función es 2 (2 > 1) la función es creciente y ya la trazamos en un ejercicio anterior, pasa por los puntos (-1, ½), (0, 1), (1, 2), (2, 4), (3, 8) ...., con estos puntos traza la función f.

a) La función g es la función f multiplicada por 3 así que en cada punto por el que pasa f multiplicamos la ordenada por 3 (la gráfica se alarga) y tenemos (-1, 3/2), (0, 3), (1, 6), (2, 12), (3, 24), ... sigue creciendo y en las x negativas se acerca a cero, tiene una asíntota horizontal que es el eje _______. Delinea la gráfica sobre el plano siguiente. Su dominio y su rango son:

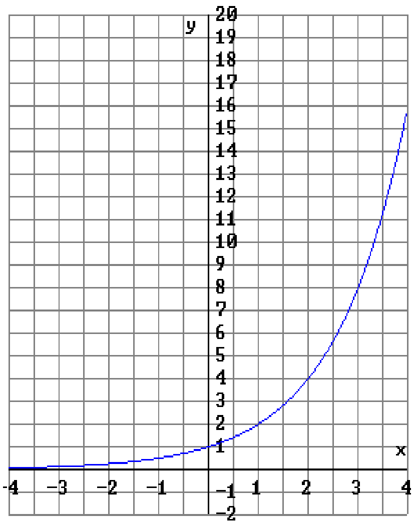
   D = ________________________, R = __________________________

   Cruza al eje y en el punto __________

b) La función h ahora es la función f multiplicada por ½ (la gráfica se contrae) y en cada punto por el que pasa f cambiamos la ordenada multiplicándola por ½ y tenemos que h pasa por (-1, ¼), (0, ½), (1,1), (2, 2), (3, 4) ....también sigue creciendo y cuando x se extiende hacia la izquierda se acerca a cero, la asíntota horizontal es __________, delinea la gráfica sobre el mismo plano. Su dominio y rango son:

   D = ___________________________, R =__________________________

   Cruza al eje y en el punto __________,



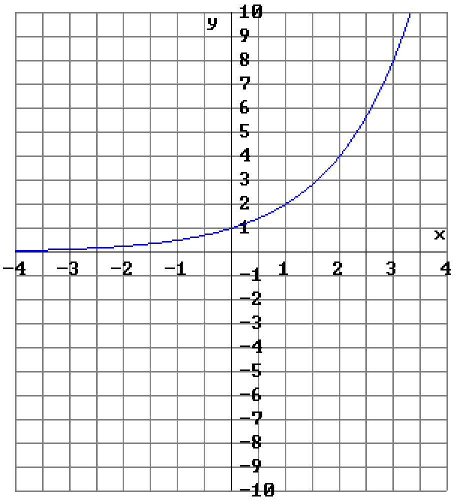
Tanto la función g y h tienen ceros __________, ¿por qué? _________________

Ejemplo 2) Usa la gráfica de $f(x) = 2^x$ para trazar la gráfica de cada una de las siguientes funciones, analízalas a) $m(x) = -2^x$ b) $n(x) = 2^{-x}$

Solución:

Trazamos la función f sobre el plano siguiente

a) La función m es la función f multiplicada por –1 y recordando que cuando le cambiamos el signo a la función esta se invierte o refleja sobre el eje ______, así que la gráfica de la función m la trazamos reflejando cada punto de f sobre el eje x, ahora trázala, su dominio sigue siendo el mismo D = ______________
Y cambia su rango que ahora es:
R = ______________________
Conforme x se extiende hacia los negativos se acerca a cero ahora por __________, así que la asíntota _____________ sigue siendo el eje ________. Cruza al eje y en el punto ___________

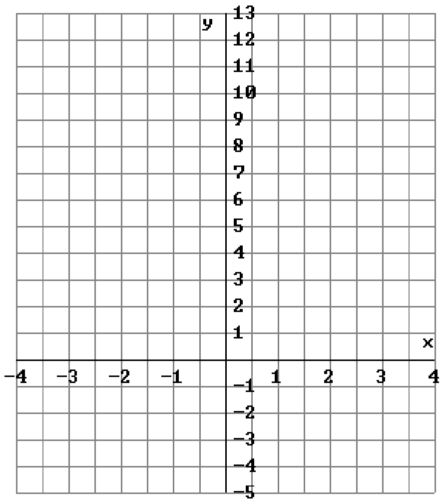


b) En la función n ahora el signo negativo lo tiene la variable independiente o sea la x, así que recordando que cuando el exponente tiene un signo negativo para tener exponentes positivos pasamos la expresión al denominador

$$2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

y la función n se convierte en la función f invertida sobre el eje y, así que la gráfica de n la trazamos reflejando cada punto de f sobre el eje y, ya la puedes trazar, su dominio y rango son: D = __________________, R = ________________
Cuando x se extiende hacia los positivos los valores de la función ______________
Tiene una asíntota _____________ y es el eje _________.
Mientras que f es creciente la función n es ___________________, cruza el eje y en el punto ____________.

Ejemplo 3) Utiliza la gráfica de $f(x) = 2^x$ para dibujar la gráfica y analizar a cada una de las funciones a) $R(x) = 3 + 2^x$ b) $T(x) = 2^{-x} - 3$
Solución:
Dibujamos la gráfica de f sobre el plano



a) La función R es la función f más 3 unidades, así que su gráfica la podemos obtener desplazando hacia arriba 3 unidades a la función f, cada punto de f a la ordenada le sumamos 3 (traza la gráfica) el dominio de esta función es:
D = _____________________
Y ahora conforme x se extiende hacia los negativos los valores de la función se _________________, por lo que la asíntota _____________ es ______________ y su rango esta dado por R = _______________
Sigue siendo una función ______________
Cruza al eje y en el punto _________

b) La función T tiene la misma base que f pero el exponente tiene un signo negativo, así que quedamos que el signo en el exponente refleja a f sobre _____________ y se convierte en una función ___________, pero también se le restan 3 unidades, así que a cada punto de f lo reflejamos sobre el eje y y le restamos 3 unidades (trázala sobre el mismo plano), nuevamente cambio la asíntota __________ que ahora es la recta de ecuación __________

Su dominio y rango son:

D = _______________________, R = _____________________

Cruza al eje y en el punto ___________ y al eje x lo cruza en el punto _________

Ejemplo 4) Usa la gráfica de $f(x) = 10^x$ para trazar la gráfica y analizar cada función a) $G(x) = 10^{x+4}$ b) $H(x) = 10^{x-2}$

Solución:

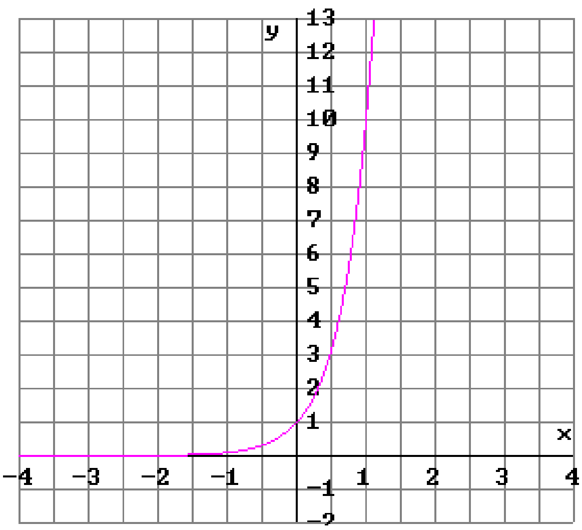
Primero tracemos la gráfica de f que ya se muestra en el plano siguiente, marca algunos puntos sobre esta.

a) En la función G aparece en el exponente una x más 4 unidades esto quiere decir que ahora se tiene una traslación sobre el eje x o sea que la gráfica de la función G se obtiene trasladando la gráfica de la función f, 4 unidades hacia la izquierda ($x + 4 = 0$, $x = -4$), el punto (0, 1) se convierte ahora en (– 4, 1), el punto (1, 10) se convierte en (–3, 10) y puedes hacer lo mismo con otros puntos sobre la gráfica y dibujar la gráfica de la función G

El dominio y rango de la función G son:

D = ____________________, R = ______________________

La ecuación de la asíntota horizontal es: ___________. Cruza al eje y en el punto __________



b) En la función H el exponente ahora es $x - 2$, nuevamente se tiene una traslación sobre el eje x ya que a la variable independiente le estamos restando 2 unidades, por lo que la gráfica de la función H se obtiene trasladando todos los puntos de la función f, 2 unidades a la derecha ($x - 2 = 0$, $x = 2$), el punto (0,

1) se convierte en (2, 1) y el punto (1, 10) se convierte en (3, 10), ya puedes dibujar su gráfica.

El dominio y rango de la función son:

D = ___________________, R = ___________________

La ecuación de la asíntota horizontal es: _____________. Cruza al eje y en el punto __________

Ejemplo 5) Utiliza la gráfica de $f(x) = 3^x$ para trazar la gráfica y analizar la función

$$F(x) = 2 - 3^{5-x}$$

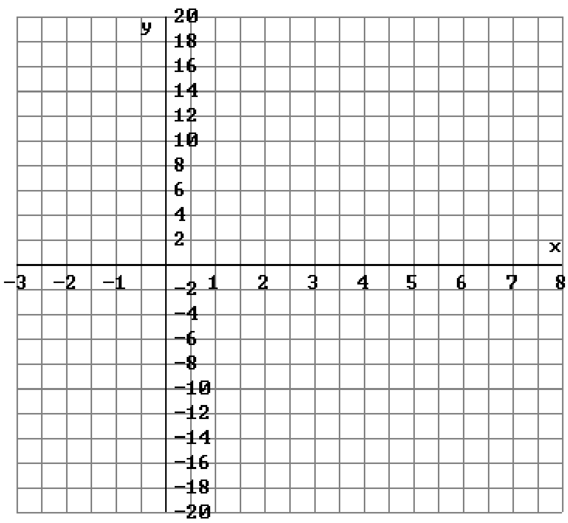
Solución:

Primero traza la gráfica de f dándole algunos valores a x y anótalos

Analicemos primero el exponente que es $5 - x$, como x tiene un signo negativo se tiene una reflexión sobre el eje ____, y el 5 hace que se traslade 5 unidades hacia la derecha ($5 - x = 0$, $x = 5$), antes de la base hay un signo negativo, por lo que se tiene una reflexión sobre el eje _____, el 2 nos da una traslación sobre el eje ___, la sube 2 unidades, así que primero hagamos las reflexiones y luego las traslaciones, las puedes marcar de diferente color o punteadas:

1) reflejamos sobre el eje y a f
2) la que resulta la reflejamos sobre el eje x
3) y la recorremos 5 unidades hacia la derecha
4) y la subimos 2 unidades

Comprueba dándole algunos valores a x para verificar que la última gráfica que trazamos es la correcta



El dominio y rango de la función son:

D = ________________________, R = ___________________

La ecuación de la asíntota _____________, es: ____________

Cruza al eje y en el punto __________

Cruza al eje x aproximadamente en ___________

Ejercicio I) Traza la gráfica de cada una de las siguientes funciones y determina el dominio y el rango, la asíntota horizontal y los puntos donde intercepta a los ejes.

1) $g(x) = 2^{x-3}$ 2) $h(x) = 10^{-x} + 4$ 3) $j(x) = 5^{x+4} - 4$

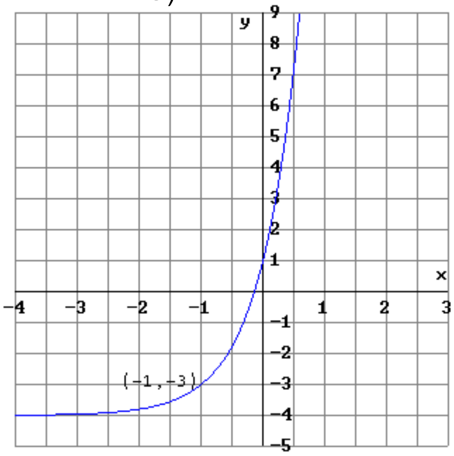
4) $k(x) = 2 - 3^{x-5}$ 5) $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{x} - 6$ 6) $g(x) = 8 - 4^{3-x}$

7) $f(x) = 8^{x-2} + 3$ 8) $h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{2-x}$ 9) $m(x) = \square(3^{x+6})$

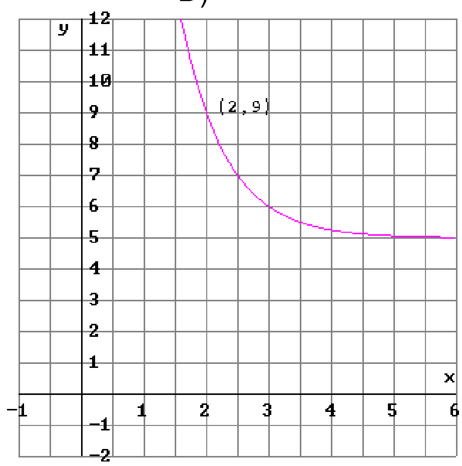
10) $k(x) = -4^{-x} + 2$

Ejercicio II) Determina la función exponencial que representa cada una de las

C)



D)



siguientes gráficas.

4.4 Importancia y caracterización del número *e*.

El número e está definido como el valor al que tiende la expresión

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ cuando n que es un entero positivo se hace grande

Con ayuda de tu calculadora dale valores a n para veas que tan grande tiene que ser para que nos aproximemos al valor de e, este valor es un número irracional por lo que no tiene un valor exacto y su representación decimal es no repetitiva.

Otra forma de calcular el valor de e es con la suma de la serie infinita

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}+\cdots$$

Realiza algunos cálculos para que veas como se va aproximando al valor e que muestra la calculadora.

La importancia de este valor radica en las aplicaciones que tiene ya que existen diversas situaciones donde el número e es la mejor base posible, como por ejemplo cuando se invierte con un interés compuesto continuamente, cuando se quieren estimar poblaciones, para calcular edades de objetos antiguos por medio del carbono 14, para diagnosticar ciertas enfermedades por medio de sustancias radiactivas, para conocer como se difunde la información en otras más,

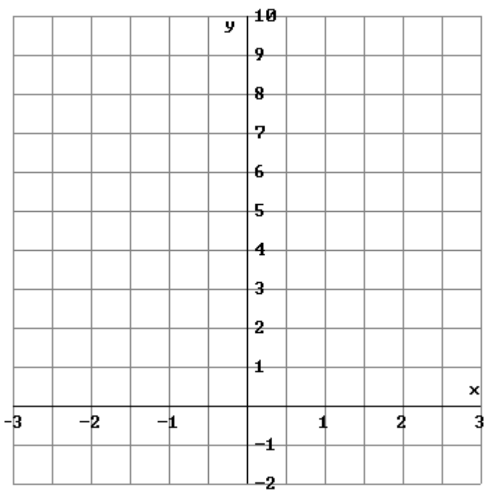
A continuación vamos a estudiar a la función exponencial con base e o sea $f(x) = e^x$ de la misma manera que las anteriores.

Ejemplo 1) Traza la gráfica de cada función y analízala

a) $f(x) = e^x$ b) $g(x) = e^{-x}$

Solución:

Con ayuda de la calculadora evalúa cada función en los valores que se indican en la tabla, localiza los puntos sobre el plano y dibuja ambas gráficas.



x	$f(x)= e^x$	$g(x) = e^{-x}$
-10		
-2		
-1.5		
-1		
-0.5		
0		
0.5		
1		
1.5		
2		
5		

La función f es _______________ y la función g es __________________ y nuevamente g se obtiene reflejando a f sobre el eje ________, El dominio y el rango tanto de f como de g es el __________

D = ______________________, R = ________________________

Cruzan al eje y en el punto _________, La ecuación de la asíntota ____________ es: ___________; no cruzan el eje _____, por lo que podemos decir que estas dos funciones no tienen __________.

Ejemplo 2) Partiendo de la gráfica de $f(x) = e^x$ traza la gráfica de cada función y determina el dominio, rango, asíntota y el punto en donde cruzan a cada eje.

a) $g(x) = -e^{-x} + 2$ b) $h(x) = e^{x-3} - 4$

Solución:

a) Primero trazamos la gráfica de la función f sobre el siguiente plano

La función g antes de la base tiene un signo negativo así que este hace que se refleje sobre el eje ______;

En el exponente el signo de x es ___________, por lo que ahora se refleja sobre el eje _______

Por último se traslada 2 unidades hacia arriba,

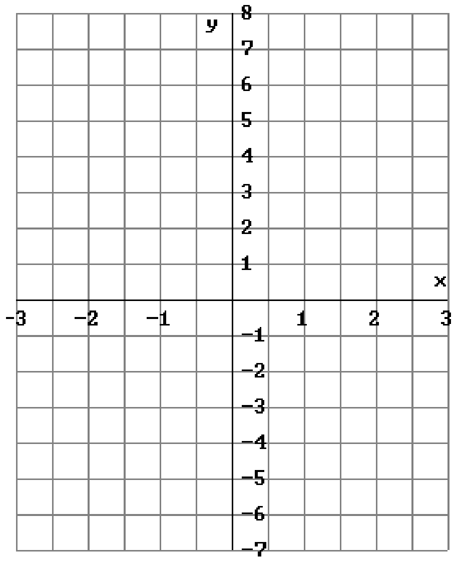
ya puedes delinear la gráfica de g

D = ______________, R =______________

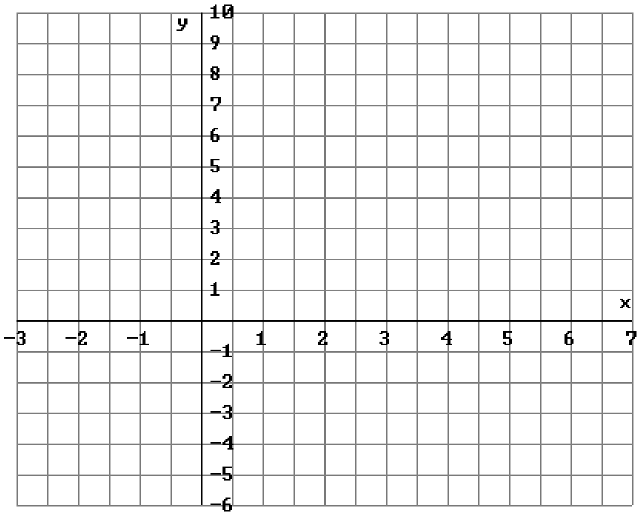
La ecuación de la asíntota horizontal es: _________

Cruza al eje y en el punto ___________

Cruza el eje x aproximadamente en el punto ____________



b) Trazamos la función f sobre el plano y aplicamos las transformaciones indicadas para delinear la función h.



En la función h el exponente es $x-3$, esto hace que f se recorra 3 unidades a la derecha.
Como estamos restando 4, entonces la función baja 4 unidades, con estas dos traslaciones ya puedes delinear a la función h.
D = ________________,
R = ________________
La asíntota horizontal tiene ecuación ____________
Cruza al eje y en el punto _________
Cruza al eje x aproximadamente en el punto _________

Ejercicios) Traza la gráfica y analiza cada una de las siguientes funciones

1) $f(x) = 2\,e^x$ 2) $g(x) = 3 - e^{x+2}$ 3) $h(x) = e^{x^2}$

4) $k(x) = e^{2-x} + 5$ 5) $m(x) = e^{-x^2}$ 6) $n(x) = e^{x-4} - 2$

4.5 Leyes de los exponentes y propiedad biunívoca de la función exponencial

Recordemos las leyes de los exponentes:

Considerando que podemos definir a^m y b^m para cualquier valor de m o n en los reales siempre y cuando tanto a como b solo tomen valores positivos se cumplen las siguientes leyes:

$$a^m \,.\, a^n = a^{m+n} \qquad (a^m)^n = a^{m\,n} \qquad (ab)^m = a^m b^m$$

$$1^m = 1 \qquad a^{-m} = \frac{1}{a^m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m \qquad a^0 = 1$$

Como te habrás dado cuenta a cada valor de la función solo le correspondía un valor de x, y esto lo podemos probar gráficamente trazando rectas paralelas al eje x y estas solo cortan a la curva en un punto, así como para ser función a cada elemento del dominio le corresponde solamente un elemento del rango, la función es uno a uno si a cada elemento del rango le corresponde solamente un elemento del dominio y a esto se refiere la propiedad biunívoca.

Si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$ que equivale a: $a^{x_1} = a^{x_2}$, entonces $x_1 = x_2$

Sigamos con algunos ejemplos donde apliquemos estas propiedades.

Ejemplo 1) Si $4^x = 7$, ¿a qué es igual 4^{-2x}?
Solución:
Vamos a tratar de expresar a 4^{-2x} en términos de 4^x

	Propiedad
$4^{-2x} = (4^x)^{-2}$	$a^{mn} = (a^m)$

$= \dfrac{1}{(4^x)^2}$ ____________________

sustituimos el valor de $4^x = 7$, así que:

$4^{-2x} =$

Ejemplo 2) Resuelve las siguientes ecuaciones: a) $3^{x-1} = 27$ b) $2^{x^2+x} = 4^{1+x}$

Solución:

a) Primero escribimos a 27 en base 3, $27 = 3^3$

así que, $3^{x-1} = 3^3$ <u>sustituimos 27 en base 3</u>

$x - 1 = 3$ ______________________

$x =$ ____ ______________________

b) Escribimos las dos expresiones en la misma base (2)

$2^{x^2+x} = (2^2)^{1+x}$ ______________________

$2^{x^2+x} = 2^{2(1+x)}$ ______________________

$2^{x^2+x} = 2^{2+2x}$ ______________________

$x^2 + x = 2 + 2x$ ______________________

$x^2 - x - 2 = 0$ ______________________

$x =$ ________ y $x =$ ________

Comprueba tus resultados.

Ejemplo 3) Muestra que $4^{y+2} - 4^y = 15(4^y)$

Solución:

Aplicando la ley ______________, podemos escribir a 4^{y+2} como:

$4^{y+2} = 4^y(4^2)$, sustituimos en la expresión original y factorizamos,

_______ $- 4^y = 4^y$ (_______) $= 4^y$ (___)

así que;

$4^{y+2} - 4^y = 15(4^y)$

Ejercicios

1) Muestra que $a^b = b^a$ con los siguientes valores:
   a) $a = (☝)^2$, $b = (☝)^3$ b) $a = (☺)^3$, $b = (☺)^4$ c) $a = 2$, $b = 4$

2) Muestre que:
   a) $5^{t+2} + 3(5^{t+1}) - 40(5^t) = 0$ b) $4^n + 4^n = 2^{2n+1}$

3) a) Si $5^{-x} = 3$, ¿a qué es igual 5^{3x}? B) Si $2^x = 3$, ¿a qué es igual 4^{-x}?

4) Resuelve las siguientes ecuaciones.
   a) $5^{4x-2} = 25^{x+1}$ b) $27^{5x-6} = 9^{7x+3}$ c) $(9^{3x})^3 = 243$

4.6) Problemas diversos de aplicación.

Ejemplo 1) Si se tiene una inversión de _________ con un rendimiento anual del _________, si el tiempo del depósito es un año (t = 1), calcula el valor de la inversión en cada uno de los siguientes periodos de capitalización que se muestran en la tabla

Solución:

El valor de la inversión lo calculamos con la siguiente expresión que espero se te haga conocida $A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ donde,

P = inversión inicial

r = tasa anual de interés

n = número de periodos anuales de capitalización

t = número de años de la inversión

A = valor de la inversión después de t años

Ahora ya puedes completar la tabla

Periodo	n	Valor de la inversión al año
Anual		
Semestral		
Trimestral		
Mensual		
Semanal		
Diario		
Cada hora		
Continuo		$A = Pe^{rt}$

Si aumentamos los periodos de capitalización que es lo que sucede: ____

Ejemplo 2) La población de ranas en un pequeño estanque crece exponencialmente. La población actual es de 85 ranas, y la tasa de crecimiento relativo es de 18 % anual.

a) Determina una fórmula n(t) para la población después de t años.

b) Determina la población proyectada después de 3 años.
c) Determina el número de años necesarios para que la población de ranas sea de 600.

Solución:

a) Como la población de ranas crece exponencialmente y nos dan la tasa de crecimiento relativo entonces la población $n(t)$ tiene la forma:

$$N(t) = N_0\, e^{r\,t}$$

donde r es la tasa de crecimiento = 0.18 y N_0 = población actual = _________

$$N(t) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

b) Utilizamos la expresión anterior con el valor de $t = 3$

$N(3)$ = _____________ = _____________

Así que después de 3 años habrá ___________ ranas en el estanque

c) Con la misma expresión donde la población después de t años es de 600 intenta con ayuda de tu calculadora encontrar un valor aproximado de t

$$600 = 85\, e^{0.18\,t}$$

primero con enteros y luego ya que veas entre que enteros la expresión se aproxima a 600 sigue hasta centésimos.

Aproximadamente cuando t =________ se tendrán 600 ranas en el estanque.

Ejemplo 3) Supón que el valor de una computadora se deprecia a razón de 15 % al año. Determina el valor de una computadora laptop dos años después que se compró en \$ 18500.00. Encuentra una expresión para su valor en función del tiempo y determina su valor después de 5 y 10 años

Solución:

El valor de la computadora disminuye 15 % de su valor, así que al finalizar el primer año su precio será de:

18500 – 18500(   ) = _____________________

18500(0.85) = ______________________

estas dos cantidades son iguales, así que vamos a utilizar la segunda, al finalizar el segundo año este valor se reducirá un 15 %, o sea que el precio de la laptop será de:

18500(0.85) (0.85) = _______________

Si continuamos aumentando el valor de t, llegamos a la expresión:

$$P(t) = 18500(0.85)^t$$

Y para saber su valor después de 5 y 10 años sólo sustituimos

$P(5) = 18500(0.85)^5$ = ________________

$P(10) = 18500(0.85)^{10}$ = _________________

Ejercicios.

1) Cuando se purifica el keroseno para producir combustible para aviones, los contaminantes se eliminan al hacer pasar el keroseno a través de un filtro de arcilla especial. Supón que un filtro está embebido en una tubería de manera que 15 % de las impurezas se eliminan por cada pie que recorre el keroseno.
   a) Escribe una función exponencial para representar el porcentaje de impurezas que quedan después que el keroseno recorre x pies.
   b) Traza la gráfica de la función.
   c) ¿Más o menos qué porcentaje de impurezas quedan después que el keroseno recorre 12 pies?
   d) ¿Se eliminarán las impurezas por completo? Explica

2) Los científicos que estudian el salmón del Atlántico encontraron que el consumo de oxígeno del salmón primal O está dado por la función, $O = 100\left(3^{\frac{3s}{5}}\right)$, donde s es la velocidad a la que viaja el pez en pies por segundo.
   a) ¿Cuál es el consumo de oxígeno de un pez que viaja a 5 pies por segundo?
   b) Si un pez recorre 4.2 millas en una hora, ¿cuál es el consumo de oxígeno?

3) Un paracaidista deportivo salta desde una altura razonable. La resistencia del aire que experimenta es proporcional a su velocidad, y la constante de proporcionalidad es 0.2. Se demuestra que la velocidad del paracaidista en el tiempo t está dada por $v(t) = 80(e^{-0.2t} - 1)$, donde t se mide en segundos y $v(t)$ se mide en pies por segundo (pies/s).
   a) Determina la velocidad inicial del paracaidista.
   b) Determina la velocidad después de 5 s y después de 10 s.
   c) Traza la gráfica de la función de la velocidad $v(t)$.
   d) La velocidad máxima de un objeto en caída con resistencia del viento se conoce como velocidad terminal. A partir de la gráfica del inciso c), determina la velocidad terminal de este paracaidista.

4) Bajo condiciones ideales un cierto tipo de bacterias tiene una tasa de crecimiento relativo de 220 % por hora. Accidentalmente se introduce un determinado número de estas bacterias en un producto alimenticio. Dos horas después de la contaminación, un conteo bacterial muestra que existen aproximadamente 40 000 bacterias en el alimento.
   a) Determina el número inicial de bacterias introducidas en el alimento.
   b) Estima el número de bacterias en el alimento 3 horas después de la contaminación.

5) Los sociólogos han encontrado que la información se difunde entre una población a una tasa exponencial. Supón que la función $y = 525(1 - e^{-0.038t})$ representa el número de personas en un pueblo de 525 habitantes, quienes han escuchado las noticias de t horas a partir de su difusión.

a) ¿Cuántas personas han escuchado acerca de la inauguración de una nueva tienda de abarrotes dentro de las 24 horas a partir del anuncio?
b) Traza la gráfica de la función. ¿En qué momento el 90 % de la gente habrá escuchado acerca de la inauguración de la tienda de abarrotes?

6) Una persona desea depositar en el banco $10 000.00 y dejar ese depósito por 20 años. Se le presentan dos opciones: 5 % de interés anual compuesto semestralmente, y 4.5 % de interés anual compuesto trimestralmente. ¿Qué opción debe elegir esta persona?

7) Con el fin de entrenar trabajadores para armar tableros de circuitos se envió un grupo a una compañía de capacitación de personal. En una experiencia pasada se encontró que la curva de aprendizaje para el empleado medio está dada por $N = 40(1 - e^{-0.12t})$, donde N es el número de tableros armados por día después de t días de entrenamiento. Traza la gráfica de esta función para $0 \leq t \leq 30$. ¿Cuál es, en promedio, el máximo número de tableros que se espera produzca un empleado en un día?

4.7 Situaciones que dan lugar a funciones logarítmicas.

El nivel del pH en una solución es su nivel de acidez y se relaciona con la concentración de iones de hidrógeno (H^+) medida en moles por litro, en el agua potable se mide con frecuencia este nivel de acidez para verificar la presencia de algún contaminante peligroso y se utiliza una expresión que contiene logaritmo en base 10 como la siguiente, $pH = \log(1/H^+)$, también para conocer la intensidad de los temblores o del sonido se usa una expresión parecida a la anterior. En los problemas cuyo modelo es una función exponencial te diste cuenta que cuando se nos pedía el valor de la función no había problemas pero si se nos daba un valor determinado de la función para encontrar el valor de la variable independiente teníamos algunas dificultades porque no sabemos todavía despejar cuando se tienen funciones exponenciales y los cálculos los realizábamos de manera indirecta por ensayo y error tratando de atrapar el valor aproximado en vez de despejar la variable. Realicemos un ejemplo de este tipo.